SOBRE LA NO REDUCIBILIDAD DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES PROVENIENTES DE LAS ECUACIONES DE MALLA DE CIRCUITOS ELECTRICOS

por ALFREDO ROJAS LAGARDE, Buenos Aires (Argentina)

1) *Introducción.*

Sea un sistema de m ecuaciones diferenciales lineales con m funciones incógnitas:

$$(1)\begin{cases} \sum_{l=1}^{m} (L_{jl} Q_l'' + R_{jl} Q_l' + S_{jl} Q_l) = E_j & j = 1, 2, \ldots, u \\ \sum_{l=1}^{m} (R_{hl} Q_l' + S_{hl} Q_l) = E_h & h = u+1, u+2, \ldots, u+v \\ \sum_{l=1}^{m} (S_{kl} Q_l) = E_k & k = u+v+1, \ldots, m. \end{cases}$$

Se dice que este sistema es no reducible cuando:

$$D = \begin{vmatrix} I_{jl} \\ R_{hl} \\ S_{kl} \end{vmatrix} \neq 0.$$

La no reducibilidad de un sistema del tipo descripto garantiza la posibilidad de resolverlo por métodos operacionales.

Ya ha sido demostrado (1) que pueden disponerse las ma-

(1) E. FUBINI GHIRON, *Sopra alcuni procedimenti di calcolo operazionale.* Rendiconti del Cercolo Matemático di Palermo; tomo LXI, 1937, págs. 1 a 42.

llas de un circuito sin inductancia mutua de manera tal que el sistema de ecuaciones de malla resultante sea no reducible. Se demostrará a continuación que dicha conclusión puede extenderse a circuitos con inductancias mutuas no perfectas, es decir, teniendo en cuenta la reactancia de dispersión de las mismas.

2) *Recorridos independientes.*

Asignemos a cada rama del circuito eléctrico en consideración una cierta tensión $e_1 e_2 \ldots e_i \ldots e_n$ con un cierto sentido arbitrario.

Tracemos un grupo de recorridos cerrados pasando de rama en rama y numerémoslos $1, 2, \ldots, r, \ldots, m$. A cada uno de estos recorridos le asignaremos un sentido positivo arbitrario.

Introduzcamos los coeficientes a_{ir} tales que:

$a_{ir}=0$ si la rama i no pertenece al recorrido r

$a_{ir}=1$ si la rama i pertenece al recorrido r y el sentido de e_i es opuesto al del recorrido

$a_{ir}=-1$ si la rama i pertenece al recorrido r y el sentido de e_i es opuesto al del recorrido

Escribamos las siguientes ecuaciones de tensión (una por cada recorrido trazado):

$$\begin{cases} a_{11}\, e_1 + a_{21}\, e_2 + \ldots + a_{r1}\, e_r + \ldots + a_{n1}\, e_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1s}\, e_1 + a_{2s}\, e_2 + \ldots + a_{rs}\, e_r + \ldots + a_{ns}\, e_n = 0. \end{cases}$$

Si todas estas ecuaciones son independientes entre sí, diremos que los s recorridos considerados son independientes entre sí.

3) Supóngase tener las ecuaciones de tensión de un grupo de recorridos:

$$(2) \quad \begin{cases} a_{11}\, e_1 + a_{21}\, e_2 + \ldots + a_{i1}\, e_i + a_{j1}\, e_j + \ldots + a_{n1}\, e_n = 0 \\ a_{12}\, e_1 + a_{22}\, e_2 + \ldots + a_{i2}\, e_i + a_{j2}\, e_j + \ldots + a_{n2}\, e_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1i}\, e_1 + a_{2i}\, e_2 + \ldots + a_{ii}\, e_i + a_{ji}\, e_j + \ldots + a_{ni}\, e_n = 0 \\ a_{1j}\, e_1 + a_{2j}\, e_2 + \ldots + a_{ij}\, e_i + a_{jj}\, e_j + \ldots + a_{nj}\, e_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1s}\, e_1 + a_{2s}\, e_2 + \ldots + a_{is}\, e_i + a_{js}\, e_j + \ldots + a_{ns}\, e_n = 0 \end{cases}$$

Empezaremos probando que para que los recorridos en cuestión sean independientes entre sí, es necesario que $s \leqq n$.

En efecto, en un sistema con menos incógnitas que ecuaciones, si éstas son compatibles entre sí no pueden ser todas independientes, y en nuestrocaso es evidente que por razones físicas todas las ecuaciones de tensión que podamos deducir de recorridos cerrados son forzosamente compatibles.

Probaremos en segundo lugar que si los recorridos de los cuales se dedujo el sistema (2) no son independientes entre sí, existen s números *enteros* y no todos nulos $k_1, k_2, \ldots, k_s$ tales que:

$$k_1 a_{p1} + k_2 a_{p2} + \ldots + k_s a_{ps} = 0 \qquad p = 1, 2, \ldots, n.$$

Supongamos que haya i coeficientes no nulos, es legítimo suponer que estos i coeficientes corresponden a las i primeras ecuaciones del sistema (2).

Por lo tanto $k_1, k_2, \ldots, k_i$ son proporcionales a los adjuntos o cofactores de la primera columna del determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \ldots a_{i1} \\ a_{12} & a_{22} \ldots a_{i2} \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{1i} & a_{2i} \ldots a_{ii} \end{vmatrix}.$$

Como todos los elementos de este determinante son 1, 0, o -1, resulta que esos adjuntos son todos números enteros.

4) Supongamos que en un circuito, una parte del mismo esté relacionado con el resto únicamente por uno o varios acoplamientos inductivos. A dicha parte del circuito total la llamaremos subcircuito.

Tenemos, pues, que un circuito está formado por uno o más subcircuitos.

Evidentemente, nada cambiará en el comportamiento del circuito si establecemos *una* sola conexión metálica entre subcircuitos. Si el número de subcircuitos era q, se establecerán $q-1$ de estas conexiones. El número total de ramas se verá, pues, aumentado en $q-1$, pero el número máximo de recorridos independientes no sufrirá cambio alguno. En lo sucesivo trabajaremos únicamente con el circuito así reformado.

5) Supóngase tener trazados en el circuito un grupo de re-

corridos. Escribamos las ecuaciones de tensión correspondientes a dichos recorridos, obtendremos así un sistema del tipo del (2). Multipliquemos las ecuaciones de dichos sistema por enteros $k_1, k_2, \ldots, k_s$ respectivamente y sumemos.

Probaremos que la ecuación resultante es la ecuación de tensión de un recorrido cerrado.

Tomemos un nodo correspondiente al primer recorrido al que llamaremos «nodo base» y describamos este primer recorrido un número de veces igual a k_1 (si k_1 es negativo, lo haremos en sentido inverso al asignado al recorrido) volviendo así al nodo base. Luego vamos a un nodo cualquiera del segundo recorrido por un camino cualquiera, lo cual es siempre posible gracias a las conexiones de que hablamos en el párrafo anterior; describimos este segundo recorrido k_2 veces y luego volvemos al nodo base por el mismo camino por el que fuimos. Haciendo el mismo trabajo con cada uno de los recorridos considerados queda probado lo propuesto.

6) Supóngase tener un recorrido cerrado cualquiera que pase por las ramas $i, j, \ldots, l,$ pero que al escribir la ecuación de tensión de dicho recorrido, las tensiones $e_i, e_j, \ldots, e_l,$ no aparezcan en ella. Evidentemente la única manera de que esto suceda es que dicho recorrido pase por cada una de las ramas $i, j, \ldots, l,$ un número de veces «de ida» igual al número de veces que pasa «de vuelta».

Probaremos a continuación que dado el caso anterior, o bien existe un recorrido cerrado que tiene la misma ecuación que el anteriormente considerado y que no pasa para nada por las ramas $i, j, \ldots, l,$ o bien existe una relación lineal entera de varios recorridos cerrados, ninguno de los cuales pasa por las ramas $i, j, \ldots, l.$

Tomemos un nodo cualquiera de la rama i y llamémoslo N. Si por N y «hacia i» pasa el recorrido primitivo k veces, por N y «desde i» pasa el mismo recorrido primitivo el mismo número k de veces. Reformemos el recorrido primitivo de manera tal que cada vez que toque a N «en camino hacia i», en vez de seguir por i, el nuevo recorrido siga por alguno de los caminos que «venían de i hacia N». Por otra parte, los caminos que «venían por i hacia N» se cerrarán por los caminos que «iban de N hacia i» (ida y vuelta por i). Haciendo el mismo trabajo con cada uno de los nodos de las ramas de

$i, j, \ldots, l$, obtenemos finalmente lo enunciado más una serie de «idas» y un número igual de «venidas» en cada una de las ramas $i, j \ldots l$, lo cual puede despreciarse.

7) Se puede probar que [2]:

a) Trazando todos los recorridos independientes posibles en un circuito con inductancia y/o inductancia mutua no perfecta en todas sus ramas, y escribiendo las ecuaciones de malla correspondientes a dichos recorridos, obtendremos un sistema de u ecuaciones con u incógnitas no reducible.

b) haciendo lo propio con circuitos que tengan únicamente resistencias y/o capacitancias en todas sus ramas se llega a la misma conclusión del caso anterior.

8) Consideremos un circuito cualquiera en el cual las inductancias mutuas que puede haber no son perfectas. Dibujemos sobre el circuito todos los recorridos independientes entre sí posibles que pasen por capacitancias únicamente. Dibujemos a continuación todos los recorridos independientes entre sí y con los ya considerados y que pasen por ramas con resistencia y/o resistencia y capacitancias. Por último, tracemos todos los recorridos posibles restantes independientes entre sí y con los previamente considerados; evidentemente cada uno de estos últimos recorridos tendrá por lo menos una inductancia o inductancia mutua.

Escribiendo las ecuaciones de malla correspondientes a estos recorridos obtendremos un sistema de m ecuaciones con m incógnitas del tipo del (1).

Escribamos el determinante D de este sistema en forma detallada:

$$D = \begin{vmatrix}
L_{11} & \cdots\cdots & L_{u1} & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
L_{1u} & \cdots\cdots & L_{uu} & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\
R_{1,u+1} & \cdots & R_{u,u+1} & R_{u+1,u+1} & \cdots\cdots & R_{u+v,u+1} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
R_{1,u+v} & \cdots & R_{u,u+v} & R_{u+1,u+v} & \cdots\cdots & R_{u+v,u+v} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\
S_{1,u+v+1} & \cdots & S_{u,u+v+1} & S_{u+1,u+v+1} & \cdots & S_{u+v,u+v+1} & S_{u+v+1,u+v+1} & \cdots & S_{m,u+v+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
S_{1,m} & \cdots\cdots & S_{u,m} & S_{u+1,m} & \cdots\cdots & S_{u+v,m} & S_{u+v+1,m} & \cdots\cdots & S_{m,m}
\end{vmatrix}$$

(2) Fubini Ghiron, obra citada anteriormente.

Si ponemos:

$$D_L = \begin{vmatrix} L_{11} \cdots L_{u,1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_{1,u} \cdots L_{u,u} \end{vmatrix}; \quad D_R = \begin{vmatrix} R_{u+1,u+1} \cdots R_{u+v,u+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R_{u+1,u+v} \cdots R_{u+v,u+v} \end{vmatrix};$$

$$D_S = \begin{vmatrix} S_{u+v+1,u+v+1} \cdots S_{m,u+v+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_{u+v+1,m} \;\cdots\cdots\; S_{m,m} \end{vmatrix}$$

Entonces $D = D_L\, D_R\, D_S$.

Para probar que $D \neq 0$ cuando se toman los recorridos de de la manera indicada más arriba se probará sucesivamente que:

$$D_L \neq 0 \qquad\qquad D_R \neq 0 \qquad\qquad D_S \neq 0$$

a) $D_L \neq 0$.

Supóngase que en el circuito dado se reemplacen todas las resistencias y capacitancias por corto circuitos. Designaremos al circuito primitivo por C y al circuito que resulta de hacer la maniobra recién indicada por C_L. Según es obvio, ninguna malla que en C tenía inductancia o inductancia mutua desaparecerá al pasar de C a C_L.

Supongamos que escribamos ahora las ecuaciones de malla C_L sobre los recorridos que provienen de los recorridos trazados sobre C cuando C pasa a C_L. Evidentemente, el determinante del sistema de ecuaciones de malla de estos recorridos es D_L.

Si D_L resultara nulo, esto supondría que los recorridos de C_L considerados no son independientes (párrafo 7).

Si en C existen p ramas con inductancia y/o inductancia mutua y el número de mallas consideradas es u, tenemos que:

$$\{\sum_{j=1}^{p} a_{j_r}\, e_j = 0 \qquad r = 1, 2 \ldots u$$

y como los recorridos correspondientes a estas ecuaciones no son independientes, podemos decir (párrafo 3) que existen u números $k_1, k_2 \ldots k_u$ no todos nulos tales que:

$$(3) \qquad \sum_{r=1}^{u} k_r \sum_{j=1}^{p} a_{j_r}\, e_j = 0.$$

Escribamos a continuación las ecuaciones de tensión a lo largo de los recorridos de C que se transformaban en los recorridos de C_L al reemplazar a las resistencias y los condensadores de C por corto circuitos. Lógicamente, algunos de estos recorridos presentarán R y/o S además de L y/o M. Además el número de ramas habrá aumentado de p a q

$$\{\sum_{j=1}^{q} a_{j_r} e_j = 0 \qquad r = 1, 2 \ldots u.$$

Estas ecuaciones son independientes entre sí por hipótesis. Como entre las q ramas de este circuito figuran las p del anterior, podemos escribir este último sistema de la siguiente manera:

$$\{\sum_{i=1}^{p} a_{j_r} e_j + \sum_{j=p+1}^{q} a_{j_r} e_j = 0 \qquad r = 1, 2 \ldots m.$$

Multiplicando sucesivamente las u ecuaciones de este sistema por los factores $k_1, k_2 \ldots k_u$ de que hablamos más arriba y sumando obtendremos:

$$\sum_{r=1}^{u} k_r \sum_{j=1}^{p} a_{j_r} e_j + \sum_{r=1}^{u} k_r \sum_{j=p+1}^{q} a_{j_r} e_j = 0.$$

Como según vimos anteriormente en (3) la 1ra. mitad del 1er. miembro es nula, obteniéndose así:

$$\sum_{r=1}^{u} k_r \sum_{j=p+1}^{q} a_{j_r} e_j = 0.$$

Esta expresión ha sido obtenida multiplicando por números enteros un grupo de ecuaciones de malla y sumando. Por lo visto en el párrafo 5 tenemos que dicha expresión es la ecuación de un cierto recorrido cerrado, y como en ella no aparece ningún e correspondiente a las ramas con inductancia por las cuales pasa el recorrido; tenemos, por lo visto en el párrafo 6, que la susodicha expresión también puede ser considerada como la ecuación de un recorrido sin inductancia o como una combinación lineal entera de recorridos sin inductancia.

Como las ecuaciones de malla de C son independientes entre sí por hipótesis, tenemos que dicho recorrido o recorridos sin inductancia no pueden ser consecuencias de las ecuaciones de malla primitivas sin inductancia, es decir que al suponer $D_L = 0$ hemos contradicho la hipótesis de trazar todos los recorridos posibles sin inductancia antes de empezar a trazar recorridos con inductancia. Por lo tanto:

$$D_L \neq 0.$$

b) $D_R \neq 0$.

Reemplazando todas las inductancias e inductancias mutuas por circuitos abiertos y las capacitancias por cortos, se demuestra por un procedimiento análogo al del caso anterior que $D_R \neq 0$.

c) $D_S \neq 0$.

Reemplazando todas las inductancias, inductancias mutuas y resistencias por circuitos abiertos y siguiendo un procedimiento análogo al seguido en a) se demuestra que:

$$D_S \neq 0.$$