SUL PENDOLO QUADRANTALE

Nota di ARNALDO MASOTTI, Milano (Italia)

SUNTO. — *Richiamati vari problemi fisico-matematici nei quali intervengono oscillazioni quadrantali, si considera in particolare il pendolo semplice quadrantale, esaminando specialmente alcuni tipi di forze attive che possono provocare questo movimento.*

1. La denominazione di «pendolo quadrantale» si trova nel classico trattato di Thomson e Tait per indicare un corpo rigido che ruota intorno a un asse con accelerazione angolare espressa dall'equazione

$$\ddot{\varphi} = -c^2 \sin\varphi \cos\varphi, \tag{1}$$

dove c è una costante, e φ è l'angolo di due piani passanti per l'asse, uno fisso e l'altro solidale col corpo. Posto

$$\vartheta = 2\varphi, \tag{2}$$

la (1) diviene

$$\ddot{\vartheta} = -c^2 \sin\vartheta, \tag{3}$$

che è la nota equazione relativa al pendolo ordinario. Nella possibilità di trasformare la (1) nella (3), mediante la (2), ha origine la denominazione di pendolo quadrantale [1].

---

[1] Infatti così si esprimono gli Autori citati: "We shall call by the name of quadrantal pendulum... a body moving about an axis, according to the

La (1) interviene nell'idrodinamica, a proposito del moto di un solido rotondo in un liquido perfetto, quando il solido non ruota intorno all'asse e questo si muove in un piano: allora φ è l'inclinazione dell'asse del solido su una direzione fissa, sicchè si può dire che il solido compie oscillazioni quadrantali rispetto al suo baricentro (2). Analoga conclusione sussiste per un solido cilindrico indefinito, nel caso piano (3).

Altri esempi di oscillazioni quadrantali sono pure conosciuti: sono offerti da una sbarra di ferro dolce girevole intorno a un asse e immersa in un campo magnetico uniforme normale a quell'asse (4), e da un'asta materiale omogenea, libera di muoversi in un piano, nell'ipotesi che i suoi elementi siano attratti verso una retta fissa del piano da forze proporzionali alle lunghezze degli elementi stessi e alle loro distanze dalla retta attraente (5).

Si incontra altresì la (1) nella meccanica del corpo rigido, quando si studia il moto alla Poinsot (6), e nella meccanica celeste, in una teoria approssimata della librazione della Luna (7).

2. Il moto di un punto materiale vincolato a una circonferenza liscia, e mobile in conformità alla (1), sebbene si presenti come il caso più elementare, è stato finora scarsamente considerato. E poichè esso dà luogo ad alcune osservazioni degne di nota, e che altrove non vedemmo messe in rilievo, a quel moto dedichiamo le righe che seguono.

È manifesta la relazione cinematica fra questo *pendolo semplice quadrantale* e il *pendolo semplice ordinario*. Essa è illustrata dalla figura 1, dove l' arco AP è doppio nell'arco AQ:

---

same law reference to a quadrant en each side of its position of equilibrium, as the common pendulum with reference to a half circle on each side". THOMSON e TAIT [14] p. 332. [I numeri fra parentesi quadre si riferiscono alle opere elencate nella bibliografia posta in fondo alla nota].

(2) THOMSON e TAIT [14] p. 330-337. LAMB [8] p. 161-164. GRAY [3] p. 282-285. AUERBACH [2] p. 279-280. RAMSEY [11] p. 198-200. MILNE-THOMSON [10] p. 477-479.

(3) GREENHILL [4]. GRAY [3] p. 285. RAMSEY [11] p. 200.

(4) THOMSON e TAIT [14] p. 332. THOMSON [13] p. 75. GRAY [3] p. 282.

(5) APPELL [1] p. 97-98. WHITTAKER [16] p. 143.

(6) GREENHILL [6]. TISSERAN [15] p. 450. ROUTH [12] p. 370.

(7) GYLDÉN [6]. TISSERAND [15] p. 450. ROUTH [12] p. 370.

supposto che il moto di P sia quello di un pendolo semplice ordinario, il moto di Q è quello di un pendolo semplice quadrantale.

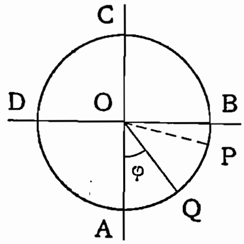

Figura 1

Dalla (1), moltiplicando per $2\dot{\varphi}$ e integrando, si deduce

$$\dot{\varphi}^2 = a^2 - c^2 \sin^2 \varphi, \tag{4}$$

dove a è una costante arbitraria, che si può supporre positiva, e che rappresenta il valore assoluto della velocità angolare $\dot{\varphi}$ del punto mobile quando esso transita per A. Sull'ulteriore integrazione della (4), che si fa (in generale) con funzioni ellittiche, sorvoliamo. Ci limitiamo a dedurre dalla (4) che il moto si effettua dove

$$-\frac{a}{c} \leqq \sin \varphi \leqq \frac{a}{c}, \tag{5}$$

e che sono punti di arresto gli estremi di questo intervallo quando essi sono raggiungibili, ciò che avviene solo se $a \leqq c$; e perciò:

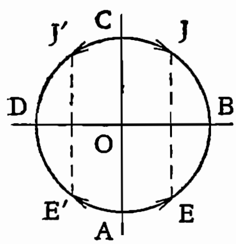

Fig. 2

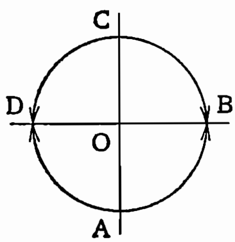

Fig. 3

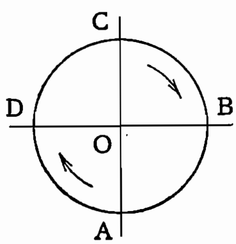

Fig. 4

I) se $a < c$ il moto avviene su un arco minore di una semicirconferenza e simmetrico rispetto al diametro AC (come EE' e JJ' della figura 2), e ha carattere oscillatorio;

II) se $a = c$ il moto avviene lungo una semicirconferenza (la DAB o la BCD della figura 3), e ha per meta asintotica uno degli estremi della semicirconferenza ([8]);

III) se $a > c$ il moto avviene lungo tutta la circonferenza, con carattere rivolutivo, avendo il quadrato della velocità angolare due massimi eguali ad a^2 in A e C, due minimi eguali ad $a^2 - c^2$ in B e D (figura 4).

3. Rivolgiamoci ora alle forze che possono provocare tale movimento. Dette $\overline{F}$ la forza attiva e $\overline{R}$ la reazione vincolare (normale al vincolo, che abbiamo supposto liscio), supporremo la $\overline{F}$ giacente nel piano della circonferenza, con che la $\overline{R}$ risulta radiale. Indicati con m la massa del punto mobile e con r il raggio della circonferenza, avremo allora le due equazioni intrinseche di moto:

$$F_t = mr\ddot{\varphi}, \qquad F_n + R_n = mr\dot{\varphi}^2$$

dove t denota la tangente alla circonferenza volta nel senso in cui cresce φ, e n indica la normale orientata verso il centro O. Mediante le (1) e (4), le precedenti divengono:

$$F_t = -mrc^2 \sin\varphi\cos\varphi, \qquad F_n + R_n = mr(a^2 - c^2\sin^2\varphi). \tag{6}$$

La prima delle (6) definisce il componente tangenziale della forza attiva, anzi ne porge una immediata costruzione geometrica (figura 5): proiettato Q sul diametro AC in G, indi proiettato G in T sulla tangente, il componente tangenziale della forza attiva è dato da $mc^2(T - Q)$. Ne segue che, detto Z un punto arbitrario della retta GT, la più generale forza attiva atta a pro-

---

([8]) In questo caso $\dot{\varphi}^2 = c^2\cos^2\varphi$; perciò il valore assoluto della velocità angolare, e quindi il modulo della velocità del punto, sono proporzionali alla distanza del punto dal diametro BD.

durre un moto pendolare quadrantale è la seguente:

(7) $$\overline{F} = mc^2(Z - Q).$$

Dopo ciò la seconda delle (6) definisce la componente normale della reazione, con che la reazione risulta completamente determinata. Tale componente è somma del termine costante mra^2, e del termine

$$-(F_n + mr\,c^2 \sin^2 \varphi),$$

esprimibile geometricamente come segue (figura 5): segnato sulla GT il punto N simmetrico di G rispetto a T, e indicata con NZ la componente del vettore $Z - N$ secondo n, si ha

$$-(F_n + mrc^2 \sin^2 \varphi) = -mc^2 \,.\, NZ,$$

e quindi

(8) $$R_n = mra^2 - mc^2 \,.\, NZ.$$

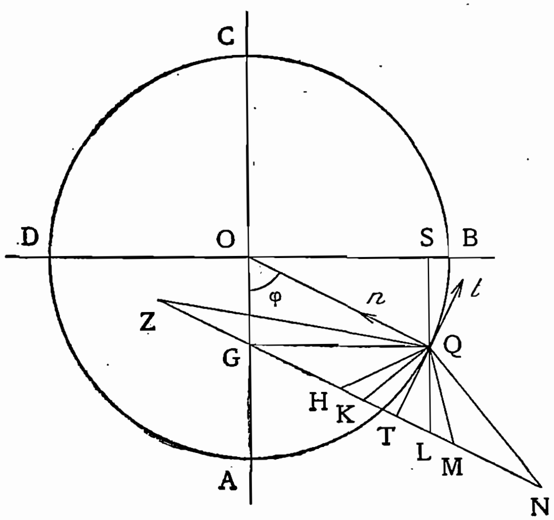

Figura 5

4. Ci proponiamo ora di indicare qualche notevole esempio di forza attiva atta a produrre un moto pendolare quadrantale.

Ci saranno utili, oltre i punti G ed N (figura 5), altri punti della retta GT, e precisamente: il punto L, intersezione della GT con la parallela per Q al diametro AC, e il simmetrico K di L rispetto a T; e i punti H ed M, punti medi di GL e KN, essi pure simmetrici rispetto a T. Converrà inoltre tener presente che i triangoli eguali GQL e NQK, rettangoli in Q, hanno i cateti eguali alle distanze di Q dai diametri AC e BD, e le ipotenuse eguali a r; quindi $QH = QM = r/2$.

Gli annunciati esempi sono relativi a speciali posizioni, sulla retta GT, del punto Z che figura nelle (7) e (8).

1°) Sia $Z = N$, quindi $\overline{F} = mc^2(N - Q)$. Questa forza attiva ha intensità proporzionale alla distanza del punto mobile dal diametro AC. Circa la sua retta d'azione, si può constatare che essa inviluppa una epicicloide a due lobi, avente per base la circonferenza con centro O e raggio $r/2$, e colle cuspidi sul diametro BD. La (8) dà in questo caso $R_n = mra^2$, sicchè la reazione è sempre centripeta ed ha intensità *costante*.

2°) Sia $Z = M$, perciò $\overline{F} = mc^2(M - Q)$. Tal forza attiva ha *costante* l'intensità, e con la sua retta d'azione inviluppa una epicicloide a quattro lobi, avente per base la circonferenza con centro O e raggio $2r/3$, e le cuspidi sui diametri AC e BD. Adesso la (8) porge $R_n = mr(a^2 - c^2/2)$, e perciò la reazione è sempre centripeta o sempre centrifuga a seconda che $a > c/\sqrt{2}$ oppure $a < c/\sqrt{2}$, in ambo i casi essendo *costante* la sua intensità. Nel primo caso il moto ha carattere rivolutivo (se $a > c$), o ha meta asintotica (se $a = c$), o ha carattere oscillatorio (se $c/\sqrt{2} < a < c$) lungo un arco maggiore di un quadrante; nel secondo caso ha carattere oscillatorio lungo un arco minore di un quadrante. Quando sia in particolare $a = c/\sqrt{2}$ la reazione risulta nulla, e il punto compie oscillazioni *libere* lungo il quadrante avente per punto medio A oppure C.

3°) Sia $Z = K$, sicchè $\overline{F} = mc^2(K - Q)$. Adesso la forza attiva ha intensità proporzionale alla distanza del punto mobile dal diametro BD, e la sua retta d'azione inviluppa una epicicloide a due lobi, avente per base la circonferenza con centro O e raggio $r/2$, e le cuspidi sul diametro AC. Nel caso attuale la (8) diviene

$R_n = mr(a^2 - c^2)$, donde segue che la reazione è sempre centripeta o sempre centrifuga a seconda che $a > c$ oppure $a < c$, essendo *costante* la sua intensità in ambo i casi: il moto ha carattere rivolutivo nel primo caso, oscillatorio nel secondo. Se in particolare è $a = c$ la reazione è nulla, e il punto si muove *liberamente* lungo il semicerchio DAB o BCD, avendo B o D come meta asintotica (9).

4°) Supponiamo $Z = G$. Allora $\overline{F} = mc^2(G - Q)$. Questa forza attiva è una attrazione verso la retta AC, di intensità proporzionale alla distanza dalla retta stessa (10).

5°) Supponiamo $Z = H$. Adesso $\overline{F} = mc^2(H - Q)$. Tal forza attiva ha intensità *costante*, e la sua retta d'azione inviluppa un asteroide con le cuspidi sulle rette AC e BD, a distanza $2r$ da O.

6°) Supponiamo infine $Z = L$. Risulta $\overline{F} = mc^2(L - Q)$, che è una repulsione dalla retta BD, di intensità proporzionale alla distanza dalla retta medesima (11).

BIBLIOGRAFIA

[1] P. Appell, *Traité de mécanique rationnelle*, v. II, 4ª ediz. Paris, Gauthier-Villars, 1923.

[2] F. Auerbach, *Bewegung fester Körper in Flüssigkeiten.* "Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik", v. V. Leipzig, Barth, 1931, p. 249-299.

[3] A. Gray, *A treatise on gyrostatics and rotational motion.* London, Macmillan, 1918.

---

(9) I casi 1°, 2°, 3°, nei quali la reazione ha intensità costante, rientrano fra quelli esaminati in Masotti [9] n. 6. Ivi, n. 8, fu già trattato il caso 2°.

(10) Notoriamente siffatta forza può essere concepita come risultante delle attrazioni newtoniane che il punto subirebbe da parte della retta AC, supposta omogenea.

(11) Una simile forza apparirebbe come forza centrifuga se la circonferenza rotasse uniformemente intorno alla retta BD: problema su cui si può vedere Lamb [7] p. 195.

[4] A. G. GREENHILL, *On the motion of a cylinder through frictionless liquid under no forces.* "The Messenger of Mathematics", v. IX, 1879-80, p. 117-120.

[5] A. G. GREENHILL, *Les fonctions elliptiques et leurs applications.* Trad. di J. Griess. Paris, Carré, 1895.

[6] H. GYLDÉN, *Démonstration, au moyen des fonctions elliptiques, d'un théorème dans la théorie de la libration de la Lune.* "Comptes Rendus de l'Académie des Sciences", v. LXXXIX, 1879, p. 932-933.

[7] H. LAMB, *Higher mechanics.* Cambridge, University Press, 1920.

[8] H. LAMB, *Hydrodynamics.* 5ª ediz. Cambridge, University Press, 1924.

[9] A. MASOTTI, *Sul moto di un punto vincolato ad una linea piana nel quale è costante la intensità della reazione.* "Rendiconti del R. Istituto Lombardo", v. LXXV, 1941-42, Cl. di Scienze, p. 211-231.

[10] L. M. MILNE-THOMSON, *Theoretical hydrodynamics.* London, Macmillan, 1938.

[11] A. S. RAMSEY, *Hydrodynamics.* (Parte II del *Treatise on hydromechanics* di BESANT e RAMSEY). 4ª ediz. London, Bell, 1935.

[12] E. J. ROUTH, *The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies.* Ristampa della 6ª ediz. del 1905: New York, Dover, 1955.

[13] W. THOMSON (Lord KELVIN), *On the motion of free solids through a liquid.* Pubblicata nel 1871. Cito l'edizione contenuta nei "Mathematical and Physical Papers", v. IV, Cambridge, University Press, 1910, p. 69-75.

[14] W. THOMSON (Lord KELVIN) e P. G. TAIT, *Treatise on natural philosophy,* p. I. Pubblicato nel 1867. Cito l'edizione successiva: Cambridge, University Press, 1879 (più volte ristampata).

[15] F. TISSERAND, *Traité de mécanique céleste,* v. II. Paris, Gauthier-Villars, 1891.

[16] E. T. WHITTAKER, *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies.* 3ª ediz. Cambridge, University Press, 1927.