COMPLEMENTI A UN TEOREMA DI H. BOHR RIGUARDANTE LE SERIE DI POTENZE

di GIOVANNI RICCI, Milano (Italia)

1. — Sia $z = re^{i\vartheta}$ la variabile complessa e h un intero $\geqq 0$; denotiamo con $\overline{\mathrm{F}}_h$ l'insieme delle serie di potenze

$$(1.1) \qquad f(z) = a_h z^h + a_{h+1} z^{h+1} + \dots = \sum_h^{\infty} a_n z^n$$

aventi in $z = 0$ uno zero di molteplicità (almeno) h e soddisfacenti alle due condizioni:

i) $f(z)$ è regolare (almeno) per $|z| < 1$;

ii) $$|f(z)| \leqq 1 \quad \text{per} \quad |z| < 1.$$

E' evidente che $\overline{\mathrm{F}}_0 \supset \overline{\mathrm{F}}_1 \supset \overline{\mathrm{F}}_2 \supset \dots$; inoltre tutte e sole le funzioni $g(z) \in \overline{\mathrm{F}}_{h+1}$ hanno la forma $g(z) = zf(z)$ con $f(z) \in \overline{\mathrm{F}}_h$ (infatti $g(z)/z$ nel cerchio $|z| \leqq r$ assume il massimo modulo su $|z| = r$ e si pensi $r \to 1-$).

Poniamo, per $0 \leqq r < 1$,

$$(1.2) \qquad M(f; r) = \operatorname*{Max}_{|z| \leqq r} |f(z)|, \quad \mathrm{M}(f; r) = \sum_h^{\infty} |a_n| r^n.$$

E' noto il seguente teorema (di H. Bohr - F. Wiener) (1).

(1) H. BOHR, *A Theorem concerning power series*, Proc. London Math. Soc. (2), *13*, 1-5 (1914); E. LANDAU, *Ergebnisse der Funktionentheorie*, 2 Aufl. Berlin 1929, pp. 32-34.

«Per ogni $f(z) \in \overline{\mathrm{F}}_0$ è $\mathrm{M}(f; 1/3) \leqq 1$; inoltre 1/3 è la migliore costante (cioè, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $f(z) \in \overline{\mathrm{F}}_0$, tale che $\mathrm{M}(f; 1/3 + \varepsilon) > 1$)».

Denotiamo con B_h l'estremo superiore dei numeri γ (non negativi) tali che per ogni $f(z) \in \overline{\mathrm{F}}_h$ sia $\mathrm{M}(f; \gamma) \leqq 1$; allora è evidentemente $1/3 = \mathrm{B}_0 \leqq \mathrm{B}_1 \leqq \mathrm{B}_2 \leqq \ldots \leqq 1$. Che cosa si può dire sul valore di B_h per $h \geqq 1$? Ci occuperemo di questa questione.

La disuguaglianza di Cauchy ci dà $|a_n| \leqq M(f; r)/r^n$ e quindi, per ogni $f(z) \in \overline{\mathrm{F}}_0$ è $|a_n| \leqq 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$; anzi, se $|a_k| = 1$ allora è $a_n = 0$ per ogni $n \neq k$.

Sia α reale, $0 \leqq \alpha \leqq 1$ e $h \geqq 0$: denotiamo con $\mathrm{F}_h(\alpha)$ l'insieme delle serie di potenze

$$(1.3) \qquad f(z) = \alpha e^{i\vartheta} z^h + a_{h+1} z^{h+1} + \ldots \qquad (0 \leqq \vartheta < 2\pi)$$

appartenenti a $\overline{\mathrm{F}}_h$, cioè regolari per $|z| < 1$ e tali che $|f(z)| \leqq 1$ per $|z| < 1$. E' evidente che $\overline{\mathrm{F}}_h$ è la riunione degli insiemi $\mathrm{F}_h(\alpha)$ $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$; inoltre $\mathrm{F}_h(0) \equiv \overline{\mathrm{F}}_{h+1}$ $(h = 0, 1, 2, \ldots)$; da $f(z) \in \mathrm{F}_h(\alpha)$ segue $z f(z) \in \mathrm{F}_{h+1}(\alpha)$ e viceversa.

Denotiamo con $B_h(\alpha)$ l'estremo superiore dei numeri γ (non negativi) tali che, per ogni $f(z) \in \mathrm{F}_h(\alpha)$ risulta $\mathrm{M}(f; \gamma) \leqq 1$.

E'evidente che $B_h(\alpha)$ è l'analogo estremo superiore quando si consideri un ϑ fisso; inoltre $\mathrm{B}_h = \operatorname{Inf}_\alpha B_h(\alpha)$; $B_h(0) = \mathrm{B}_{h+1}$ $(h = 0, 1, 2, \ldots)$. $B_h(1) = 1$, $(h = 0, 1, 2, \ldots)$ (infatti $\mathrm{F}_h(1)$ è costituita dalle funzioni $f(z) = e^{i\vartheta} z^h$).

Che cosa si può dire sul valore di $B_h(\alpha)$? Ci occuperemo anche di questa questione.

2. — Teorema I. $\mathrm{B}_h < 1$ $(h = 0, 1, \ldots)$, $\mathrm{B}_h \rightarrow 1-$ per $h \rightarrow +\infty$;

$$\mathrm{B}_h + \mathrm{B}_h{}^h > 1;$$

$$\mathrm{B}_0 < \mathrm{B}_1 < \mathrm{B}_2 < \ldots < \mathrm{B}_h < \ldots.$$

Dimostrazione. 1) Poniamo $\mu = \operatorname{Max} |1 + e^{i\vartheta} - e^{i2\vartheta}|$ $(0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi)$, è evidentemente $\mu < 3$; la funzione

$$f(z) = z^h (1 + z - z^2)/\mu$$

appartiene a F_h ed è

$$M(f;r)=r^h(1+r+r^2)/\mu, \qquad M(f;1)=3/\mu>1.$$

Detto ρ_h il numero positivo per il quale $\rho_h{}^h(1+\rho_h+$ $+\rho_h{}^2)/\mu=1$ risulta $B_h \leqq \rho_h<1$ quindi $B_h<1$ $(h=0,1,2,\ldots)$.

2) Se $f(z)\in \overline{F}_h$ è $|a_n|\leqq 1$ e quindi, per $0\leqq\gamma<1$, è

$$(2.1) \qquad M(f;\gamma)=\sum_h^\infty |a_n|\,\gamma^n \leqq \gamma^h \sum_0^\infty \gamma^n=\gamma^h/(1-\gamma)$$

(indipendente da f); $\gamma^h/(1-\gamma)\leqq 1$ implica $M(f;\gamma)\leqq 1$ per ogni $f(z)\in\overline{F}_h$. Il segno $=$ in (2.1) vale soltanto quando $f(z)$ è costituita da un solo termine: ne segue $B_h{}^h/(1-B_h)>1$, cioè $B_h+B_h{}^h>1$.

3) Questa disuguaglianza mostra che $B_h\to 1-$ per $h\to+\infty$; anzi, essa ci mostra che esiste $\varepsilon_h\to 0$ per $h\to+\infty$ tale che

$$B_h>1-\frac{\log h}{h}(1+\varepsilon_h).$$

Basta infatti considerare l'uguaglianza $(1-\eta)^h+(1-\eta)=1$ che dà $h\log(1-\eta)=\log\eta$ e tener conto della serie logaritmica al primo membro.

4) Veniamo a dimostrare che $B_h<B_{h+1}$ per ogni $h\geqq 0$. Sia $f(z)\in\overline{F}_h$ (e quindi $|a_n|\leqq 1$); poniamo $\delta=(1+B_h)/2\,(<1)$.

Allora è, per $r\leqq\delta$:

$$\frac{d}{dr}M(f;r)=M(f';r)\leqq M(f';\delta)=\sum_h^\infty n|a_n|\,\delta^n\leqq\sum_h^\infty n\,\delta^n=$$

$$=K_h \text{ (indipendente da } f(z)).$$

D'altronde da $g(z)\in\overline{F}_{h+1}$ segue $g(z)=zf(z)$; inoltre è per $0<\varepsilon\leqq\delta-B_h$:

$$\begin{aligned}M(g;B_h+\varepsilon)&=M(zf;B_h+\varepsilon)=(B_h+\varepsilon)\,M(f;B_h+\varepsilon)\\&=(B_h+\varepsilon)\,\{M(f;B_h)+\varepsilon\,M(f';B_h+\vartheta\varepsilon)\},\ (0<\vartheta<1)\\&\leqq(B_h+\varepsilon)\,\{1+\varepsilon K_h\}\leqq\delta\,(1+\varepsilon K_h).\end{aligned}$$

Per avere $M(g; B_h + \varepsilon) \leqq 1$ *basta* avere $\delta(1 + \varepsilon K_h) \leqq 1$ cioè basta scegliere ε in guisa che non superi alcuno dei due numeri

$$\frac{1-B_h}{2}, \quad \frac{1-B_h}{1+B_h} \cdot \frac{1}{K_h}$$

e allora è $B_{h+1} \geqq B_h + \varepsilon > B_h$.

3. — Teorema II. *Sia* $0 \leqq \alpha \leqq 1$, *allora*

$$\frac{1}{2+\alpha} \leqq B_0(\alpha) \leqq \frac{1}{1+2\alpha}.$$

Questo si può enunciare anche nel modo seguente:

Sia $0 \leqq \alpha \leqq 1$, $f(z) = \alpha + a_1 z + \ldots \in \overline{F}_0$, *allora*

$$M(f; 1/(2+\alpha)) \leqq 1$$

e, per ogni $\varepsilon > 0$, *esiste una funzione* $f(z) = \alpha + a_1 z + \ldots \in \overline{F}_0$ *tale che* $M(f; 1/(1+2\alpha) + \varepsilon) > 1$.

Questo Teorema II è contenuto nel Teorema V.

Osservazione. — Poichè $1/(1+\alpha)$ e $1/(1+2\alpha)$ decrescono al crescere di α e tendono a $1/3$ risulta

$$B_0 = \operatorname*{Inf}_{\alpha} B_0(\alpha) = 1/3,$$

che è il teorema di H. Bohr-F. Wiener ricordato nel n. 1.

Teorema III. $B_h(\alpha) \to 1-$ per $\alpha \to 1-$ $(h = 1, 2, 3, \ldots)$.

Osservazione. — L'andamento di $B_h(\alpha)$ per $\alpha \to 1-$ è sostanzialmente diverso nei due casi $h = 0$, $h > 0$.

Questo Teorema III è contenuto nel Teorema V.

Teorema IV. *Denotiamo con* b_h *la radice positiva del polinomio in* ξ

$$\varphi_h(\xi) = \xi^{h+1} + \xi - 1 + \frac{1}{4}\,\xi^{h-1}(1-\xi)^2, \quad (h = 1, 2, 3, \ldots);$$

allora è

$$B_h > b_h.$$

In particolare è

$$B_1 > 3/5 = 0{,}6, \quad B_2 > 0{,}674, \quad B_3 > 0{,}720, \quad B_4 > 0{,}753, \ldots.$$

Osservazione: $\varphi_h(0) = -1, \quad \varphi_h(1) = 1,$

$$\varphi_h'(\xi) = (h+1)\,\xi + 1 + \frac{h+1}{4}\,\xi^{h-2}(1-\xi)\left\{\frac{h-1}{h+1} - \xi\right\}$$
$$= (h+1)\,\xi + 1 + \chi(\xi).$$

E' $\chi(\xi) \geqq 0$ per $0 \leqq \xi \leqq (h-1)/(h+1)$; mentre per $(h-1)/(h+1) < \xi < 1$ è $1 - \xi < 2/(h+1)$ e anche $\xi - (h-1)/(h+1) < 2/(h+1)$, pertanto $0 > \chi(\xi) > -\dfrac{\xi^{h-2}}{h+1}$. Si conclude $\varphi_h'(\xi) > 0$ per $0 \leqq \xi \leqq 1$ ed esiste una radice b_h in questo intervallo. La considerazione vale anche per $h = 1$, come si constata direttamente.

Il Teor. I ci dice che $B_h > b_h'$, dove b_h' è la radice positiva del polinomio $\tau(\xi) = \xi^h + \xi - 1$. Si constata facilmente che $b_h > b_h'$; infatti è

$$\varphi_h(\xi) - \tau_h(\xi) = \frac{\xi^{h-1}}{4}\,(1-\xi)\left(\frac{1}{5} - \xi\right) < 0,$$

per $1/5 < \xi < 1$ ed è $b_h' > 1/2$: la radice di $\varphi_h(\xi)$ è maggiore di quella di $\tau_h(\xi)$.

Questo Teorema IV è corollario del seguente:

Teorema V. *Per ogni* $0 \leqq \alpha \leqq 1$ *consideriamo i due polinomi* $(h = 0, 1, 2, 3, \ldots)$

$$\begin{cases} \phi_h(\xi;\, \alpha) = (1 - \alpha - \alpha^2)\, \xi^{h+1} + \alpha\, \xi^h + \xi - 1 \\ \psi_h(\xi;\, \alpha) = (1 - 2\,\alpha^2)\, \xi^{h+1} + \alpha\, \xi^h + \alpha\, \xi - 1 \end{cases}$$

e denotiamo con $\beta_h(\alpha)$ e $\overline{\overline{\beta}}_h(\alpha)$ *rispettivamente la loro radice contenuta nell'intervallo* $0 < \xi < 1$. *Allora è*

$$\beta_h(\alpha) < B_h(\alpha) \leqq \overline{\beta}_h(\alpha), \quad (h = 0, 1, 2, \ldots).$$

Esempio: $0 \cdot 6055 < B_1(1/2) < 0 \cdot 7321$.

Osservazioni. 1) Per $h = 0$ otteniamo

$$\phi_0(\xi;\, \alpha) = (1 - \alpha)\, \{(2 + \alpha)\, \xi - 1\}\,,$$
$$\psi_0(\xi;\, \alpha) = (1 - \alpha)\, \{(1 + 2\,\alpha)\, \xi - 1\}\,.$$

e si deduce il Teor. II.

2) Sia $h \geqq 1$. Esaminiamo il polinomio $\phi_h(\xi;\, \alpha)$:

$$\phi_h(0;\, \alpha) = -1 < 0, \quad \phi_h(1;\, \alpha) = 1 - \alpha^2 \geqq 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_h}{\partial \xi} &= (h+1)\,(1 - \alpha - \alpha^2)\, \xi^h + h\, \alpha\, \xi^{h-1} + 1 \\ &= (h+1)\,(1 - \alpha)\, \xi^h + 1 + \alpha\, \xi^{h-1}\, \{h - (h+1)\, \alpha\, \xi\} \\ &\geqq (h+1)\,(1 - \alpha)\, \xi^h + 1 - \alpha\, \xi^{h-1} \geqq 0. \end{aligned}$$

Esiste una e una sola radice $0 \leqq \beta_h(\alpha) \leqq 1$.

$$\phi_h(\xi;\, \alpha) - \phi_{h+1}(\xi;\, \alpha) = \xi^h (1 - \xi)\, \{(1 - \alpha^2)\, \xi + \alpha (1 - \xi)\} > 0$$

per $0 < \xi < 1$, $0 \leqq \alpha \leqq 1$ e quindi, fissato α, $\beta_h(\alpha)$ risulta crescente al crescere di h.

3) L'equazione $\phi_h(\xi;\, \alpha) = 0$ definisce $\beta_h(\alpha)$ ed è

$$\frac{d \beta_h(\alpha)}{d \alpha} = -\, \frac{\partial \phi_h}{\partial \alpha} : \frac{\partial \phi_h}{\partial \xi}\,.$$

Poiché $\frac{\partial \phi_h}{\partial \xi} > 0$ e $\frac{\partial \phi_h}{\partial \alpha} = \xi^h \{1-(1+2\alpha)\xi\}$ ne segue che $\beta_h(\alpha)$ è minimo per $\xi = 1/(1+2\alpha)$ cioè per $\alpha = (1-\xi)/(2\xi)$. Sostituendo questo valore in $\phi(\xi;\alpha)$ otteniamo

$$\phi(\xi;(1-\xi)/(2\xi)) = \xi^{h+1} + \xi - 1 + \frac{1}{4}(1-\xi)^2 = \varphi_h(\xi)$$

dove $\varphi_h(\xi)$ è il polinomio del Teor. IV: si conclude che $b_h = \operatorname*{Min}_{\alpha} \beta_h(\alpha)$ e il Teor. IV risulta dimostrato come conseguenza di questo Teor. V.

4) Osserviamo che per $h \geqq 1$ e $\alpha \to 1-$ è $\phi_h(\xi;\alpha) \to -(1-\xi)(1-\xi^h)$ e quindi $\beta_h(\alpha) \to 1-$ per $\alpha \to 1-$; risulta dimostrato il Teor. III come conseguenza di questo Teor. V.

5) Sia $h \geqq 1$. Esaminiamo il polinomio $\psi_h(\xi;\alpha)$:

$$\psi_h(0;\alpha) = -1 < 0, \quad \psi_h(1;\alpha) = 2\alpha(1-\alpha) \geqq 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_h}{\partial \xi} &= (h+1)(1-2\alpha^2)\xi^h + h\alpha\xi^{h-1} + \alpha \\ &= (h+1)\xi^{h-1}\{(1-2\alpha^2)\xi + \alpha\} + \alpha(1-\xi^{h-1})\end{aligned}$$

e, poiché per $(0 \leqq \alpha \leqq 1,\ 0 \leqq \xi \leqq 1)$ è $(1-2\alpha^2)\xi + \alpha \geqq 0$ risulta $\frac{\partial \psi_h}{\partial \xi} \geqq 0$, $\psi_h(\xi;\alpha)$ crescente (per ogni α) al crescere di ξ. L'equazione $\psi_h(\xi;\alpha) = 0$ definisce la funzione $\overline{\beta}_h(\alpha)$, ed è $0 < \overline{\beta}_h(\alpha) \leqq 1$.

6) La differenza

$$\phi_h(\xi;\alpha) - \psi_h(\xi;\alpha) = (1-\alpha)\xi(1-\alpha\xi^h)$$

è positiva per $0 \leqq \alpha < 1$, $0 < \xi \leqq 1$ e quindi risulta $\beta_h(\alpha) < \overline{\beta}_h(\alpha)$ per $0 \leqq \alpha < 1$.

4. — *Dimostrazione del Teorema* V. Rimane da dimostrare soltanto il Teor. V, poiché da questo sono stati già dedotti i Teoremi II, III e IV.

Sia $f(z) = \alpha z^h + a_{h+1} z^{h+1} + \ldots \in F_h(\alpha)$; allora sussistono le disuguaglianze (²)

$$(4,1) \qquad |a_n| \leqq 1 - \alpha^2 \quad (n = h+1, h+2, \ldots).$$

Infatti è $f(z) = z^h g(z)$, con $g(z) \in F_0(\alpha)$, ed è $\alpha \leqq 1$: se $\alpha = 1$ è $a_n = 0$ e l'affermazione è evidente. Sia $0 \leqq \alpha < 1$: secondo un'osservazione classica è $|a_{h+1}| \leqq 1 - \alpha^2$ (³). Infatti la funzione

$$w_1 = g_1(z) = \frac{g(z) - \alpha}{1 - \alpha g(z)} = z \left\{ \frac{a_{h+1}}{1 - \alpha^2} + \ldots \right\}$$

è regolare in $|z| < 1$ e appartiene a $\overline{F}_0$ poichè, posto $w = g(z)$, il cerchio $|w| < 1$ si rappresenta sul cerchio $|w_1| < 1$: ne segue che i suoi coefficienti sono tutti in modulo minori o al più eguali a 1 e, in particolare, $|a_{h+1}| \leqq 1 - \alpha^2$. Fissato un qualunque intero k, e posto $\eta = \exp(2\pi i/k)$ teniamo conto che $1^n + \eta^n + \eta^{2n} + \ldots + \eta^{(k-1)n} = k$ oppure $= 0$ secondoché n è multiplo di k oppure no; ne segue che la funzione di $\zeta = z^k$

$$G(\zeta) = \frac{1}{k} \{g(z) + g(\eta z) + \ldots + g(\eta^{k-1} z)\}$$

$$= \alpha + a_{h+k} z^k + a_{h+2k} z^{2k} + \ldots = \alpha + a_{h+k} \zeta + a_{h+2k} \zeta^2 + \ldots$$

come funzione dell'argomento ζ, appartiene a $\overline{F}_0$ e quindi $|a_{h+k}| \leqq 1 - \alpha^2$, per ogni k.

La (4.1) ci dice che, per $0 \leqq u < 1$, è

$$(4.2) \qquad M(f; u) \leqq u^h \{\alpha + \sum_1^{\infty} (1 - \alpha^2) u^n\} = u^h \alpha + \frac{(1-\alpha) u^{h+1}}{1 - u}.$$

(²) Questa osservazione è dovuta a F. WIENER; vedi BOHR, loc. cit. in (¹). Riproduciamo qui la semplice dimostrazione per comodità del lettore.

(³) Vedi per es. L. BIEBERBACH, *Funktionentheorie* II, 2 Aufl., Berlin, 1931 (New York, 1945), p. 139-140.

pertanto, affinché sia $M(f;u) \leqq 1$ è sufficiente avere

$$u^h \alpha + \frac{(1-\alpha)u^{h+1}}{1-u} \leqq 1,$$

cioè $\Phi_h(u;\alpha) \leqq 0$. L'esame della funzione $\Phi_h(\xi;\alpha)$ ci conduce a $\beta_h(\alpha) \leqq B_h(\alpha)$ poiché $B_h(\alpha)$ è l'estremo superiore dei numeri u (dipendente soltanto da h e α).

Per dimostrare che è $B_h(\alpha) \leqq \overline{\overline{\beta}}_h(\alpha)$ basta considerare la seguente funzione (analoga a quella considerata da E. Landau (4))

$$f(z;\alpha) = z^h \frac{\alpha - z}{1-\alpha z} = \alpha z^h - (1-\alpha^2) z^{h+1} - \alpha(1-\alpha^2) z^{h+2} - \dots$$

che è regolare per $|z| < 1/\alpha$: poiché il cerchio $|z| < 1$ si trasforma nel cerchio $|(\alpha - z)/(1-\alpha z)| < 1$, la funzione $f(z;\alpha)$ appartiene a $\mathrm{F}_h(\alpha)$. D'altronde è

$$\begin{aligned} M(f;r) &= \alpha r^h + (1-\alpha^2) r^{h+1} + \alpha(1-\alpha^2) r^{h+2} + \dots \\ &= \alpha r^h + (1-\alpha^2) r^{h+1}/(1-\alpha r). \end{aligned}$$

La condizione $M(f;r) > 1$ equivale a $\psi_h(r;\alpha) > 0$, e ne segue $B_h(\alpha) \leqq \overline{\overline{\beta}}_h(\alpha)$.

Mediante una considerazione supplementare possiamo dimostrare che è $\beta_h(\alpha) < B_h(\alpha)$ (cioè non vale il segno $=$).

Sia $a_{h+1} = -e^{i\vartheta}(1-\alpha^2)$; allora la funzione $f(z) \in \mathrm{F}_h(\alpha)$ ha necessariamente la forma (5)

$$f(z) = z^h \frac{\alpha - e^{i\vartheta} z}{1-\alpha e^{i\vartheta} z} = \alpha z^h - (1-\alpha^2) e^{i\vartheta} z^{h+1} - \alpha(1-\alpha^2) e^{i2\vartheta} z^{h+2} - \dots$$

e quindi $|a_{h+2}| = \alpha(1-\alpha^2) = 1-\alpha^2 - \delta(\alpha)$ con $\delta(\alpha) = (1-\alpha)(1-\alpha^2)$. D'altronde, affinché esista una funzione $f(z) \in \mathrm{F}_h(\alpha)$ con i tre coefficienti iniziali α, a_{h+1}, a_{h+2} è necessario e sufficiente che

(4) Vedi E. Landau, *loc. cit.* in (3), p. 34.

(5) Vedi L. Bieberbach, *loc cit.* in (3), p. 145.

sia $0 \leqq \alpha \leqq 1$, $|a_{h+1}| \leqq 1-\alpha^2$, $\Delta(\alpha, a_{h+1}, a_{h\pm 2}) \geqq 0$ dove Δ è un determinante del 6° ordine, funzione lineare degli argomenti $a_{h+1}, \bar{a}_{h+1}, a_{h+2}, \bar{a}_{h\pm 2}$: ne segue che $|a_{h+1}| \to 1-\alpha^2$ implica $|a_{h+2}| \to 1-\alpha^2-\delta(\alpha)$ uniformemente rispetto a $f(z) \in \mathrm{F}_h(\alpha)$. Pertanto alla (4. 2) si può sostituire la seguente

$$\mathrm{M}(f;\, u) < u^h\, \alpha + \frac{(1-\alpha)u^{h+1}}{1-u} - u^{h+2}\, \varepsilon(\alpha)$$

con $\varepsilon(\alpha) > 0$ abbastanza piccolo. Questa implica $\beta_h(\alpha) < B_h(\alpha)$.

I nostri teoremi non risolvono il problema delle «vere costanti» B_h e neppure quello delle «vere funzioni» $B_h(\alpha)$.

5. — Possiamo enunciare il Teor. V nella forma adatta per le funzioni non normalizzate: in particolare valido per funzioni intere qualsiasi.

Teorema V*. *Sia* $f(z) = a_h z^h + a_{h+1} z^{h+1} + \ldots$ *una qualunque funzione regolare (almeno) per* $|z| \leqq r$ *e poniamo*

$$M(r) = M(f;\, r) = \operatorname*{Max}_{|z| \leqq r} |f(z)|, \quad \alpha = |a_h|\, r^h / M(r).$$

Allora è

$$\mathrm{M}(f;\, \beta_h(\alpha)\,.\, r) \leqq M(f;\, r)$$

e in particolare

$$\mathrm{M}(f;\, \mathrm{b}_h\, r) \leqq M(f;\, r)$$

dove $\beta_h(\alpha)$ *e* b_h *sono definiti nei Teor. V e IV.*

Basta osservare che, posto $z = r\,Z$, la funzione

$$F(Z) = \frac{f(rZ)}{M(r)} = \frac{a_h r^h}{M(r)}\, Z^h + \ldots$$

appartiene a $\mathrm{F}_h(\alpha)$ e a $\overline{\mathrm{F}}_h$.

6. — *Le due funzioni* $M_*(f; r)$, $M^*(f; r)$. Sia $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ e denotiamo con $\{f\}$ la classe delle serie $\varphi(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n$ tali che $|\alpha_n| = |a_n|$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$; la classe $\{f\}$ è individuata da una qualunque funzione φ che le appartiene e dipende soltanto dalla successione $|a_n|$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Sia r minore del raggio di convergenza di $f(z)$ e poniamo

$$M_*(f; r) = \operatorname*{Inf}_{\varphi \in \{f\}} M(\varphi; r), \quad M^*(f; r) = \operatorname*{Sup}_{\varphi \in \{f\}} M(\varphi; r).$$

E' evidente che $M^*(f; r) = \mathrm{M}(f; r)$; questo è il raggio del minimo cerchio contemente *tutte* le curve $\varphi(r e^{i\vartheta})$ $(0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi)$ mentre $M_*(f; r)$ è il raggio del minimo cerchio contenente *qualche* curva $\varphi(r e^{i\vartheta})$: in altri termini, la corona circolare $M_*(f; r) \leqq |z| \leqq M^*(f; r)$ è la minima tale che *per ogni* $\varphi(z) \in \{f\}$ si verificano le due proprietà:

1°) $|\varphi(r e^{i\vartheta})| \leqq M^*(f; r)$ per $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$;

2°) esiste un $\vartheta_0 = \vartheta_0(\varphi)$ tale che $|\varphi(r e^{i\vartheta_0})| \geqq M_*(f; r)$.

Le due funzioni $M_*(f; r)$, $M^*(f; r)$ sono ambedue crescenti al crescere di r: il Teor. V* ci dice che

Se $f(z) \in \overline{\mathrm{F}}_h$ è $M^*(f; b_h r) < M_*(f; r)$.

Se $f(z) \in \mathrm{F}_h(\alpha)$ è $M^*(f; B_h(\alpha) \,.\, r) < M_*(f; r)$.

L' estremo superiore $A(r)$ dei numeri (non negativi) γ tali che $M^*(f; \gamma r) \leqq M_*(f; r)$ dipende, oltre che da r, anche dalla successione $|a_0|$, $|a_1|$, $|a_2|$, ... I numeri b_h e $B_h(\alpha)$ sono dei valori minoranti di $A(r)$ corrispondente a classi $\{f\}$ evidenti.