LAS PERTURBACIONES EN LAS COORDENADAS HELIOCENTRICAS, CALCULADAS CON UN PROCEDIMIENTO NUMERICO DE PROLONGACION ANALITICA

por PASCUAL SCONZO, La Plata (Argentina)

En un trabajo del año 1942, K. Stumpff ha investigado varias particularidades del problema de las perturbaciones especiales en las coordenadas rectangulares de los planetitas que se mueven alrededor del Sol obedeciendo a la ley newtoniana de atracción, bajo la influencia de un tercer cuerpo perturbador (1). El análisis hecho por el nombrado autor se refiere principalmente al estudio de la estructura del desarrollo en serie tayloriana de dichas coordenadas con la finalidad de separar los términos principales y encontrar luego el método más adecuado para tener en cuenta los términos restantes que constituyen el resto de dicha serie.

Según la opinión del mismo autor es aconsejable la integración numérica del resto, con un paso tabular que él elije de 40 días, encontrando previamente la correspondiente ecuación diferencial de 2°) orden a la cual satisface. Se entiende que se tiene un sistema de tres ecuaciones diferenciales: una para cada una de las coordenadas. Este modo de proceder es naturalmente un recurso que puede resultar útil y ventajoso, como lo demuestra el autor mediante un ejemplo concreto, pero no deja de ser algo artificioso, siendo el espíritu del procedi-

(1) K. STUMPFF, *Untersuchungen über das Problem der speziellen Störungen in der rechtwinklingen Koordinaten*. Astronomischen Nachrichten. Band 273, p. 105-112. Berlin (1942-43).

miento en esencia el del clásico método de Encke. Como se sabe, en este último no se procede a la integración directa de las ecuaciones del movimiento perturbado, como ocurre con los métodos de extrapolación (2), sino que, se integran las ecuaciones diferenciales a las cuales satisfacen las diferencias de las coordenadas entre movimiento perturbado y movimiento no perturbado.

Aquí me propongo estudiar cómo resulta posible realizar el cálculo de las coordenadas heliocéntricas del movimiento perturbado por medio de desarrollos sucesivos, en series de potencias del tiempo, con un procedimiento que podría llamarse de prolongación analítica. En resumen, el nuevo método se basa en las siguientes consideraciones.

Elegido un instante origen $t=t_0$, a partir de las ecuaciones del movimiento perturbado para el caso llamado «restringido» del problema de los tres cuerpos, se desarrollan en series taylorianas las coordenadas heliocéntricas del planetita en función de las posiciones y velocidades iniciales del cuerpo perturbado P y del perturbador P_1 (Júpiter).

En dichas series resulta fácil separar la parte debida al movimiento no perturbado de P, de la otra producida por la perturbación, reemplazando a la primera por una expresión cerrada. La segunda parte está compuesta por un grupo de términos correspondientes al movimiento de P_1 y por otro grupo de términos mixtos que dependen de las coordenadas y velocidades iniciales de P y P_1. El primer grupo puede ser reemplazado por los elementos, que suponemos conocidos, del cuerpo perturbador (3). Del segundo grupo se indican cuáles son los términos que no deben despreciarse para no comprometer la convergencia del desarrollo dentro de un intervalo máximo $w=t-t_0$ del orden de 40 días. Obtenida la nueva posición y la corres-

(2) Entre dichos métodos ver también P. SCONZO: *Formule di estrapolazione per l'integrazione delle equazioni differenziali.* "Bolletino dell' U. M. I. Serie III, 4, p. 391-399, Bologna (1954); y el otro trabajo del mismo autor *La fórmula de extrapolación de Cowell y algunas de sus variantes,* de próxima aparición en las Publs. del Observatorio de La Plata.

(3) En el caso de Júpiter, se pueden utilizar las coordenadas tabuladas por integración numérica y contenidas en el Tomo XII de "Astronomical Papers" publicado por U. S. Naval Observatory, Washington (1951).

pondiente velocidad del cuerpo perturbado en el instante $t_1 = t_0 + w$, se procede de modo análogo a partir del nuevo origen t_1 y así sucesivamente. En el cálculo numérico que ha sido realizado tomando como ejemplo el cuerpo 1951 *M H*, la prolongación fué extendida hasta un intervalo que abarca una revolución sinódica completa, o sea alrededor de 480 días, obteniendo una representación satisfactoria del movimiento real del planetita. Dichos cálculos, ejecutados con seis cifras decimales, fueron comparados con los obtenidos previamente por medio de integración numérica aplicando el método de extrapolación (4): se encontraron sólo leves discrepancias, que al final de la prolongación afectan la quinta cifra decimal de las coordenadas.

Los nuevos resultados numéricos serán objeto de publicación en las revistas astronómicas especializadas: aquí me limitaré a dar los fundamentos teóricos del problema tratado.

Ecuaciones del movimiento perturbado de un planetita $P(x, y, z)$, cuya masa se supone despreciable:

$$\ddot{x} = -x\,r^{-3} - m_1(\xi_1\,\rho_1^{-3} + x_1\,r_1^{-3}) \tag{1}$$

(análogamente para las otras coordenadas y, y z), donde las derivadas se calculan con respecto a la variable $\tau = k\,(t - t_0)$, siendo además:

k la constante de Gauss,

m_1 la masa de Júpiter, en unidades de la masa del Sol ($m_1 = 9{,}5 \times 10^{-4}$), x_1, y_1, z_1, sus coordenadas

y

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

$$\xi_1 = x - x_1, \quad \eta_1 = y - y_1, \quad \zeta_1 = z - z_1$$

$$\rho_1^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2.$$

(4) Ver P. SCONZO, *Minos Planets Circulars* Nº 891, Improved elements of 1951, M H–Cincinati (1953).

Ecuaciones del movimiento del cuerpo perturbador:

$$(2) \qquad \ddot{x}_1 = -(1+m_1)\,x_1\,r_1^{-3} \qquad \text{etc.}$$

sigue:

$$\ddot{\xi}_1 = \ddot{x} - \ddot{x}_1 = -x\,r^{-3} + x_1\,r_1^{-3} - m_1\,\xi_1\,\rho_1^{-3}$$

y se trata ahora de establecer el desarrollo tayloriano de x:

$$(3) \qquad x(\tau) = x_0 + \tau\,\dot{x}_0 + \frac{\tau^2}{2!}\,\ddot{x}_0 + \frac{\tau^3}{3!}\,\dddot{x}_0 + \ldots$$

en función de $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $V_0(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ y de $P_{1_0}(x_{1_0}, y_{1_0}, z_{1_0})$, $V_{1_0}(\dot{x}_{1_0}, \dot{y}_{1_0}, \dot{z}_{1_0})$ o sea de las posiciones y velocidades del cuerpo perturbado y del perturbador en el instante $t = t_0$.

Nos serviremos al efecto del cálculo de las derivadas y del examen de la estructura de las mismas ya realizado por K. Stumpff. Se tiene:

$$(4) \qquad \dddot{x} = 3\,x\,r^{-5}\,[r\,\dot{r}] - \dot{x}\,r^{-3} + m_1\,\{3\,x_1\,r_1^{-5}\,[r_1\,\dot{r}_1] - $$
$$- \dot{x}_1\,r_1^{-3} + 3\,\xi_1\,\rho_1^{-5}\,[\rho_1\,\dot{\rho}_1] - \dot{\xi}_1\,\rho_1^{-3}\}$$

donde

$$[r\,\dot{r}_1] = x\,\dot{x} + y\,\dot{y} + z\,\dot{z}$$

y expresiones análogas para $[r_1\,\dot{r}_1]$ y $[\rho_1\,\dot{\rho}_1]$.

Luego:

(5)

$$x^{IV} = -15\,x\,r^{-7}\,[r\,\dot{r}]^2 - 2\,x\,r^{-6} + 3\,x\,r^{-5}\,[\dot{r}\,\dot{r}] + 6\,\dot{x}\,r^{-5}\,[r\,\dot{r}] +$$
$$+ m_1\,\{-15\,x_1\,r_1^{-7}\,[r_1\,\dot{r}_1]^2 - 2\,x_1\,r_1^{-6} +$$
$$+ 3\,x_1\,r_1^{-5}\,[\dot{r}_1\,\dot{r}_1] + 6\,\dot{x}_1\,r_1^{-5}\,[r_1\,\dot{r}_1]\} +$$
$$+ m_1\,\{-15\,\xi_1\,\rho_1^{-7}\,[\rho_1\,\dot{\rho}_1]^2 +$$
$$+ 3\,\xi_1\,\rho_1^{-5}\,[\dot{\rho}_1\,\dot{\rho}_1] + 6\,\dot{\xi}_1\,\rho_1^{-5}\,[\rho_1\,\dot{\rho}_1]\} +$$

$$(A) \quad + m_1 \{ r_1^{-3} r^{-3} (x_1 - 3\, x\, r^{-2} [r_1 r]) + + \rho_1^{-3} r^{-3} (\xi_1 - 3\, x\, r^{-2} [\rho_1 r]) + r^{-3} \rho_1^{-3} (x - 2\, \xi_1 \rho_1^{-2} [r\, \rho_1]) + r_1^{-3} \rho_1^{-3} (x_1 - 3\, \xi_1 \rho_1^{-2} [r, \rho_1]) \}$$

$$(B) \quad - m_1^2 \{ 2\, x_1 r_1^{-6} + 2\, \xi_1 \rho_1^{-6} \}.$$

Expresiones más complicadas se obtienen para las derivadas de orden superior.

Se ve que hasta los términos de 4º) orden, a menos de $2\, \xi_1 \rho_1^{-6}$ y de los grupos (A) y (B), la estructura de las derivadas es idéntica en x, x_1 y ξ_1 y que, en general, considerando las derivadas de orden superior al 4º), se constata que para la x aparecen todos los términos de las conocidas series f y g de Lagrange y que para la x_1, dichas series no contienen los primeros términos, la unidad y τ respectivamente. En base a las series f y g, se tiene entonces:

$$(6) \qquad x_*(\tau) = f(P_0, V_0, \tau)\, x_0 + g(P_0, V_0, \tau)\, \dot{x}_0$$

$$x_1(\tau) = f(P_{1_0}, V_{1_0}, \tau)\, x_{1_0} + g(P_{1_0}, V_{1_0}, \tau)\, \dot{x}_{1_0}$$

correspondiendo $x_*(\tau)$ al movimiento no perturbado de P. Reemplazando, pues, las (4), (5), etc., calculadas en el origen $t = t_0$, en la (3), teniendo además en cuenta las (6) y efectuando varias simplificaciones, se obtiene en definitiva:

(7)

$$x(\tau) = x_*(\tau) + m_1 \{ x_1(\tau) - (x_1 + \tau\, \dot{x}_1)_0 \} + m_1 \{ \varphi\, \xi_{1_0} + \psi\, \dot{\xi}_{1_0} \} + R(x)$$

donde el resto $R(x)$ contiene los términos de los grupos (A) y (B) multiplicados por $\dfrac{\tau^4}{24}$ y, además, todos los términos en τ de orden superior al 4º) que provienen solamente del desarrollo de $\xi_1(\tau)$. Para φ y ψ se obtienen las expresiones:

$$\varphi = \frac{m_1 \tau^2}{2 \rho_1^3} \left\{ -1 + \tau \frac{[\rho_1 \dot{\rho}_1]}{\rho_1^2} + \frac{\tau^2}{12} \left(-15 \frac{[\rho_1 \dot{\rho}_1]^2}{\rho_1^4} + 3 \frac{[\dot{\rho}_1 \dot{\rho}_1]}{\rho_1^2} \right) \right\}$$

$$\psi = \frac{m_1 \tau^3}{6 \rho_1^3} \left\{ -1 + \frac{3}{2} \tau \frac{[\rho_1 \dot{\rho}_1]}{\rho_1^2} \right\}$$

(calculadas también en el origen); y si se pone:

$$\omega_1^2 = \frac{[\dot{\rho}_1 \dot{\rho}_1]}{\rho_1^2}, \qquad \sigma_1 = \frac{[\rho_1 \dot{\rho}_1]}{\rho_1^2}$$

se tiene:

$$(8) \quad \begin{aligned} \varphi &= -\frac{m_1 \tau^2}{2\rho_1^3} \left\{ 1 - \tau \sigma_1 + \frac{\tau^2}{4} (5\sigma_1^2 - \omega_1^2) \right\} \\ \psi &= -\frac{m_1 \tau^3}{6\rho_1^3} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \tau \sigma_1 \right\}. \end{aligned}$$

Como hemos dicho, $x_*(\tau)$ puede ser reemplazada por la expresión finita del movimiento de los dos cuerpos; para ello, es conveniente, como ya fué indicado en otro trabajo (5), hacer uso de las siguientes fórmulas cerradas de Kühnert:

$$f(P_0, V_0, \tau) = 1 - \frac{F}{r_0}$$

$$g(P_0, V_0, \tau) = r_0 G + [r_0 \dot{r}_0] F$$

donde, con el simbolismo acostumbrado del movimiento elíptico kepleriano, es:

$$F = a(1 - \cos \Delta E)$$

$$G = a^{1/2} \operatorname{sen} \Delta E$$

$$\Delta E = E - E_0$$

y el valor de E es el de la solución $(0 \leqq E \leqq 2\pi)$ de la ecuación trascendente:

$$E - e \operatorname{sen} E = E_0 - e \operatorname{sen} E_0 + \tau a^{-3/2}.$$

(5) Ver P. SCONZO, *Una notevole applicazione delle espressioni di Kühnert, relative a la serie f y g de Lagrange*. Memorie della Soc. Astr. Ital., vol. XXIV - 4. Pavia (1953).

La coordenada $x_1(\tau)$ puede ser reemplazada también por valores finitos calculados por medio de la segunda de las (6); resulta empero, mucho más ventajoso sacar dichos valores directamente de la tabla del movimiento de Júpiter, mencionada en la nota ([3]). De modo que, si se tiene fundamento para despreciar $R(x)$ ([6]), el cálculo de $x(\tau)$ se reduce al cálculo de $x_*(\tau)$ y de $m_1\{\varphi\,\xi_{10}+\psi\,\dot{\xi}_{1_0}\}$.

Como en el transcurso de la prolongación es necesario también el conocimiento de las velocidades de P en los extremos de cada intervalo parcial, se establecen aquí las fórmulas que proveen las derivadas de f y g con respecto a τ:

$$\dot{f}=-\frac{G}{r_0 r_*}$$

$$\dot{g}=\frac{1}{r_*}\{r_0\cos\Delta E+[r_0\dot{r}_0]\,G\}$$

que sirven para el cálculo de $x_*(\tau)$ y, además, se establece la cómoda fórmula de contralor:

$$f\dot{g}-g\dot{f}=1.$$

La derivada $\dot{x}_1(\tau)$ se deduce fácilmente de la recién mencionada Tabla de Júpiter.

En fin, las expresiones de las derivadas de φ y de ψ se obtienen inmediatamente de las (8).

([6]) Para el planetita 1951 M. H., en toda la extensión del cálculo, la distancia ρ_1 varió entre 2,9 y 6,5 unidades astronómicas y, haciendo $\tau = k\ 40^d$, al despreciar el resto la 6ta. cifra decimal de las coordenadas no resultaba afectada.