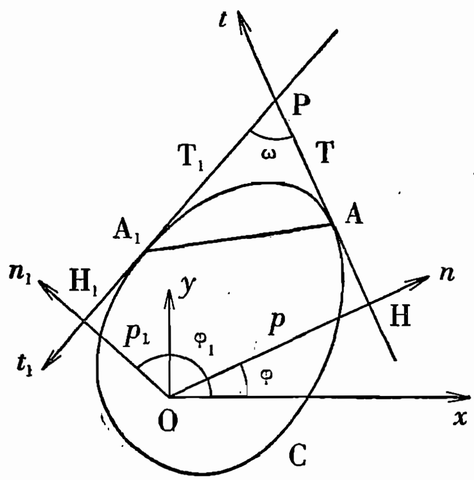
# SULLA GEOMETRIA INTEGRALE: GENERALIZZAZIONE DI FORMULE DI CROFTON, LEBESGUE E SANTALO

Nota di GIUSEPPINA MASOTTI BIGGIOGERO, Milano (Italia)

SUNTO. – *Si assegnano per gli ovali alcune formule integrali, che generalizzano relazioni stabilite da Crofton, Lebesgue e Santaló.*

1. *Alcune premesse relative agli ovali.* — Sia $C$ un ovale, con che si intenderà una curva piana chiusa e convessa, con tangente in ogni punto e raggio di curvatura continuo (1). Sia $L$




la sua lunghezza. Riferito il piano a un sistema cartesiano ortogonale, con l'origine $O$ interna a $C$ (v. figura), si assuma come

(1) SANTALÓ, *8*, p. 7 e 9. REY PASTOR e SANTALÓ, *7*, p. 11 e 15. [I numeri in corsivo rimandano alle opere citate nella bibliografia, in fondo alla nota].

verso positivo delle rotazioni quello antiorario, e concordemente si orienti ogni tangente $t$ a $C$. Detta $H$ la proiezione ortogonale di $O$ su $t$, si chiami $n$ la retta $OH$ orientata da $O$ verso $H$, e sia $\varphi$ l'angolo (con segno) che la $n$ forma con l'asse $x$. Ciò premesso, la famiglia delle tangenti all'ovale è rappresentata dall'equazione

$$x \cos \varphi + y \operatorname{sen} \varphi = p(\varphi), \tag{1}$$

dove $p(\varphi)$ —la *funzione di appoggio* dell'ovale, secondo la dizione di Minkowski— è la misura (positiva) del segmento $OH$, ed è funzione periodica di $\varphi$, con periodo $2\pi$.

Mediante la funzione di appoggio si possono esprimere i vari elementi dell'ovale. Qui importa solo ricordare che le coordinate di $A$, punto di contatto con $C$ della generica tangente $t$, sono date dalle equazioni (²)

$$\begin{cases} x = p \cos \varphi - p' \operatorname{sen} \varphi \\ y = p \operatorname{sen} \varphi + p' \cos \varphi \end{cases} \tag{2}$$

(che si possono pure interpretare come equazioni parametriche di $C$), e che la lunghezza $L$ di $C$ è data dalla formula di Cauchy (³)

$$L = \int_0^{2\pi} p \, d\varphi. \tag{3}$$

Preso ora un punto $P$ esterno a $C$, da esso passano due tangenti, $t$ e $t_1$, all'ovale (⁴): siano $A$ e $A_1$ i loro punti di contatto, $n$ e $n_1$ le normali ad esse per $O$, $H$ e $H_1$ le intersezioni di queste normali con le corrispondenti tangenti, $\varphi$ e $\varphi_1$ gli angoli che $n$ e $n_1$ formano con l'asse $x$. Si converrà di chiamare $t$ quella tangente sulla quale il verso positivo va dal punto di contatto $A$ al punto $P$; su $t_1$ avverrà il contrario. L'angolo

(²) BLASCHKE, *2*, p. 29. REY PASTOR e SANTALÓ, *7*, p. 17.
(³) BLASCHKE, *2*, p. 11. REY PASTOR e SANTALÓ, *7* p. 20.
(⁴) REY PASTOR, *6*, p. 177. REY PASTOR e SANTALÓ, *7*, p. 7.

sotto cui da $P$ è veduto $C$, cioè l'angolo

$$(4) \qquad \omega = A\hat{P}A_1 \qquad (0 \leqq \omega \leqq \pi),$$

ovviamente è il supplemento di $\varphi_1 - \varphi = H\hat{O}H_1$, pertanto si ha

$$(5) \qquad \varphi_1 = \pi + \varphi - \omega.$$

Indicate con $T$ e $T_1$ le misure (positive) dei segmenti $PA$ e $PA_1$, interessa determinare queste lunghezze in funzione di $\varphi$ e $\varphi_1$, ovvero di $\varphi$ e $\omega$. A questo scopo possono servire le coordinate di $A$, $A_1$ e $P$.

Le coordinate $(x, y)$ di $A$ sono date dalle (2). Le coordinate $(x_1, y_1)$ di $A_1$ si deducono dalle stesse (2), sostituendovi $\varphi$ con $\varphi_1$: perciò, espresso $\varphi_1$ mediante la (5) e posto, per semplicità di scrittura, $p_1 = p(\varphi_1)$ e $p_1' = p'(\varphi_1)$, si ha

$$(6) \qquad \begin{cases} x_1 = -p_1 \cos(\varphi - \omega) + p_1' \operatorname{sen}(\varphi - \omega) \\ y_1 = -p_1 \operatorname{sen}(\varphi - \omega) - p_1' \cos(\varphi - \omega). \end{cases}$$

Le coordinate $(X, Y)$ di $P$ si ricavano dal sistema delle equazioni delle tangenti $t$ e $t_1$, la prima equazione essendo la (1) e la seconda equazione essendo ottenuta dalla (1) con la sostituzione di $\varphi$ con $\varphi_1$; si trova

$$(7) \qquad \begin{cases} X = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}[p \operatorname{sen}(\varphi - \omega) + p_1 \operatorname{sen}\varphi] \\[2ex] Y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}[p \cos(\varphi - \omega) + p_1 \cos\varphi]. \end{cases}$$

Dalle (2), (6), (7), e dalle ovvie relazioni

$$X - x = -T \operatorname{sen}\varphi, \qquad X - x_1 = T_1 \operatorname{sen}\varphi_1$$

oppure dalle analoghe

$$Y - y = T \cos\varphi, \qquad Y - y_1 = -T_1 \cos\varphi_1$$

si ricavano le desiderate espressioni di $T$ e $T_1$ (5):

$$(8) \qquad \begin{cases} T = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \omega} (p \cos \omega - p' \operatorname{sen} \omega + p_1) \\ \\ T_1 = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \omega} (p_1 \cos \omega + p_1' \operatorname{sen} \omega + p). \end{cases}$$

È noto che si possono assumere $(\varphi, \varphi_1)$ come coordinate di $P$, e che la densità dei punti $P$, che in coordinate cartesiane è espressa da $dP = dx\, dy$, risulta espressa in coordinate $(\varphi, \varphi_1)$ dalla formula (6)

$$(9) \qquad dP = \frac{TT_1}{\operatorname{sen} \omega} d\varphi\, d\varphi_1.$$

Analogamente si possono assumere $(\varphi, \omega)$ come coordinate di $P$: allora la densità dei punti $P$ risulta espressa dalla formula

$$(10) \qquad dP = \frac{TT_1}{\operatorname{sen} \omega} d\varphi\, d\omega,$$

che si deduce subito dalla (9) ponendovi per $d\varphi_1$ l'espressione $d\varphi - d\omega$ che si trae dalla (5), eseguendo il prodotto dei differenziali colle regole della moltiplicazione esterna, e rammentando la convenzione di prendere le densità in valore assoluto (7).

2. *Formule integrali relative agli ovali.* — Le precedenti premesse consentono di pervenire rapidamente alle formule integrali che sono l'oggetto di questa nota, e che qui si raccolgono, avvertendo che i simboli $R$ e $R_1$ che vi figurano (insieme ad altri di significato già precisato) indicano i raggi di curvatura dell'ovale nei punti $A$ e $A_1$.

---

(5) Le quantità fra parentesi sono quindi le distanze di $A$ da $T_1$ e di $A_1$ da $T$: cfr. Hurwitz, *4*, p. 531.

(6) Santaló, *8*, p. 8. Rey Pastor e Santaló, *7*, p. 43.

(7) Su queste regole e questa convenzione cfr. Blaschke, *2*, p. 4 e 10. Santaló, *8*, p. 7.

*a*) Sia $f(\omega)$ una funzione di $\omega$, tale che esista e sia finito l'integrale

$$(11) \qquad h=\int_0^\pi \frac{f(\omega)}{\operatorname{sen}\omega}\,d\omega.$$

Sussistono allora le formule integrali:

$$(12) \qquad \int \frac{f(\omega)}{TT_1}\,dP=2h\pi,$$

$$(13) \qquad \int \frac{f(\omega)}{TT_1}(R+R_1)\,dP=2hL,$$

dove le integrazioni sono estese a tutto il campo esterno all'ovale.

*b*) Sia $f(\omega)$ una funzione di $\omega$, tale che esista e sia finito l'integrale

$$(14) \qquad k=\int_0^\pi \frac{f(\omega)}{1-\cos\omega}\,d\omega=\frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{f(\omega)}{\operatorname{sen}^2(\omega/2)}\,d\omega.$$

Sussiste allora la formula integrale

$$(15) \qquad \int f(\omega)\left(\frac{1}{T}+\frac{1}{T_1}\right)dP=2kL,$$

dove la integrazione è estesa a tutto il campo esterno all'ovale.

La dimostrazione è immediata per la (12): infatti, in virtù della (10),

$$\int \frac{f(\omega)}{TT_1}\,dP=\iint \frac{f(\omega)}{\operatorname{sen}\omega}\,d\varphi\,d\omega=\int_0^\pi \frac{f(\omega)}{\operatorname{sen}\omega}\,d\omega\int_0^{2\pi} d\varphi$$

donde segue la (12).

Analogamente si procede per la (13), per la quale si ha

$$\int \frac{f(\omega)}{TT_1}(R+R_1)\,dP = \iint \frac{f(\omega)}{\operatorname{sen}\omega}(R+R_1)\,d\varphi\,d\omega =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{f(\omega)}{\operatorname{sen}\omega}\,d\omega \int_0^{2\pi}(R+R_1)\,d\varphi\,;$$

ma l'integrale più interno eguaglia la somma

$$\int_0^{2\pi} R\,d\varphi + \int_0^{2\pi} R_1\,d\varphi,$$

il cui secondo termine, con la sostituzione (5), si riduce, al pari del primo termine, all'integrale del raggio di curvatura esteso ad un periodo, sicchè l'uno e l'altro termine sono eguali alla lunghezza $L$ dell'ovale, donde segue la (13).

Anche per dimostrare la (15) serve la (10), e poichè dalle (8) si ricava

$$T + T_1 = \frac{1+\cos\omega}{\operatorname{sen}\omega}(p+p_1) - (p-p_1)',$$

si ottiene:

$$\int f(\omega)\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T_1}\right) dP =$$

$$= \iint \frac{f(\omega)}{\operatorname{sen}\omega}\left[\frac{1+\cos\omega}{\operatorname{sen}\omega}(p+p_1) - (p-p_1)'\right] d\varphi\,d\omega =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{f(\omega)}{1-\cos\omega}\,d\omega \int_0^{2\pi}(p+p_1)\,d\varphi - \int_0^{\pi}\frac{f(\omega)}{\operatorname{sen}\omega}\,d\omega\int_0^{2\pi}(p-p_1)'\,d\varphi\,;$$

ma l'integrale di $p+p_1$ eguaglia la somma

$$\int_0^{2\pi} p\,d\varphi + \int_0^{2\pi} p_1\,d\varphi,$$

i cui termini, per la (5), si riconoscono eguali, ed eguali alla lunghezza $L$ dell'ovale, in virtù della (3); e l'integrale di $(p-p_1)'$ è nullo, per la periodicità di $p-p_1$, donde segue la (15).

*Osservazioni:*

1ª) Si rileva, quantunque evidente, che $h$ e $k$ dipendono soltanto da $f(\omega)$. Quindi l'integrale (12) ha lo stesso valore per tutti gli ovali, e ciascun integrale (13) e (15) conserva il medesimo valore per tutti gli ovali isoperimetri (mentre varia per gli ovali aventi la stessa area, assumendo valore minimo per il cerchio).

2ª) Negli integrali (12) e (13) si possono far sparire $T$ e $T_1$, facendo intervenire l'area $\Delta$ del triangolo $APA_1$, ad essi legata dalla relazione $2\Delta = TT_1 \operatorname{sen} \omega$.

3ª) Le dimostrazioni delle (12), (13), (15) palesano che le medesime formule sussistono se gli integrali dei primi membri si intendono estesi a una generica corona esterna all'ovale, compresa fra le due linee definite dalle eguaglianze $\omega = \alpha$ e $\omega = \beta$, essendo $\alpha$ e $\beta$ costanti, tali che $0 \leqq \alpha < \beta \leqq \pi$: solo occorre modificare le definizioni di $h$ e $k$, prima date dalle (11) e (14), ponendo ora

$$(16) \qquad h = \int_\alpha^\beta \frac{f(\omega)}{\operatorname{sen} \omega}\, d\omega, \qquad k = \int_\alpha^\beta \frac{f(\omega)}{1-\cos \omega}\, d\omega,$$

e ritoccare le ipotesi relative alle $f(\omega)$ restringendole al supporre che esistano e siano finiti gli integrali (16) che definiscono $h$ e $k$. Si nota che a tutte le coppie $(\alpha, \beta)$ per cui $h$ (oppure $k$) prende lo stesso valores, corrispondono corone sulle quali assume il medesimo valore ciascuno degli integrali (12) e (13) (oppure (15)). Per esempio, se $f(\omega) = f(\pi - \omega)$, è

$$\int_0^{\pi/2} \frac{f(\omega)}{\operatorname{sen} \omega}\, d\omega = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{f(\omega)}{\operatorname{sen} \omega}\, d\omega,$$

e quindi ciascuno degli integrali (12) e (13) prende valori eguali, quando è esteso all'una o all'altra delle due regioni in cui il campo esterno all'ovale è diviso dalla linea $\omega = \pi/2$ (luogo dei punti da cui l'ovale è visto sotto angolo retto).

3. *Alcuni casi speciali notevoli.* — Alcuni casi speciali, corrispondenti a particolari scelte delle funzioni $f(\omega)$, meritano di essere messi in evidenza, e segnatamente quelli già noti a cui si associano i nomi del Crofton, del Lebesgue, e del Santaló.

Rispetto alle (12) e (13) emerge per semplicità, guardando la (11), il caso in cui $f(\omega) = \operatorname{sen}\omega$. Allora $h = \pi$, e le (12) e (13) divengono le note formule

$$\int \frac{\operatorname{sen}\omega}{TT_1}\, dP = 2\pi^2, \tag{17}$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}\omega}{TT_1}\, (R + R_1)\, dP = 2\pi L, \tag{18}$$

che sono dovute rispettivamente al Crofton [8] e al Lebesgue [9].

Ponendo, più generalmente, $f(\omega) = \operatorname{sen}^m \omega$ (con $m > 0$), la $h$ si esprime in modo noto per mezzo della funzione $\Gamma$, e le (12) e (13) divengono

$$\int \frac{\operatorname{sen}^m\omega}{TT_1}\, dP = \frac{2\Gamma(m/2)}{\Gamma((m+1)/2)}\, \pi^{3/2}, \tag{19}$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}^m\omega}{TT_1}\, (R + R_1)\, dP = \frac{2\Gamma(m/2)}{\Gamma((m+1)/2)}\, \pi^{1/2} L, \tag{20}$$

che sono formule dovute al Santaló [10].

Rispetto alla (15) si distingue per semplicità, guardando la (14), il caso in cui $f(\omega) = \operatorname{sen}^2(\omega/2)$. Allora $k = \pi/2$, e la

---

(8) CROFTON, *3*, p. 193. BLASCHKE, *1*, p. 49. SANTALÓ, *8*, p. 9. REY PASTOR e SANTALÓ, *7*, p. 45. In CROFTON, *l. c.*, vi è pure una formula più generale, relativa ad ovali aventi punti angolosi.

(9) LEBESGUE, *5*, p. 496. SANTALÓ, *8*, p. 10. REY PASTOR e SANTALÓ, *7*, p. 50.

(10) SANTALÓ, *8*, p. 10. REY PASTOR e SANTALÓ, 7, p. 52.

(15) diviene

$$\int \operatorname{sen}^2 \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{T}+\frac{1}{T_1}\right) dP = \pi L, \tag{21}$$

che è formula stabilita dal Lebesgue ([11]). Anche il caso in cui $f(\omega) = \operatorname{sen}^m(\omega/2)$ (con $m > 1$) si può trattare senza difficoltà.

Circa le (12) e (13), sembra interessante il caso $f(\omega) = \omega \operatorname{sen} \omega$. Allora $h = \pi^2/2$, e si hanno quindi le formule

$$\int \frac{\omega \operatorname{sen} \omega}{TT_1} \, dP = \pi^3, \tag{22}$$

$$\int \frac{\omega \operatorname{sen} \omega}{TT_1} (R + R_1) \, dP = \pi^2 L. \tag{23}$$

Circa la (15), il ricordo della formula principale del Crofton ([12]) conduce a esaminare il caso $f(\omega) = \omega - \operatorname{sen} \omega$. Allora $k = 2$, e la (15) dà

$$\int (\omega - \operatorname{sen} \omega) \left(\frac{1}{T}+\frac{1}{T_1}\right) dP = 4L. \tag{24}$$

Altri casi interessanti sono i seguenti:

$$f(\omega) = \omega^2, \qquad f(\omega) = \omega \operatorname{sen} \omega, \qquad f(\omega) = \operatorname{sen}^2 \omega,$$

ai quali rispettivamente corrisponde

$$k = 4\pi \log 2, \qquad k = 2\pi \log 2, \qquad k = \pi;$$

si hanno perciò le formule

$$\int \omega^2 \left(\frac{1}{T}+\frac{1}{T_1}\right) dP = 8\pi \log 2 \, . \, L, \tag{25}$$

([11]) Lebesgue, *5*, p. 496.

([12]) Crofton, 3, p. 188. Blaschke, *2*, p. 18. Santaló, *8*, p. 21. Rey Pastor e Santaló, *7*, p. 75.

$$\int \omega \operatorname{sen} \omega \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T_1}\right) dP = 4\pi \log 2 \, . \, L, \tag{26}$$

$$\int \operatorname{sen}^2 \omega \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T_1}\right) dP = 2\pi L, \tag{27}$$

ed anche

$$\int (\omega - \operatorname{sen} \omega)^2 \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T_1}\right) dP = 2\pi L, \tag{28}$$

Altri casi speciali notevoli facilmente si scorgono.

POLITECNICO DI MILANO

## BIBLIOGRAFIA

1. BLASCHKE, W., *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, v. I (3ª ediz., Berlin, Springer, 1930).
2. BLASCHKE, W., *Vorlesungen über Integralgeometrie*, v. I (2ª ediz., Leipzig-Berlin, Teubner, 1936).
3. CROFTON, M. W., *On the Theory of Local Probability, applied to Straight Lines drawn at random in a plane; the methods used being also extended to the proof or certain new Theorems in the Integral Calculus.* ''Philosophical Transactions of the Royal Society of London'', v. 158, 1868, p. 181-199.
4. HURWITZ, A., *Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier*, ''Annales de l'École Normale Supérieure'', s. III, v. 19, 1902, p. 357-408; ''Mathematische Werke'', v. I, p. 509-554.
5. LEBESGUE, H., *Exposition d'un mémoire de M. W. Crofton*, ''Nouvelles Annales de Mathématiques'', s. IV, v. 12, 1912, p. 481-502.
6. REY PASTOR, J., *Sobre los óvalos*, ''Contribución al estudio de las ciencias físicas y matemáticas'' di La Plata, ser. mat-fís., v. 4, 1928, p. 169-183.
7. REY PASTOR, J. e SANTALÓ SORS, L. A., *Geometría Integral* (Madrid-Buenos Aires, Espasa-Calpe, 1951).
8. SANTALÓ, L. A., *Introduction to Integral Geometry.* [Lezioni tenute all'Università di Chicago nel 1948]. (Paris, Hermann, 1953).