ALCUNE APPLICAZIONI DI UNA PROPRIETÀ ARITMETICA DELLE QUADRICHE

Nota di BENIAMINO SEGRE, Roma (Italia)

1. La mirabile opera scientifica di Beppo Levi segna orme nuove in campi svariatissimi, uno fra i più importanti dei quali è lo studio di proprietà aritmetiche collegate ad enti geometrici. A lui si deve infatti una teoria aritmetica delle cubiche piane, pubblicata circa mezzo secolo fa in quattro Note ormai classiche [3] (1); ma il suo interesse per il campo aritmetico non è da allora venuto meno, come fa fede fra l'altro un suo lavoro recente [4].

Penso quindi che la presente Nota possa riuscire accetta all'Amico carissimo, già vari anni mio Collega presso l'Università di Bologna. In essa espongo taluna fra le conseguenze algebriche e geometriche che possono trarsi da una certa proprietà aritmetica delle quadriche, da me incidentalmente ottenuta in una precedente ricerca [6, n. 5] e qui richiamata nel successivo n. 2.

2. Sia S_{2n-1} uno spazio proiettivo di dimensione *dispari* $2n-1$, sopra un corpo Γ di *caratteristica* $p \neq 2$. Una quadrica φ non singolare di S_{2n-1} si rappresenta con un'equazione della forma

$$\varphi(x) = \sum_{i,j=1}^{2n} a_{ij} x_i x_j = 0 \qquad (a_{ij} = a_{ji}),$$

(1) I numeri entro parentesi quadre si riferiscono alla Bibliografia posta alla fine del presente lavoro.

dove le α denotino elementi di Γ di determinante

$$D = |\alpha_{ij}|_{i,j=1,2,\dots,2n} \neq 0.$$

Allora in Γ, od in una conveniente estensione di Γ, la quadrica φ contiene degli spazi S_{n-1} (e nessuno spazio avente dimensione maggiore di $n-1$): la totalità di tali S_{n-1} è un sistema algebrico puro, definito su Γ, il quale nel corpo $\Gamma(\sqrt{(-1)^n D})$ si spezza in due sistemi algebrici assolutamente irriducibili (di cui è facile assegnare le caratteristiche geometriche, ved. [6]. Ne consegue che:

Affinchè la quadrica φ contenga qualche S_{n-1} definito su Γ, occorre (ma generalmente non basta) che $(-1)^n D$ sia il quadrato di un elemento di Γ.

Va rilevato che questa condizione è sempre soddisfatta nel caso escluso in cui si abbia $D=0$, e neppure allora essa risulta sufficiente.

3. Otterremo una prima conseguenza della proprietà enunciata alla fine del n. 2, riferendoci a due forme quadratiche quaternarie

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}\, x_i\, x_j, \qquad g(x) = \sum_{i,j=1}^{4} b_{ij}\, x_i\, x_j,$$

a coefficienti in Γ, tali che il polinomio di 4° grado in u

$$(1) \qquad D(u) = |a_{ij} + u\, b_{ij}|_{i,j=1,2,3,4}$$

sia *privo di radici multiple*. Mostreremo che, in quest'ipotesi,

La quartica piana ellittica

$$(2) \qquad v^2 = D(u)$$

è trasformata unirazionale in Γ della quartica sghemba di 1ª specie di equazioni

$$(3) \qquad f(x) = 0, \quad g(x) = 0.$$

Più precisamente, la (2) *risulta curva di Jacobi della* (3); *e fra* *le* (2), (3) *intercede una corrispondenza algebrica di indici* (1, 4), *esprimibile con equazioni del seguente tipo:*

$$(4) \qquad u = \frac{F(x,a,b)}{G(x,a,b)}, \qquad v = \frac{H(x,a,b)}{G(x,a,b)},$$

dove le F, G *ed* H *denotano forme nelle* x, a, b *dei gradi rispettivi* (2, 3, 2), (2, 2, 3) *e* (4, 6, 6), *a coefficienti in* Γ.

Per semplicità di discorso, supporremo —come non è restrittivo— che il piano $x_4 = 0$ incontri la quartica (3) in quattro punti distinti, $x^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, i quali apparterranno così a Γ o ad un'estensione algebrica di Γ. Nelle ipotesi ammesse la curva (3) risulta priva di punti multipli (eppertanto irriducibile), ond'essa possiede in ogni suo punto x una retta tangente determinata, diciamola t_x. Se x è distinto dai suddetti punti $x^{(i)}$, la relativa t_x può venir *individuata* come la retta congiungente il punto x col punto y $(\neq x)$ ov'essa incontra il piano $x_4 = 0$; questo punto ha precisamente le coordinate

$$(5) \qquad y_1 = f_2 g_3 - f_3 g_2, \quad y_2 = f_3 g_1 - f_1 g_3,$$
$$y_3 = f_1 g_2 - f_2 g_1, \quad y_4 = 0,$$

avendo posto, per abbreviare,

$$f_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \qquad g_i = \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Il determinante (1) non è palesemente che il discriminante della quadrica

$$(6) \qquad f(X) + u g(X) = 0,$$

dove, onde evitare confusioni, abbiamo denotato le coordinate correnti di punto con la lettera X; la (6), al variare del parametro u, descrive precisamente il fascio di quadriche determinato dalla quartica (3) come curva base. La quadrica di questo fascio che passa per il punto y suddetto, intersecando t_x nei punti x, y con molteplicità rispettive non inferiori a 2, 1, contiene quindi la retta t_x; essa si ottiene dalla (6) assumendo

$$u = \frac{-f(y)}{g(y)},$$

ove le y son date dalle (5), ciò che manifestamente fornisce per u un'espressione del tipo

$$(7) \qquad u = \frac{f^*(x,a,b)}{g^*(x,a,b)},$$

dove f^* e g^* denotano forme nelle x, a, b dei gradi rispettivi $(4, 3, 2)$ e $(4, 2, 3)$.

É chiaro che sia l'una che l'altra di queste forme deve anullarsi in ciascuno dei punti $x^{(i)}$; e questo implica che —sulla curva (3), ossia $\mathrm{mod}(f, g)$— dette forme debbano risultare divisibili per una certa potenza di x_4 —data per entrambe da x_4^2— come si vede con facile argomentazione geometrica (od anche poggiando sul successivo n. 4). Valgono dunque delle congruenze $\mathrm{mod}(f, g)$ del tipo

$$(8) \qquad f^*(x, a, b) \equiv x_4^2\, F(x, a, b),\; g^*(x, a, b) \equiv x_4^2\, G(x, a, b),$$

nelle quali F e G denotano forme nelle x, a, b dei gradi rispettivi $(2, 3, 2)$ e $(2, 2, 3)$; sicchè, in virtù delle (3), la (7) può venir sostituita dalla

$$(9) \qquad u = \frac{F(x,a,b)}{G(x,a,b)}.$$

Per questo valore di u il determinante (1) riducesi così a

$$(10) \qquad D(u) = \frac{K(x,a,b)}{G^4(x,a,b)},$$

dove K risulta una forma dei gradi $(8, 12, 12)$ nelle x, a, b.

Osserviamo ora che tanto la retta t_x quanto la quadrica fornita dalla (6) in corrispondenza al valore di u dato dalla (9) son razionalmente definite sul corpo $\Gamma(x, a, b)$. Poichè, come già si è rilevato, la prima giace sulla seconda, così —in forza del n. 2— il discriminante (10) di questa dev'essere un *quadrato* in $\Gamma(x, a, b)$. Vale dunque una congruenza del tipo

$$(11) \qquad K(x, a, b) \equiv H^2(x, a, b) \qquad \mathrm{mod}(f, g),$$

dove H è una funzione razionale dei suoi argomenti, a coefficienti in Γ, determinata $\bmod(f, g)$ a meno del segno. In virtù dell'irriducibilità della curva (3), si può quindi effettivamente assumere H quale *forma* dei gradi $(4, 6, 6)$ nelle x, a, b (cfr. anche il n. 4).

Valgono pertanto le equazioni (4) del tipo enunciato, istituenti di fatto una corrispondenza unirazionale in Γ fra la curva (3) e la (2).

Si ottiene una semplice *interpretazione geometrica* di tale corrispondenza, rilevando che i punti (u, v) della curva (2) corrispondono algebricamente e biunivocamente alle $g_2{}^1$ della curva (3), onde la (2) risulta curva di Jacobi della (3), come asserito. Ed invero, le rette congiungenti le varie coppie di una qualunque $g_2{}^1$ siffatta costituiscono notoriamente una schiera rigata, ossia un sistema di generatrici di una quadrica [passante per la curva (3)] rappresentabile con un'equazione del tipo (6). Conseguentemente, la conoscenza di tale $g_2{}^1$ definisce un valore di u; essa inoltre, in virtù di [6, n. 5], permette di scegliere razionalmente una determinazione per $\sqrt{D(u)}$, ossia —in forza della (2)— uno dei due valori di v, sicchè a tale $g_2{}^1$ resta coordinato algebricamente uno ed un solo punto (u, v) della curva (2). Viceversa, per ogni assegnato valore di u, la (6) definisce una quadrica passante per la curva (3); l'ulteriore scelta di una determinazione per $v = \sqrt{D(u)}$ implica la scelta di un sistema di generatrici di tale quadrica: queste generatrici segano una $g_2{}^1$ determinata sulla curva (3), la quale resta così algebricamente ed univocamente definita dal punto (u, v) della curva (2).

Per costruzione, la corrispondenza posta mediante le (4) fra le curve (2), (3) è quella che si ottiene in base a quanto precede ove si associ ad ogni punto x della (3) la $g_2{}^1$ di questa curva avente x come punto doppio. Poiché ogni $g_2{}^1$ di una curva ellittica ammette *quattro* punti doppi distinti, così la corrispondenza suddetta ha gli indici $(1, 4)$. Con ciò tutte le proprietà enunciate rimangono stabilite.

4. Possiamo agevolmente controllare le formule ottenute nel numero precedente, esplicitandole nell'ipotesi che il tetraedro di riferimento delle coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4) coincida col tetraedro autopolare comune alle quadriche (3). E si noti che que-

st'ultimo è necessariamente *unico*, in virtù di quanto supposto sul polinomio (1) nel n. 3; e che ci si può sempre porre nelle condizioni suddette, a patto di sostituire al corpo Γ l'*estensione* che se ne deduce con l'aggiunzione delle quattro radici di quel polinomio.

Attualmente possiamo scrivere più semplicemente

$$(12) \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{4} a_i x_i^2, \qquad g(x) = \sum_{i=1}^{4} b_i x_i^2,$$

dove le a, b sono elementi di Γ tali che —per $i \neq j$— nessuna delle espressioni

$$(13) \qquad c_{ij} = a_i b_j - a_j b_i \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

abbia ad annullarsi. Di conseguenza, le (1), (5) ora rispettivamente diventano

$$(14) \qquad D(u) = \prod_{i=1}^{4} (a_i + u b_i),$$

$$y_1 = c_{23} x_2 x_3, \quad y_2 = c_{31} x_3 x_1, \quad y_3 = c_{12} x_1 x_2, \quad y_4 = 0,$$

e nella (7) si può assumere

$$-f^*(x, a, b) = a_1 c_{23}^2 x_2^2 x_3^2 + a_2 c_{31}^2 x_3^2 x_1^2 + a_3 c_{12}^2 x_1^2 x_2^2,$$
$$g^*(x, a, b) = b_1 c_{23}^2 x_2^2 x_3^2 + b_2 c_{31}^2 x_3^2 x_1^2 + b_3 c_{12}^2 x_1^2 x_2^2.$$

In base alle (12), (13), risulta

$$(15) \qquad \sum_{i=1}^{4} c_{ij} x_i^2 \equiv 0 \qquad (j = 1, 2, 3, 4),$$

$$a_1 c_{23} + a_2 c_{31} + a_3 c_{12} = 0, \qquad b_1 c_{23} + b_2 c_{31} + b_3 c_{12} = 0,$$

il segno $\equiv$ significando (qui ed in seguito) congruenza mod(f, g). Da queste formule e dalla definizione di f^* si trae

$$-f^* \equiv a_1 c_{23}^2 x_2^2 x_3^2 + a_2 c_{31} x_3^2 (c_{23} x_2^2 + c_{43} x_4^2) +$$
$$+ a_3 c_{12}^2 x_2^2 (c_{23} x_3^2 + c_{24} x_4^2) =$$

$$= c_{23}(a_1 c_{23} + a_2 c_{31} + a_3 c_{12})\, x_2^2 x_3^2 + \\ + (a_2 c_{13} c_{34} x_3^2 + a_3 c_{12} c_{24} x_2^2)\, x_4^2 = \\ = (a_2 c_{13} c_{34} x_3^2 + a_3 c_{12} c_{24} x_2^2)\, x_4^2 ;$$

del pari, per g^* si ottiene

$$g^* \equiv (b_2 c_{13} c_{34} x_3^2 + b_3 c_{12} c_{24} x_2^2)\, x_4^2 .$$

Valgono pertanto le (8), ove si prenda:

$$(16) \qquad F = - a_2 c_{13} c_{34} x_3^2 - a_3 c_{12} c_{24} x_2^2, \\ G = b_2 c_{13} c_{34} x_3^2 + b_3 c_{12} c_{24} x_2^2 .$$

Il raffronto delle (10), (14) mostra che, nelle ipotesi attuali, si ha

$$K(x, a, b) = \prod_{i=1}^{4} (a_i G + b_i F) .$$

Ora, avuto riguardo alle (15), (16), risulta:

$$a_1 G + b_1 F = c_{12} c_{13} (c_{34} x_3^2 + c_{24} x_2^2) \equiv - c_{12} c_{13} c_{14} x_1^2 ,$$

$$a_2 G + b_2 F = - c_{21} c_{23} c_{24} x_2^2 , \qquad a_3 G + b_3 F = - c_{31} c_{32} c_{34} x_3^2 ,$$

$$a_4 G + b_4 F = c_{24} c_{34} (c_{13} x_3^2 + c_{12} x_2^2) \equiv - c_{24} c_{34} c_{14} x_4^2 .$$

Sussiste così effettivamente la (11), ove ad esempio si assuma:

$$H(x, a, b) = c_{12} c_{13} c_{14} c_{23} c_{24} c_{34}\; x_1 x_2 x_3 x_4 .$$

5. Sviluppi analoghi ai precedenti, basati sulla proposizione del n. 2, possono venir istituiti in vari altri casi. Qui e nel numero successivo daremo *due esempi* al riguardo, lasciando al Lettore di approfondirne i particolari similmente a quanto è stato fatto nel caso già trattato.

Siano

$$f^h(x) = \sum_{i,j=1}^{6} a_{ij}^h x_i x_j \qquad (a_{ij}^h = a_{ji}^h, \qquad h = 0, 1, 2, 3)$$

quattro forme in sei variabili x, a coefficienti generici nel corpo Γ. In uno spazio S_5 ove le x siano coordinate proiettive omogenee di punto, le equazioni

$$f^0(x)=0,\quad f^1(x)=0,\quad f^2(x)=0,\quad f^3(x)=0 \tag{17}$$

definiscono una curva algebrica irriducibile C, d'ordine 16 e genere 17, base del sistema lineare ∞^3 di quadriche $\varphi(x)=0$, dove si è posto

$$\varphi(x)=f^0(x)+u_1 f^1(x)+u_2 f^2(x)+u_3 f^3(x).$$

Detto

$$D(u)=|a_{ij}{}^0+u_1 a_{ij}{}^1+u_2 a_{ij}{}^2+u_3 a_{ij}{}^3|_{i,j=1,\dots,6}$$

il discriminante della φ, in un S_4 ove u_1, u_2, u_3, v siano coordinate non omogenee di punto convien allora considerare la forma sestica

$$v^2=-D(u), \tag{18}$$

definita su Γ ed intrinsecamente associata a C. Dimostreremo che

La forma sestica (18) *contiene una curva birazionalmente identica a C in Γ, ed anche una superficie birazionalmente identica in Γ alla superficie sviluppabile circoscritta a* C. *Tanto l'una che l'altra si definiscono come segue in modo intrinseco.*

Se x è il generico punto di C, il piano π osculatore a C in x appartiene al corpo $\Gamma(x)$; su esso, il suddetto sistema lineare ∞^3 di quadriche φ sega un sistema lineare di coniche osculantisi in x, sicchè il sistema segato ha dimensione non superiore a 2, ed esattamente uguale a 2 per la genericità delle f^h.

Ne consegue che esiste una ed una sola quadrica φ passante per π: questa φ appartiene a $\Gamma(x)$, ossia proviene da valori dei parametri:

$$u_1=u_1(x),\quad u_2=u_2(x),\quad u_3=u_3(x) \tag{19}$$

esprimibili mediante funzioni razionali di x, definite mod(f^0, f^1, f^2, f^3), a coefficienti in Γ. A norma del n. 2, per tale φ si ha che $-D(u)$ dev'essere un quadrato in $\Gamma(x)$; esiste cioè una funzione razionale a coefficienti in Γ:

$$(20) \qquad v = v(x),$$

definita $\mathrm{mod}(f^0, f^1, f^2, f^3)$ a meno del segno, tale che le (19), (20) —prese assieme alle (17)— rendano identicamente soddisfatta la (18). Poichè la φ suddetta contiene uno e —per la genericità delle f^h— un solo piano osculatore di C, così la curva rappresentata in S_4 dalle (17), (19), (20) risulta una trasformata *birazionale* di C in Γ, situata sulla forma sestica (18), ciò che dimostra la prima parte del teorema.

Per stabilire la seconda parte, basta procedere in modo consimile sostituendo alla considerazione del piano π suddetto quella del piano, χ, associato nel modo seguente ad un generico punto y della rigata sviluppabile circoscritta a C. Osserviamo intanto che ciascuna delle ∞^2 quadriche φ passanti per y contiene la tangente t di C che esce da y. Ne consegue che gli iperpiani di S_5 tangenti nel punto y a quelle φ (costituendo una rete) hanno a comune un piano passante per t, che denotiamo appunto con χ; quest'ultimo varia, al variare di y su t, non potendo esservi un fascio di quadriche φ passanti per esso. Si hanno quindi complessivamente ∞^2 piani χ, il cui insieme risulta riferito birazionalmente in Γ alla rigata sviluppabile circoscritta a C. In corrispondenza a ciascuno di tali χ si ottiene —poggiando sul n. 2— un punto della forma sestica (18), dopo aver osservato che un siffatto χ appartiene ad una (e generalmente ad una sola) φ. Ed invero, le ∞^2 quadriche φ che toccano il piano χ nel relativo punto y segano questo piano nella t ed in una retta ulteriore, passante per y: poichè le coniche sezioni sono così soltanto ∞^1, occorre che una di quelle φ contenga χ.

6. Riferiamoci ora ad una curva algebrica irriducibile C di S_7, definita su Γ, che sia non singolare, d'ordine n e di genere q, ove

$$14 \leqq n \leqq 28, \qquad q = 2n - 28.$$

Su C le quadriche di S_7 segano una g_{2n} certamente non speciale, in quanto

$$2n = q + 28 > 2q - 2,$$

e quindi di dimensione non superiore a $2n - q = 28$. Esistono conseguentemente almeno $7(7+3)/2 - 28 = 7$ quadriche indipendenti di S_7 passanti per C, e tali siano le

$$(21) \qquad f^h(x) = \sum_{i,j=1}^{8} a_{ij}^h x_i x_j = 0 \qquad (a_{ij}^h = a_{ji}^h, \qquad h = 0, 1, \ldots, 6).$$

Supponiamo, ciò che sarà il caso generale, che le (21) —oltre a C— abbiano a comune al più un numero finito di punti; C sarà allora la curva base del sistema lineare ∞^6 di quadriche $\varphi(x) = 0$, dove ora poniamo:

$$\varphi(x) = f^0(x) + u_1 f^1(x) + u_2 f^2(x) + + u_3 f^3(x) + u_4 f^4(x) + u_5 f^5(x) + u_6 f^6(x).$$

Detto

$$D(u) = |a_{ij}^0 + u_1 a_{ij}^1 + u_2 a_{ij}^2 + + u_3 a_{ij}^3 + u_4 a_{ij}^4 + u_5 a_{ij}^5 + u_6 a_{ij}^6|_{i,j=1,\ldots,8}$$

il discriminante della φ, in un S_7 ove $u_1, u_2 u_3, u_4, u_5, u_6, v$ siano coordinate non omogenee convien attualmente considerare la forma d'ordine otto

$$(22) \qquad v^2 = D(u),$$

definita su Γ e legata a C in modo intrinseco. Relativamente ad essa, si può dimostrare che

La forma (22) contiene una curva birazionalmente identica a C *in* Γ, *e contiene altresì una varietà a tre dimensioni birazionalmente identica in* Γ *alla varietà formata dai piani osculatori di C. Tanto l'una che l'altra si definiscono intrinsecamente, come risulta da ciò che segue.*

All'uopo basta procedere in modo analogo a quello svolto nel n. 5, dopo aver fatto le seguenti osservazioni.

Il generico S_3 osculatore di C impone 10-4 = 6 condizioni alle quadriche φ; esiste quindi una φ determinata che passa per tale S_3.

Del pari, un generico piano π osculatore di C impone 6-3 = 3 condizioni alle φ, e giace quindi su ∞^3 quadriche φ. Se y è un generico punto di π, gli iperpiani tangenti in y a queste φ costituiscono un sistema lineare ∞^3, avente dunque per base un S_3 passante per x. Le ∞^3 quadriche φ suddette segano su queto S_3 un sistema lineare di quadriche, ciascuna spezzata in π ed in un piano ulteriore di S_3 passante per y; poichè il sistema sezione ha conseguentemente dimensione due soltanto, se ne inferisce che una delle φ contiene il suddetto S_3.

7. Ci proponiamo ora d'indicare un'applicazione degli sviluppi dei nn. 3, 4 allo studio delle *forme binarie biquadratiche* sopra un corpo Γ di caratteristica $p \neq 2$. Introducendo una sola variable z non omogenea, si può ad una tal forma sostituire il polinomio

$$\varphi(z) = a z^4 + 4 b z^3 + 2 \gamma z^2 + 4 d z + e, \tag{23}$$

a coefficienti in Γ. Se $p \neq 3$, possiamo porre

$$\gamma = 3c \tag{24}$$

ossia scrivere quel polinomio nella forma consueta

$$\varphi(z) = a z^4 + 4 b z^3 + 6 c z^2 + 4 d z + e. \tag{25}$$

In ogni caso ammetteremo che $\varphi(z)$ abbia discriminante non nullo, ciò che equivale a supporre *ellittica* la quartica piana

$$w^2 = \varphi(z); \tag{26}$$

questa ammette il punto all'infinito dell'asse w come tacnodo e la retta all'infinito del piano $z\,w$ come relativa tangente tacnodale.

Avuto riguardo alla (23), è subito visto che la (26) si ottiene eliminando x_4 fra le equazioni

$$\begin{aligned} &x_1^2 = 4 x_3 x_4, \\ &x_2^2 = a x_4^2 + 2 b x_1 x_4 + 2 \gamma x_3 x_4 + 2 d x_1 x_3 + e x_3^2 \end{aligned} \tag{27}$$

e poi facendo

$$z = \frac{x_1}{2x_3}, \qquad w = \frac{x_2}{x_3}. \tag{28}$$

Ciò val quanto dire che la quartica (26) si ottiene come trasformata omografica in Γ della proiezione della quartica di 1ª specie (27) del punto fondamentale (0, 0, 0, 1) sul piano $x_4 = 0$, onde le (26), (27) risultano fra loro birazionalmente identiche. Più precisamente, poichè in virtù delle (28) e della prima delle (27) l'equazione

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 = 0$$

equivale alla

$$2 c_1 z + c_2 w + c_3 + c_4 z^2 = 0,$$

così la curva (27) non è che l'imagine proiettiva della g_4^3 segata sulla (26) dalle sue coniche aggiunte (questa essendo la serie lineare completa che contiene la g_4^2 delle sezioni rettilinee).

Il fascio delle quadriche rappresentate al variare del parametro ν dalla

$$\begin{aligned} \nu(x_1^2 - 4 x_3 x_4) - x_2^2 + a x_4^2 + \\ + 2 b x_1 x_4 + 2 \gamma x_3 x_4 + 2 d x_1 x_3 + e x_3^2 = 0, \end{aligned} \tag{29}$$

è quello avente la quartica (27) come curva base ed ha il discriminante

$$\Delta(\nu) = \begin{vmatrix} \nu & 0 & d & b \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ d & 0 & e & \gamma - 2\nu \\ b & 0 & \gamma - 2\nu & a \end{vmatrix} = \tag{30}$$

$$= 4\nu^3 - 4\gamma\nu^2 + (\gamma^2 + 4bd - ae)\nu + (ad^2 + eb^2 - 2b\gamma d);$$

questo risulta un polinomio di 3° grado in ν (anziché di 4°, come nel caso generale, ved. n. 3), in quanto la quadrica data dalla prima delle (27) —fornita dalla (29) per $\nu = \infty$— è ovviamente un cono.

Nel caso generale in cui $p \neq 3$, si può definire c mediante la (24) ed usare —in luogo di ν— il parametro

$$u = \nu - \gamma/3 = \nu - c. \tag{31}$$

Se allora poniamo

$$D(u) = \Delta(\nu) = \Delta(u + c),$$

ed introduciamo i classici invarianti proiettivi del polinomio (25):

$$i = 3c^2 - 4bd + ae, \qquad j = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3,$$

dalla (30) si ricava senz'altro:

$$D(u) = 4u^3 - iu - j. \tag{32}$$

La proposizione del n. 3 fornisce quindi in particolare il seguente teorema.

Assunto $\varphi(z)$ *nella forma* (23) *o* (25) (*e ciò secondochè il corpo* Γ *a cui appartengono i suoi coefficienti ha caratteristica* $p = 3$ *o* $p \neq 3$), *e definiti rispettivamente* $\Delta(\nu)$, $D(u)$ *con le* (30), (31), *la cubica piana*

(33) $\qquad v^2 = \Delta(\nu) \qquad$ *o* $\qquad$ (34) $\qquad v^2 = D(u)$

è trasformata unirazionale della quartica (26). *Più precisamente, la* (33) *o* (34) *è curva di Jacobi della* (26) (²); *e fra la* (33) *o* (34) *e la* (26) *intercede una corrispondenza algebrica di indici* (1, 4), *rappresentabile con le equazioni che diamo qui appresso, le quali si ottengono senza difficoltà col procedimento esposto nel n. 3.*

Quando $\varphi(z)$ si assume nella forma (23), si passa dalla

(²) Nel caso $p \neq 3$, questo risultato trovasi già —assai diversamente acquisito— in A. Weil [7].

(26) alla (33) mediante le formule

$$\nu = w^{-2}\,\rho(z), \qquad v = w^{-3}\,\sigma(z),$$

dove, per abbreviare, si è posto:

$$\rho(z) = b^2 z^4 + 2(b\gamma - a d)\, z^3 + (\gamma^2 - 2bd - ae)\, z^2 + \\ + 2(\gamma d - b e)\, z + d^2,$$

$$\sigma(z) = (a^2 d - a b\gamma + 2 b^3)\, z^6 + \\ (a^2 e + 2abd - a\gamma^2 + 2b^2\gamma)\, z^5 + \\ + 5(a b e - a\gamma d + 2 b^2 d)\, z^4 - 10(a d^2 - b^2 e)\, z^3 - \\ - 5(a d e - b\gamma e + 2 b d^2)\, z^2 - \\ (a e^2 + 2 b d e - \gamma^2 e + 2\gamma d^2)\, z - \\ - (b e^2 - \gamma d e + 2 d^3).$$

In altri termini, fra i polinomi $\rho = \rho(z)$, $\sigma = \sigma(z)$ testè definiti ed il dato polinomio $\varphi = \varphi(z)$ intercede l'identità:

$$\sigma^2 = 4\rho^3 - 4\gamma\rho^2\varphi + (\gamma^2 + 4bd - ae)\,\rho\,\varphi^2 + \\ + (a d^2 + b^2 e - 2 b\gamma d)\,\varphi^3.$$

Quando $\varphi(z)$ si assume nella forma (25), per il che occorre che si abbia $p \neq 3$, si passa dalla (26) alla (34) mediante le formule

$$u = -\,w^{-2} H(z), \qquad v = w^{-3} J(z),$$

dove $H(z)$ e $J(z)$ sono i noti covarianti biquadratici e sestico di $\varphi(z)$ (rispettivamente, a meno di fattori numerici, l'hessiano di φ ed il jacobiano di φ ed H):

$$H(z) = (a c - b^2)\, z^4 + 2(a d - b c)\, z^3 + (a e + 2 b d - 3 c^2)\, z^2 + \\ + 2(b e - c d)\, z + (c e - d^2),$$

$$J(z) = (a^2 d - 3abc + 2b^3)\, z^6 + (a^2 e + 2abd - 9ac^2 + 6b^2 c)\, z^5 + \\ + 5(a b e - 3 a c d + 2 b^2 d)\, z^4 - 10(a d^2 - b^2 e)\, z^3 - \\ - 5(a d e - 3 b c e + 2 b d^2)\, z^2 - \\ (a e^2 + 2 b d e - 9 c^2 e + 6 c d^2)\, z - \\ - (b e^2 - 3 c d e + 2 d^3).$$

In altri termini, fra questi covarianti ed il dato polinomio $\varphi = \varphi(z)$ intercede la seguente identità:

$$J^2 = -4H^3 + iH\varphi^2 - j\varphi^3,$$

d'altronde ben nota (³), ma della quale si ha così una semplice interpretazione geometrica (⁴).

8. Le considerazioni del numero precedente possono in parte venir estese —come ci proponiamo appunto di mostrare— a polinomi di grado $2q+2$

$$(35) \qquad \varphi(z) = \sum_{i=0}^{2q+2} c_i z^i \qquad (c_{2q+2} \neq 0),$$

a coefficienti in Γ e di discriminante non nullo, nell'ipotesi più generale che sia $q>1$. Con l'attuale determinazione di φ, la (26) rappresenta una *curva* (piana) *iperellittica di genere* q; la $g_{2q+2}{}^2$ delle sezioni rettilinee di questa è contenuta in una $g_{2q+2}{}^{q+2}$ completa, la cui imagine proiettiva è una curva, C, birazionalmente identica in Γ alla (26), avente l'ordine $2q+2$ ed appartenente ad un S_{q+2}.

Introdotte in questo spazio S_{q+2} coordinate proiettive omogenee di punto opportune, $(x_0, x_1, \ldots, x_{q+2})$, la curva C può venir rappresentata —com'è subito visto— dal sistema formato dall'equazione quadratica

$$x_{q+2}{}^2 = x_0(c_0 x_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_{q+1} x_{q+1}) + \\ + x_{q+1}(c_{q+2} x_1 + c_{q+3} x_2 + \ldots + c_{2q+2} x_{q+1})$$

e dalle $r = \binom{q+1}{2}$ equazioni quadratiche che si ottengono uguagliando a zero i minori di 2° ordine estratti dalla matrice

$$\begin{Vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \ldots x_q \\ x_1 & x_2 & x_3 \ldots x_{q+1} \end{Vmatrix}.$$

(³) Ved. HERMITE [2], Première partie, § I, ove l'A. dice di essere ad essa pervenuto simultaneamente a CAYLEY; ved. anche SALMON [5], p. 279.

(⁴) Cfr. WEIL [7]; gli sviluppi precedenti forniscono altresì l'estensione di tale interpretazione al caso $p=3$, il quale esula invece dalla trattazione di questo Autore.

La C è quindi curva base di un sistema lineare ∞^r di quadriche di S_{q+2} (*completo* rispetto a quella base, com'è facilmente dimostrabile).

Assimilate le quadriche di tale sistema a punti di un S_r proiettivo, si ottiene in questo una *varietà* U —definita sopra Γ— luogo dei punti rappresentativi di quadriche del sistema specializzate $q-1$ volte almeno; e si prova agevolmente che U risulta una varietà algebrica irriducibile, di dimensione q. Il generico punto di U rappresenta una $V_{q+1}{}^2$ di S_{q+2} passante per C e $q-1$ volte specializzata, contenente pertanto due sistemi ∞^1 di S_q generatori, tali che due S_q di diverso sistema stanno sempre in un S_{q+1} di S_{q+2}. Ne consegue che gli S_q generatori di due sistemi siffatti segano su C i gruppi di due $g_{q+1}{}^1$ (complete), mutuamente residue rispetto alla $g_{q+2}{}^{q+2}$ delle sezioni iperpiane. Reciprocamente, due $g_{q+1}{}^1$ siffatte consistono di due sistemi ∞^1 di gruppi di $q+1$ punti di C, tali che ogni gruppo di $q+1$ punti è congiunto da un S_q e due S_q di diverso sistema stanno sempre in un iperpiano di S_{q+2}; ne discende che tali S_q sono gli spazi generatori di una $V_{q+1}{}^2$ di S_{q+2}, passante per C, specializzata almeno $q-1$ volte.

Detta J la *varietà di Jacobi* della C [e quindi della (26)], definita su Γ, poichè i punti di J corrispondono birazionalmente alle g_{q+1} (complete) di C, così risulta che:

Fra le varietà U e J intercede una corrispondenza algebrica ∞^q d'indici $(1,2)$, definita su Γ, la quale ammette come punti di diramazione su U le imagini delle $V_{q+1}{}^2$ di S_{q+2} che passano per C e sono specializzate q volte (almeno, ma non di più stante l'irriducibilità di C).

Tali punti di diramazione provengono dunque dalle g_{q+1} (complete) di C *autoresidue* rispetto a $g_{2q+2}{}^{q+2}$. Poichè vi sono sempre 2^{2q} serie siffatte ([5]), si può asserire che:

I punti di diramazione distinti della suddetta corrispondenza algebrica fra U e J risultano esattamente in numero di 2^{2q}.

L'esistenza che ne consegue di altrettante diramazioni *isolate* per quella corrispondenza ∞^q, non è in contraddizione con la non singolarità di J e l'ipotesi $q>1$, in quanto tali diramazioni vengono manifestamente a cadere in punti *singolari* di

([5]) Cfr. ad esempio Enriques e Chisini [1], p. 394.

U. Stabiliremo inoltre qual'è il significato algebrico delle suddette diramazioni, e cioè delle g_{q+1} autoresidue rispetto alla $g_{2q+2}{}^{q+2}$, in relazione al dato polinomio (35).

All'uopo rileviamo che, quando $\varphi(z)$ si esprima con quest'ultima equazione, il punto O all'infinito dell'asse w risulta origine di due rami d'ordine q della curva (26), che ammettono ivi la retta all'infinito come comune tangente (ed anzi aventi in comune, oltre ad O, q punti successivi ad O) (6). Ne consegue che la coppia (O', O'') formata dalle origini di quei due rami, contata $q+1$ volte, costituisce un gruppo della $g_{2q+2}{}^{2}$ delle sezioni rettilinee della curva (26). Pertanto, quando *q è dispari*, la coppia (O', O'') contata $(q+1)/2$ volte definisce una g_{q+1} *autoresidua* rispetto alla $g_{2q+2}{}^{q+2}$ (7), la quale verrà in seguito considerata *come g_{q+1} degenere*.

Più in generale, qualunque sia q, considereremo come *degeneri* le varie g_{q+1} complete il cui doppio goda della proprietà di essere contenuto totalmente nel multiplo minimo secondo $q+1$ della $g_2{}^1$ segata sulla curva (26) dal fascio $z = \text{cost.}$ [e cioè di appartenere alla $g_{2q+2}{}^{q+1} = (q+1)\, g_2{}^1$]. È subito visto che le g_{q+1} degeneri si hanno tutte e sole aggregando, ai singoli gruppi di $kg_2{}^1 = g_{2k}{}^k$, $q+1-2k$ punti fissi scelti arbitrariamente fra i $2q+2$ punti doppi della $g_2{}^1$, ove k assuma uno qualunque dei valori $1, 2, \ldots, \left[\dfrac{q+1}{2}\right]$. Il numero complessivo di tali g_{q+1} degeneri vale pertanto

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{q+1}{2}\right]} \binom{2q+2}{q+1-2k} = 2^{2q} - \frac{1}{2}\binom{2q+2}{q+1}.$$

Notiamo inoltre che la suddetta $g_{2q+2}{}^{q+2}$ completa [definita

---

(6) Ved. Enriques e Chisini [1], pp. 93-94.

(7) Costituita precisamente sulla curva dai gruppi formati dalle singole coppie della sua $g_2{}^1$ e dalla coppia fissa (O', O'') contata $(q-1)/2$ volte.

(7) Costituita precisamente dai gruppi formati sulla curva dalle coppie della sua $g_2{}^1$ prese a $\dfrac{q+1}{2}$ a $\dfrac{q+1}{2}$. Tale g_{q+1} verrà quindi denotata con $\dfrac{q+1}{2}\, g_2{}^1$, designando più generalmente con $kg_2{}^1$ la $g_{2k}{}^k$ completa (d'ordine $2k$ e dimensione k) composta con $g_2{}^1$.

su (26) dalla $g_{2q+2}{}^2$ delle sezioni rettilinee] è quella formata dai gruppi di punti variabili segati sulla curva (26) dalle $(q+1)$-ple di rette variabili per O[costituenti la $g_{2q+2}{}^{q+1}=(q+1)g_2{}^1$], e dalle ∞^{q+2} curve d'ordine $q+1$:

$$w=\sigma(z) \tag{36}$$

(comprendenti la retta all'infinito contata un certo numero $q+1-s\geqq 0$ di volte), dove $\sigma(z)$ denoti un polinomio di grado $s\leqq q+1$ in z a coefficienti variabili.

Il gruppo di $2q+2$ punti così determinato dalla (36), può manifestamente venir rappresentato aggregando alla (36) la

$$\varphi(z)-[\sigma(z)]^2=0; \tag{37}$$

ed è chiaro ch'esso si riduce ad un gruppo di $q+1$ punti contato due volte se, e soltanto se, il primo membro della (37) si riduce ad un quadrato perfetto, ossia se esiste un polinomio $\tau(z)$ —di grado $\leqq q+1$— tale che risulti identicamente:

$$\varphi(z)=[\sigma(z)]^2+[\tau(z)]^2. \tag{38}$$

Un siffatto gruppo di $q+1$ punti resulta equivalente sulla (26) ad ∞^1 gruppi analoghi di $q+1$ punti, in corrispondenza ai quali $\varphi(z)$ si decompone in una somma di quadrati nel modo seguente

$$\varphi(z)=\left[\frac{\sigma(z)+t\,\tau(z)}{\sqrt{1+t^2}}\right]^2+\left[\frac{\tau(z)-t\,\sigma(z)}{\sqrt{1+t^2}}\right]^2,$$

che non considereremo però *distinto* da quello fornito dalla (38) (qui incluso per $t=0$). Possiamo quindi asserire che:

Un polinomio $\varphi(z)$ di grado pari $2q+2$ —a discriminante non nullo— ammette un numero finito di decomposizioni in somme di quadrati, del tipo (38) (ove σ e τ denotano polinomi di gradi $\leqq q+1$), fra loro distinte. In un'opportuna estensione del corpo dei coefficienti, il numero di tali decomposizioni risulta precisamente

$$\frac{1}{2}\binom{2q+2}{q+1}=\frac{1}{2}\binom{2q+1}{q+1}, \tag{39}$$

le decomposizioni stesse risultando riferite biunivocamente —nel modo testè indicato— alle g_{q+1} *autoresidue non degeneri precedentemente considerate sulla curva* C *o sulla* (26).

A riprova di questo risultato, possiamo osservare che (39) esprime altresì il numero delle decomposizioni de $\varphi(z)$ in un prodotto della forma

$$\varphi(z) = \alpha(z)\,\beta(z), \tag{40}$$

ove $\alpha(z)$ e $\beta(z)$ denotano due polinomi di gradi $q+1$ in z, definiti a meno dell'ordine e di due fattori costanti fra loro reciproci. D'altro canto, si passa da una decomposizione (38) ad una del tipo (40) e viceversa, semplicemente col porre

$$\alpha(z) = \sigma(z) + i\tau(z), \qquad \beta(z) = \sigma(z) - i\tau(z).$$

9. Se x denota un punto generico della curva C definita nel n. 8, il gruppo costituito da tale punto preso con *molteplicità* $q+1$ determina su C una g_{q+1}, la quale appartiene manifestamente a $\Gamma(x)$.

Del pari, gli ∞^1 spazi S_q congiungenti i punti dei singoli gruppi di questa $g_{q+1}{}^1$ costituiscono una quadrica $q-1$ volte specializzata e passante per C (n. 8), la quale pure risulta definita su $\Gamma(x)$. Poichè $q>1$, la suddetta g_{q+1} non contiene generalmente altri gruppi costituiti da un sol punto contato $q+1$ volte. Tenuto conto del n. 2, ne discende che:

Ciascuna delle varietà U e J (di cui al n. 8) *contiene una curva —definita intrinsecamente— trasformata birazionale in* Γ *della* C, *e quindi pure della curva iperellittica* (26).

BIBLIOGRAFIA

1. F. Enriques e O. Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. III (Bologna, Zanichelli, 1924).

2. Ch. Hermite, *Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indeterminées* (1er. mémoire), Journ. reine ang. Math., *52* (1856), 1-17; Oeuvres, I, 350-371.

3. B. Levi, *Saggio per una teoria aritmetica delle forme cubiche ternarie* (4

Note), Atti Acc. Sc. Torino *41* (1905-06), 553-578 e *43* (1907-08), 51-72, 155-176, 306-315.

4. B. LEVI, *Sobre un problema Diofantico,* Math. Notae, *5* (1945), 108-119.
5. G. SALMON, *Leçons d'algèbre supérieure,* 2e. éd. (Paris, Gauthier-Villars, 1890).
6. B. SEGRE, *Intorno agli spazi lineari situati sulle quadriche di un iperspazio,* Rend. Semin. Mat. Torino, *9* (1950), 137-144.
7. A. WEIL, *Remarques sur un mémoire d'Hermite,* Arch. d. Math. *5* (1954), 197-202.