LOS TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL HOMOMORFISMO PARA GRUPOIDES

por A. E. SAGASTUME BERRA, La Plata (Argentina)

RESUMEN: Se generaliza al caso de los grupoides, los teoremas sobre homomorfismo, conocidos en teoría de los grupos. En este caso, un subgrupo normal N de un grupo G tiene estas propiedades esenciales: por una parte cada cogrupo a izquierda xN coincide con uno a derecha Nx, lo que trae como consecuencia que el producto de dos cogrupos es otro cogrupo y permite definir el grupo factor G/N, homomorfo a G; por otra parte, los cogrupos dan una partición de G, lo que permite transformar todo homomorfismo $G \to \Gamma$ en un isomorfismo $G/N \cong \Gamma$. Para los grupoides, ambas propiedades se presentan separadas: puede demostrase el homomorfismo $G \to G/N$, pero los cogrupoides no dan en general una partición de G; y dado por otra parte un homomorfismo H entre G y Γ, puede hallarse una partición de G cuyas clases forman un nuevo grupoide $G/H \cong \Gamma$. Esto da los dos primeros teoremas fundamentales, los que se hallan vinculados entre sí (3er. teorema). Finalmente (4º teorema) se generaliza, para los grupoides el conocido teorema

$$(G/N)/(G'/N) \cong G/G'.$$

1. *Introducción.* — Por el término *grupoide* entendemos aquí un conjunto $G = \{a, b, c, \ldots\}$ entre cuyos elementos está definida una operación de *producto,* que indicaremos con las notaciones usuales, y que verifica:

*G*1. Dados $a, b \in G$, está unívocamente determinado $c = ab \in G$;

*G*2. El producto es asociativo: cualesquiera sean $a, b, c \in G$, se tiene $a \,.\, bc = ab \,.\, c$.

Agregaremos también

*G*3. Existe un *elemento unidad* 1 tal que, cualquiera sea $a \in G$, se tiene $1a = a1 = a$;

*G*4. Existe un *cero* 0, tal que, cualquiera sea $a \in G$, se tiene $0a = a0 = 0$.

Como es sabido, la propiedad asociativa $G2$ se extiende por inducción a cualquier número de elementos; de modo que, dados $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$, en ese orden, queda unívocamente determinado un *producto* $p = a_1 a_2 \ldots a_n$, el mismo cualquiera sea la forma de agrupar los factores.

Es conocida asimismo la demostración de que *la unidad y el cero son únicos*. En verdad, $G3$ y $G4$ han sido incluídos solo para simplificar la exposición, pues en todo caso siempre sería posible adjuntar un 1 y un 0 a un grupoide que no los tuviese, y aún podemos decir más: en el caso del producto *conmutativo* (en cuyo caso el grupoide se llama *ovum*, plural *ova* (¹)), existe una extensa categoría (los llamados *ova reducidos u holoides* (²)) que admiten necesariamente un cero.

Si A, B son *complejos* (subconjuntos no vacíos) de un grupoide G, indicamos, como es costumbre, con AB el complejo de elementos ab, con $a \in A$ y $b \in B$. Es claro que este producto es asociativo (y conmutativo en los ova), como el de elementos. En particular, si a es un elemento, escribiremos aB o Ba en lugar de $\{a\}$B o B$\{a\}$ respectivamente.

2. *Homomorfismo e isomorfismo. Primer teorema fundamental.* — Si además de $G = \{1, a, b, \ldots\}$ tenemos otro grupoide $\Gamma = \{\varepsilon, \alpha, \beta, \ldots\}$, éste se dice *homomorfo* a G, y se escribe $G \longrightarrow \Gamma$, cuando existe una correspondencia unívoca $1 \longrightarrow \varepsilon$, $a \longrightarrow \alpha$, $b \longrightarrow \beta, \ldots$ que conserva los productos; es decir que $ab \longrightarrow \alpha\beta$, cualesquiera sean a, b. Supondremos para fijar ideas, que la correspondencia es *sobre* Γ, es decir, que cada $\xi \in \Gamma$ es imagen, en la correspondencia dada, de un $x \in G$ por lo menos. *Si* $1 \longrightarrow \varepsilon$, ε *es la unidad de* Γ; *y si* $0 \longrightarrow \zeta$, ζ *es el cero de* Γ. Ambas afirmaciones se demuestran de inmediato. De igual modo, *a elementos inversos (si existen) corresponden también elementos inversos*; esto es, $xx' = 1$, $x \longrightarrow \xi$, $x' \longrightarrow \xi' \Rightarrow$ (*implica*) $\xi\xi' = \varepsilon$.

Si entre G y Γ hay un homomorfismo que al mismo tiempo sea *biunívoco*, entonces Γ se dice *isomorfo* a G y se escribe $G \cong \Gamma$. Esta es una relación de equivalencia: es evidente que es reflexiva ($G \cong G$, isomorfismo idéntico, por ejemplo)

(¹) Denominación introducida por A. R. Poole, *Finite Ova*, American J. of Math., *59*, (1937), p. 23-32.

(²) Cf. P. Dubreil, *Algèbre*, Paris (1946), t. I, p. 38.

y transitiva ($G \cong \Gamma, \Gamma \cong \Gamma' \Rightarrow G \cong \Gamma'$; más generalmente $G \longrightarrow \Gamma$, $\Gamma \longrightarrow \Gamma' \Rightarrow G \longrightarrow \Gamma'$); pero también es simétrica. Pues está definida la correspondencia inversa, unívoca, $1 \longleftarrow \varepsilon, a \longleftarrow \alpha, b \longleftarrow \beta, \ldots$ y también conserva los productos; pues de $c \longleftarrow \alpha\beta$ y $ab \longrightarrow \alpha\beta$ resulta $c = ab$ y $ab \longleftarrow \alpha\beta$ también.

Sea ahora N un subgrupoide de G que contenga la unidad 1 (la cual, por supuesto, será unidad también de N). Para cada $a \in G$ podemos llamar *cogrupoide a izquierda* (*a derecha*) determinado por a, al complejo aN (Na respectivamente), o sea a la clase de elementos an (na) donde n recorre N. Se sobreentiende que tales cogrupoides se dirán, si es necesario, formados en G y respecto a N.

Como en los grupos, es importante el caso en que *todo cogrupoide a izquierda coincide con el correspondiente cogrupoide a derecha y viceversa.* Entonces N se llama subgrupoide *normal.* Así pues,

$$x\,\mathrm{N} = \mathrm{N}\,x \qquad (2.1)$$

para todo $x \in G$, caracteriza a N como subgrupoide normal, en cuyo caso escribiremos $\mathrm{N} \leqq \mathrm{G}$. La (2.1) significa que dado un n (un n_1) en N, queda determinado un n_1 (un n) tal que $xn = n_1x$; y esto para cada $x \in G$.

Para un subgrupoide normal no tenemos, pues, que distinguir entre cogrupoides a derecha o a izquierda. Indicaremos, pues, con $\bar{a}$ el cogrupoide $a\,\mathrm{N} = \mathrm{N}\,a$ (en particular $\bar{1} = \mathrm{N}$). Se verifica ahora la importante propiedad:

$$a' \in \bar{a}, \quad b' \in \bar{b} \Rightarrow a'b' \in \overline{ab} \qquad (2.2),$$

pues $a' \in \bar{a}$ significa $a' = na$ con $n \in \mathrm{N}$; análogamente $b' = n_1 b$; de donde, utilizando (2.1): $a'\,b' = na\,n_1\,b = na\,.\,bn_2 = n\,.\,ab\,.\,n_2 = = nn_3\,.\,ab = n_4\,.\,ab$,, con $n_1, \ldots, n_4 \in N$; y esto expresa que $a'\,b' \in \mathrm{N}\,.\,ab = ab\,.\,\mathrm{N} = \overline{ab}$.

En base a (2.2) es lícito definir el *producto de cogrupoides*

$$\bar{a}\,.\,\bar{b} = \overline{ab} \qquad (2.3)$$

y entonces el conjunto $\bar{\mathrm{G}} = \{\bar{1}, \bar{a}, \bar{b}, \ldots\}$ de los cogrupoides es evidentemente un nuevo grupoide, que llamaremos el *grupoide-*

factor o *grupoide-factorial* de G respecto a N e indicaremos con G/N. Además, la correspondencia $1 \to \overline{1}$, $a \to \overline{a}$, $b \to \overline{b}, \ldots$ es homomorfa, y hemos obtenido el

Primer teorema fundamental del homomorfismo: Dado un subgrupoide normal N *de* G, *poniendo* $\overline{1} = \mathrm{N}$, $\overline{a} = a\mathrm{N} = \mathrm{N}a$, $\overline{b} = b\,N = \mathrm{N}\,b, \ldots$, *se verifica* (2. 2) *y los elementos* $1, a, \overline{b}, \ldots$ *constituyen, según* (2. 3), *un grupoide-factor* $\overline{\mathrm{G}} = \mathrm{G}/\mathrm{N}$, *homomorfo a* G.

Nótese que, a diferencia del caso de los grupos, las clases $\overline{1}, \overline{a}, \overline{b}, \ldots$ pueden tener elementos comunes. En otros términos, la relación «a' pertenece a la clase de a», no es una equivalencia. Pues ella significa $a' = an$ con $n \in \mathrm{N}$; relación que si bien es reflexiva (por ser $1 \in \mathrm{N}$) y transitiva (por ser N un subgrupoide normal) *no es simétrica:* ella no implica $a = a'\,n'$ con $n' \in \mathrm{N}$.

3. *Segundo y tercer teoremas fundamentales.* — Supongamos ahora, recíprocamente, tener un grupoide $\Gamma = \{\varepsilon, \alpha, \beta, \ldots\}$, homomorfo a $\mathrm{G} = \{1, a, b, \ldots\}$ en un homomorfismo H. En lugar de la notación $1 \to \varepsilon$, $a \to \alpha$, $b \to \beta, \ldots$ para tal homomorfismo, usaremos cuando convenga, la más expresiva $1^H = \varepsilon$, $a^H = \alpha$, $b^H = \beta, \ldots$; es decir, en general, para cada $x \in \mathrm{G}$, x^H indicará el elemento de Γ que le corresponde en el homomorfismo dado H. Indicaremos también simbólicamente con $\alpha^{H^{-1}}$ para un dado $\alpha \in \Gamma$, la clase $\bar{\bar{a}}$ de todos los elementos $a \in \mathrm{G}$ tales que $a^H = \alpha$. La clase $\alpha^{H^{-1}} = \bar{\bar{a}}$ es un complejo (no es nunca vacía) pues por hipótesis H es una aplicación de G sobre Γ.

En particular, es inmediato que, si ε es la unidad de Γ, el conjunto $\mathrm{E} = \overline{1} = \varepsilon^{H^{-1}}$ es un subgrupoide que contiene al 1 (aunque no necesita ser normal, como enseguida veremos) y tiene las propiedades

$$\mathrm{E}\,a \subseteq \bar{\bar{a}}, \quad a\,\mathrm{E} \subseteq \bar{\bar{a}} \tag{3. 1}$$

para todo $\bar{\bar{a}}$. En efecto, si $a \in \alpha^{H^{-1}}$, $e \in \varepsilon^{H^{-1}}$, se tiene:

$$a' \in \mathrm{E}\,a \Rightarrow a' = ea \Rightarrow a'^H = e^H\,a^H = \varepsilon\,\alpha = \alpha \Rightarrow a' \in \alpha^{H^{-1}} = \bar{\bar{a}}.$$

$$a' \in a\,\mathrm{E} \Rightarrow a' = ae \Rightarrow a'^H = a^H\,e^H = \alpha\,\varepsilon = \alpha \Rightarrow a' \in \alpha^{H^{-1}} = \bar{\bar{a}}.$$

Que E no sea necesariamente normal lo prueba el

Ejemplo 1: G:

	1	a	b	0
1er. factor	a	a	a	0
	b	b	b	0
	0	0	0	0

Γ:

ε	ζ
ζ	ζ

$$H: \qquad 1^H = a^H = b^H = \varepsilon, \quad 0^H = \zeta.$$

Es fácil comprobar que G, Γ son grupoides y H un homomorfismo. Aquí $E = \{1, a, b\}$ y, p. ej., $a\mathrm{E} = \{a\}$, $\mathrm{E}a = \{a, b\}$, así que E no es normal.

Volviendo a nuestra exposición: es claro en cambio que cada $a \in \mathrm{G}$ pertenece a una, y solo una, de las clases $\bar{a}$, y éstas constituyen una *partición* de G en complejos sin elementos comunes. Sea $1, a, b, \ldots$ un sistema completo de representantes, es decir, que $\mathrm{G} = \bar{1} + \bar{a} + \bar{b} + \ldots$ (suma de conjuntos sin elementos comunes). Entonces entre $\bar{\mathrm{G}} = \{\bar{1}, \bar{a}, \bar{b}, \ldots\}$ y $\Gamma = \{\varepsilon, \alpha, \beta, \ldots\}$ podemos establecer la siguiente correspondencia I: si $a \in \bar{a}$ y $a^H = \alpha$, ponemos $\bar{a}^I = \alpha$. Naturalmente, I es independiente del elemento a que elijamos en $\bar{a}$, y solo depende de la clase $\bar{a}$, y además, $\bar{a} \neq \bar{b}$ implica $\bar{a}^I \neq \bar{b}^I$, es decir, la correspondencia es biunívoca. Por último, puesto que

$$a' \in \bar{a} = \alpha^{H^{-1}}, \; b' \in \bar{b} = \beta^{H^{-1}} \Rightarrow (a' b')^H = a'^H b'^H = \alpha\, \beta,$$

se cumple la (2.2), se puede escribir $(\overline{ab})^I = \bar{a}^I \,.\, \bar{b}^I$ y la correspondencia *I es un isomorfismo* $\bar{\mathrm{G}} \cong \Gamma$.

No hay que confundir nuestro actual grupoide $\bar{\mathrm{G}}$ con el grupoide-factor definido en el § 2, puesto que E puede no ser normal, y aunque lo fuera, en alguna de las relaciones (3.1) puede valer el signo $\subset$. Puesto que nuestro $\bar{\mathrm{G}}$ actual está determinado por el homomorfismo H, lo designaremos como el *grupoide de restos módulo H*, o el *grupoide módulo H* (sobreentendiendo, de G) y lo indicaremos con la notación G/H. Cada elemento $\bar{a}$ de G/H, o *clase módulo H* será, según (3.1), una reunión de cogrupoides Ea o aE. Y tenemos el

Segundo teorema fundamental del homomorfismo: *Dado un homomorfismo H entre dos grupoides, $\mathrm{G} \rightarrow \Gamma$, las clases $\bar{1}, \bar{a}, \bar{b}, \ldots$ módulo H, o sea las clases de elementos de G que tienen la misma imagen en H, constituyen el* grupoide módulo *H*, G/H, *que es isomorfo a Γ en la correspondencia I definida así: $\bar{a}^{I} = \alpha$ si $\bar{a} = \alpha^{H^{-1}}$.*

En otros términos: *todo homomorfismo H de Γ con* G, *se transforma en un isomorfismo I de Γ con el grupoide* módulo H, G/H.

El subgrupoide $\mathrm{E} = \bar{1}$ de este teorema, que es en general el único cogrupoide que coincide con una clase módulo H y está unívocamente determinado por este homomorfismo, se puede llamar el *núcleo* de H. Lo indicaremos con $\mathrm{E}(H)$. Asimismo, el homomorfismo $\mathrm{G} \rightarrow \mathrm{G}/\mathrm{N}$ del primer teorema, determinado unívocamente por el subgrupoide normal N, se indicará con $H(\mathrm{N})$. Utilizando estas notaciones, tenemos ahora el

Tercer teorema fundamental del homomorfismo: Si N *es normal, también lo es* $\mathrm{E}(\mathrm{H}(\mathrm{N}))$ *y se tiene*

$$\mathrm{E}(\mathrm{H}(\mathrm{N})) = \mathrm{N} \tag{3.2}$$

Dem.: Dado el subgrupoide normal N, podemos tomar $\Gamma = \mathrm{G}/\mathrm{N}$ y aplicar el primer teorema: $\mathrm{G} \rightarrow \Gamma$ en el homomorfismo $H(\mathrm{N})$. Aplicaremos ahora el segundo teorema. Para hallar el núcleo $\mathrm{E}(\mathrm{H}(\mathrm{N}))$, observemos que no es sino la clase de los elementos de G que en el homomorfismo $H(\mathrm{N})$ tienen por imagen el elemento unidad $\varepsilon = \mathrm{N}$ de Γ. Pero estos son precisamente todos y solos los de N. Así, se verifica (3.2) y $\mathrm{E}(\mathrm{H}(\mathrm{N}))$ es normal, c. q. d.

En cambio: $H(\mathrm{E}(H))$ no coincide en general con H, ni aún en el caso conmutativo, es decir, cuando los grupoides son *ova* (§ 1), como vemos en el

Ejemplo 2: O:

1	a	b	c	0
a	a	a	a	0
b		b	a	0
c			c	0
0				0

Ω:

ε	α	β	ζ
α	α	α	ζ
β		β	ζ
ζ			ζ

Se han usado las notaciones O, Ω (en lugar de G, Γ) para hacer resaltar que se trata de ova. Por igual razón, basta dar la mitad de las tablas de multiplicación; la otra mitad queda determinada por la ley conmutativa.

Es fácil comprobar que si definimos

$$1^H = \varepsilon, \quad \mathfrak{a}^H = \mathfrak{b}^H = \alpha, \quad \mathfrak{c}^H = \beta, \quad \mathfrak{C}^H = \zeta,$$

H es un homomorfismo $O \rightarrow \Omega$. Su núcleo es $\mathrm{E}(H) = \{1\}$ y en consecuencia, $H(\mathrm{E}(H))$ es el homomorfismo $O \rightarrow O/\{1\} = O$, o sea, el automorfismo idéntico. Sin embargo, H no es un isomorfismo.

4. *El último teorema fundamental.* — Para los grupos, se sabe que si $\mathrm{N} \subseteq \mathrm{G}' \subseteq \mathrm{G}$ siendo N, G' normales en G (por lo tanto también en G'), entonces G'/N es subgrupo normal de G/N, y se verifica $(\mathrm{G}/\mathrm{N})/(\mathrm{G}'\,\mathrm{N}) \cong \mathrm{G}/\mathrm{G}'$. Esto se generaliza para los grupoides, como ahora veremos, sin descartar por ello que puedan ensayarse otras generalizaciones.

Cuarto teorema fundamental: Sea $\mathrm{N} \subseteq \mathrm{G}' \subseteq \mathrm{G}, \mathrm{G}' \leqq \mathrm{G}$ *(notación introducida en el* § 2), $\mathrm{N} \leqq \mathrm{G}$ *y por tanto* $\mathrm{N} \leqq \mathrm{G}'$ *también. Entonces* $\overline{\mathrm{G}}' = \mathrm{G}'/\mathrm{N}$ *es subgrupoide normal de* $\overline{\mathrm{G}} = \mathrm{G}/\mathrm{N}$ *y se verifica* $\overline{\mathrm{G}}/\overline{\mathrm{G}}' \cong \mathrm{G}/\mathrm{G}'$.

Dem.: a) Indiquemos con x el elemento genérico de G y con x' el de G'. Observemos que entonces

$$\overline{\mathrm{G}} = \mathrm{G}/\mathrm{N} = \{x\,\mathrm{N}\}, \quad \overline{\mathrm{G}}' = \mathrm{G}'/\mathrm{N} = \{x'\,\mathrm{N}\},$$

es decir, $x\,\mathrm{N}$ es el elemento genérico de $\overline{\mathrm{G}}$, y $x'\,\mathrm{N}$ el de $\overline{\mathrm{G}}'$. Puesto que toda $x' \in \mathrm{G}$ también, es claro que $\overline{\mathrm{G}}'$ es subgrupoide de $\overline{\mathrm{G}}$. Que sea subgrupoide normal resulta así: el cogrupoide genérico $x\,\mathrm{N} \,.\, \overline{\mathrm{G}}'$ de $\overline{\mathrm{G}}'$ en $\overline{\mathrm{G}}$ se compone de todos los $x\,\mathrm{N} \,.\, x'\,\mathrm{N}$, con x' variable en G'. Ahora bien: por ser $\mathrm{G}' \leqq \mathrm{G}$, dado un $x' \in \mathrm{G}'$ (un $x_1' \in \mathrm{G}'$) existe un x_1' (un x') con $xx' = x_1'x$ (esto equivale a $x\,\mathrm{G}' = \mathrm{G}'\,x$) y entonces

$$x\,\mathrm{N} \,.\, x'\,\mathrm{N} = \mathrm{N}\,xx'\,\mathrm{N} = \mathrm{N}\,x_1'x\,\mathrm{N} = x_1'\,\mathrm{N} \,.\, x\,\mathrm{N},$$

lo que prueba que todo elemento $x\,\mathrm{N}\,.\,x'\,\mathrm{N}$ de $x\,\mathrm{N}\,.\,\overline{\mathrm{G}}'$ pertenece a $\overline{\mathrm{G}}'\,.\,x\,\mathrm{N}$, o sea $x\,\mathrm{N}\,.\,\overline{\mathrm{G}}' \subseteq \overline{\mathrm{G}}'\,.\,x\,\mathrm{N}$. De igual modo se demuestra la inclusión inversa; luego $x\,\mathrm{N}\,.\,\overline{\mathrm{G}}' = \overline{\mathrm{G}}'\,.\,x\,\mathrm{N}$ que, valiendo para todo x, significa que $\overline{\mathrm{G}}' \leqq \overline{\mathrm{G}}$.

b) Según dicho, es claro que

$$\overline{\mathrm{G}}/\overline{\mathrm{G}}' = \{\mathrm{x}\,\mathrm{N}\,.\,\overline{\mathrm{G}}'\}\,,$$

mientras que

$$\mathrm{G}/\mathrm{G}' = \{\mathrm{x}\,\mathrm{G}'\}\,.$$

Establezcamos ahora la correspondencia

$$\mathrm{x}\,\mathrm{G}' \rightarrow \mathrm{x}\,\mathrm{N}\,.\,\overline{\mathrm{G}}' \tag{4.1}$$

entre G/G' y $\overline{\mathrm{G}}/\overline{\mathrm{G}}'$, y mostremos ante todo que es unívoca: $x\,\mathrm{G}' = y\,\mathrm{G}' \Rightarrow x\,\mathrm{N}\,.\,\overline{\mathrm{G}}' = y\,\mathrm{N}\,.\,\overline{\mathrm{G}}'$. En efecto: la hipótesis significa que dado un x' (un x_1'), existe un x_1' (un x') tal que $xx' = yx_1'$; lo cual puede escribirse $x\,\mathrm{N}\,.\,x'\,\mathrm{N} = y\,\mathrm{N}\,.\,x_1'\,\mathrm{N}$, que significa precisamente que $x\,\mathrm{N}\,.\,\overline{\mathrm{G}}' = y\,\mathrm{N}\,.\,\overline{\mathrm{G}}'$. Así, la clase $x\,\mathrm{G}'$ (definida indistintamente por x o por y) determina unívocamente la clase $x\,\mathrm{N}\,.\,\overline{\mathrm{G}}'$ en la correspondencia (4.1).

Más aún: (4.1) es biunívoca: $x\,\mathrm{N}\,.\,\overline{\mathrm{G}}' = y\,\mathrm{N}\,.\,\overline{\mathrm{G}}' \Rightarrow x\,\mathrm{G}' = y\,\mathrm{G}'$. Pues la hipótesis significa como antes, $x\,\mathrm{N}\,.\,x'\,\mathrm{N} = y\,\mathrm{N}\,.\,x_1'\,\mathrm{N}$, o $xx'\,\mathrm{N} = yx_1'\,\mathrm{N}$. En particular, debe existir $n \in \mathrm{N}$ tal que $xx' = yx_1'n$, y como $x_1'n \in \mathrm{G}'$ se deduce $xx' \in y\mathrm{G}'$, de donde, por la arbitrariedad de x', se tiene $x\,\mathrm{G}' \subseteq y\,\mathrm{G}'$ De igual manera se demuestra la inclusión inversa y por tanto la tesis $x\,\mathrm{G}' = y\,\mathrm{G}'$.

c) Finalmente (4.1), conserva los productos:

$$\mathrm{x}\,\mathrm{G}'\,.\,\mathrm{y}\,\mathrm{G}' = \mathrm{xy}\,\mathrm{G}' \rightarrow \mathrm{xy}\,\mathrm{N}\,.\,\overline{\mathrm{G}}' = \mathrm{x}\,\mathrm{N}\,.\,\overline{\mathrm{G}}'\,.\,\mathrm{y}\,\mathrm{N}\,\overline{\mathrm{G}}'.$$

Por consiguiente (4.1), es un isomorfismo $\mathrm{G}/\mathrm{G}' \cong \overline{\mathrm{G}}/\overline{\mathrm{G}}'$. c. q. d.