FRAMMENTI RICOMPOSTI E INTEGRATI

I. LE CARATTERISTICHE DELLE CONICHE NELLO SPAZIO (*)

di FRANCESCO SEVERI, Roma (Italia)

Questa Nota contiene ricerche da me intraprese in passato e non condotte a suo tempo a termine. Integrate oggi, le pubblico nella speranza che possan giovare per studi ulteriori su quei problemi che aprono, senza risolverli.

Tratterò delle caratteristiche delle coniche (irriducibili) dello spazio.

Delle caratteristiche delle coniche sul piano mi occupai a due riprese (1916, 1940) (1), inquadrandone lo sviluppo in una teoria generale delle caratteristiche di sistemi algebrici qualunque di elementi geometrici, poggiata sulla teoria della base. Potei allora dare fondamento rigoroso e significato preciso alle caratteristiche, di Jonquières-Halphen-Zeuthen-Chasles, relative a condizioni (e a caratteristiche) semplici (cioè

(*) Nota in onore de BEPPO-LEVI, del quale apprezzo l'opera scientifica, elevata e piena di acume. Ricordo pure con piacere di aver avuto il Levi insegnante nel lontano 1896-97, quando egli era assistente di LUIGI BERZOLARI nella Cattedra di Torino ed io ero allora là allievo del 1º corso universitario.

(1) *Sui fondamenti della geometria numerativa e sulla teoria delle caratteristiche* (Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, 1916); *I fondamenti della geometria numerativa* (Annali di matematica, 1940). Questa ultima Memoria, con qualche complemento, fu tradotta in tedesco nel libro *Grundlagen der abzählenden Geometrie* (Wolfenbüttler Verlagsandlt, 1948). In questa Memoria si citano altresì i lavori di VAN DER WARDEN sull'argomento.

di dimensione 1) e mostrai come il numero e la qualità delle caratteristiche sieno in relazione con la scelta delle coniche degeneri delle varie specie, che voglian rifutarsi dalle soluzioni, sicché p. es., contrariamente a quanto pensava Chasles, l'espressione delle condizioni semplici mediante due caratteristiche, è valevole per certi tipi di condizioni e non per certi altri, quando si vogliano escludere le coniche degeneri di 3ª specie, il cui studio critico, iniziato da Halphen, fu approfondito nella mia Memoria del 1916.

Sotto lo stesso profilo, nella mia Memoria del 1940, fu considerata l'espressione, dovuta a Cremona, d'una condizione doppia mediante le caratteristiche doppie (cioè di dimensione 2), ponendola in relazione con le varie specie di coniche degeneri; similmente per le condizioni di dimensione maggiore (fino a 5).

Qui mi limito a studiare le caratteristiche delle condizioni semplici imposte alle coniche dello spazio, in quanto tali condizioni non abbiano particolare riguardo alle varie specie di coniche degeneri. Si presentano così soltanto due caratteristiche, già considerate in prima istanza da Schubert (²), e cioè le caratterische μ, ν, ove μ è il simbolo della condizione semplice, perché una conica di S_3 abbia il suo piano passante per un dato punto e ν la condizione (pure semplice) perché una conica di S_3 s'appoggi a una data retta.

Per altre condizioni semplici, quando si escludano dalle possibili soluzioni i tipi più generali di coniche degeneri, occorre introdurre un'altra caratteristica: è la condizione semplice ρ perché una conica tocchi un piano dato (³). Quali caratteristiche

(²) *Kalkul der abzählenden Geometrie*, Leipzig, 1879.

(³) Nelle mie Note *Ricerche sulle coniche secanti delle curve gobbe; Sopra le coniche che toccano e secano una o più curve gobbe* (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, maggio 1900 e novembre 1900) le caratteristiche μ, ν servon per esprimere, nella prima, le condizioni d'appoggio delle coniche dello spazio ad una o più curve gobbe; e nella seconda le condizioni d'appoggio e di contatto son espresse mediante le μ, ν, ρ. Le deduzioni non presuppongono una teoria generale delle caratteristiche (la quale non era allora neppure pensabile), ma soltanto l'uso delle espressioni, calcolate da Schubert o da altri con la conservazione del numero, di alcune condizioni geometriche fondamentali (passaggio d'una conica per un punto; valori numerici dei simboli $\nu^8, \mu\nu^7, \mu^2\nu^6, \mu^3\nu^5$; condizione perché una conica tocchi una data retta; condizione perché una conica tocchi un piano dato in un punto dato). Vanno occorrano ulteriormente per condizioni semplici in relazione a tipi particolari di coniche degeneri o quali caratteristiche occorrano per le condizioni di dimensione > 1, non risulta dalla mia ricerca: è un interessante problema da risolvere. Resta pure da rispondere alla questione d'inquadrare nella teoria delle caratteristiche delle coniche spaziali, i vari tipi di coniche degeneri, i quali non son determinati in via assoluta, ma dipendono in parte dal genere di rappresentazione adottato pel sistema algebrico delle ∞^8 coniche spaziali. Uno studio in proposito, rappresentando le coniche coi complessi quadratici delle rette a ciascuna di esse appoggiate, è stato fatto da Semple. Ma con altre rappresentazioni si possono ottenere altri tipi di degenerazioni.

Per le coniche del piano, rappresentate nel modo naturale sul loro modello minimo, che è lo spazio lineare S_5, i vari tipi di degenerazione sono tutti forniti dalle *coniche complete* (considerate pel primo da Study), ognuna delle quali è l'insieme degli elementi punto-retta dei punti d'una conica-luogo e delle tangenti ad essa aderenti (4).

————

Profonde differenze, nella natura delle questioni e nelle difficoltà che si presentano, si riscontrano nei problemi numerativi concernenti varietà di elementi, quando queste non son *lineari*, come lineare è invece il sistema delle coniche d'un piano (5).

---

ricordate altresì due Note di BERZOLARI, *Sulle coniche appoggiate in più punti a date curve algebriche* (Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 1900), che contengono alcune delle formule deducibili dalla mia prima Nota (maggio 1900). L'A. si limita a dichiarare d'aver usato il metodo dello spezzamento in rette delle date curve e riferisce soltando i risultati, senza gli sviluppi. Il mio valente ex professore (che non era allora più a Torino, ma a Pavia) si limitò a ciò, avendo constatato che il proprio scolaro aveva già pubblicato i risultati proprii, con amplio sviluppo.

(4) Ved. la mia Memoria del 1940 citata in (1) pagg. 206, 211.

(5) Ricordo che ho chiamato *lineare* una varietà non singolare birazionalmente equivalente, senza eccezioni alla biunivocità, ad uno spazio lineare. *Ordine invariantivo* (relativo) di una varietà è l'ordine minimo del modelli proiettivi senza eccezioni e senza singolarità (quando essi esistono). Le varietà lineari son quelle d'ordine invariantivo uno. Le varietà grassmanniane e di G. SEGRE sono di ordine invariantivo > 1.

Più precisamente: l'origine delle maggiori difficoltà non è tanto la non linearità della varietà degli elementi considerati, quanto il fatto che *per una tal varietà può addirittura cadere la nozione di ordine invariantivo*. Ciò avviene allorché nessun modello non singolare della data varietà di elementi non può giammai rappresentare birazionalmente senza eccezioni la varietà. In tal caso la varietà si dirà *intrinsecamente singolare*; mentre è *intrinsecamente non singolare* nel caso contrario.

Così p. es., una quartica sghemba razionale con una cuspide è una varietà ∞^1 di punti d'ordine invariantivo 1 (intrinsecamente non singolare); mentre una quartica sghemba razionale con un nodo è intrinsecamente singolare, in quanto, sopra ogni suo modello birazionale non singolare, il nodo, origine di due rami, è sempre rappresentato da due punti distinti.

Se di una varietà Σ di elementi su cui si abbiano da risolvere problemi numerativi, i quali si traducono sempre in problemi d'intersezione entro la varietà ambiente, non esistono che modelli birazionali senza eccezioni singolari oppure modelli birazionali non singolari con eccezioni, la risoluzione dei problemi stessi offre particolari difficoltà. Invero, i concetti *d'intersezioni virtuali e di molteplicità d'intersezione* delle varietà entro una varietà ambiente, da me considerati in varie memorie (e che costituiscono l'indispensabile e risolutivo mezzo d'indagine in quest'ordine di problemi) sono stati introdotti sotto l'ipotesi della non singolarità della varietà ambiente.

Non è impossibile trasportare tali concetti anche alle varietà irriducibili dotate di punti singolari. Se V è una tal varietà e W l'insieme subordinato de'suoi punti singolari, i gruppi d'intersezione virtuale e le molteplicità d'intersezione relative vanno allora definiti (e ciò é possibile, ma non è stato ancor fatto) sulla varietà $V - W$.

D'altro canto, se $\overline{V}$ è un modello birazionale non singolare della data varietà Σ d'elementi e $\overline{W}$ l'insieme dei punti che rappresentano gli elementi di Σ eccezionali (cioè quelli le cui imagini su $\overline{V}$ non sono singolarmente individuate) in un problema d'intersezione su $\overline{V}$, riferito a un dato problema numerativo su Σ, occorre determinare non sontanto i gruppi virtuali d'intersezione, che cadono fuori di W, ma determinare pure, attraverso opportune considerazioni di limite, le intersezioni che cadono su W, rappresentanti soluzioni valide, in relazione al problema numerativo posto.

Della varietà ∞^8, Σ, delle coniche dello spazio, indicheremo due modelli nel n. 1. Uno di questi modelli è singolare; l'altro è non singolare, ma non è biunivoco senza eccezioni. Non credo che sia possibile costruire un modello non singolare senza eccezioni di Σ; reputo cioè che Σ sia intrinsecamente singolare.

Le varietà lineari, le grassmanniane e le varietà di Segre sono intrinsecamente non singolari; mentre p. es. la varietà ∞^4 delle coppie (non ordinate) di punti d'un piano è birazionalmente equivalente senza eccezioni alla varietà delle corde d'una superficie di Veronese ed è intrinsecamente singolare (nel modello considerato la superficie di Veronese è luogo di punti cuspidali).

Una volta tracciata sopra un modello M del sistema delle coniche (irriducibili) spaziali, la varietà algebrica E rappresentativa d'un certo tipo di coniche degeneri, se N è una sottovarietà di M rappresentativa delle coniche soddisfacenti ad una data condizione algebrica c, di dimensione $8-k$, designata con N' una varietà algebrica pura di dimensione $8-k$, se esistono coppie di varietà N, N' le cui intersezioni sieno in numero finito e *situate tutte fuori di* E(6), sorge il problema di enumerare queste soluzioni, anzi di esprimere la condizione c con una conveniente combinazione lineare (a coefficienti positivi o negativi o nulli) di un certo numero finito di condizioni caratteristiche, aventi la stessa dimensione $8-k$ di c; così che il «calcolo simbolico» con tali caratteristiche renda più agevole il calcolo del numero di quei punti comuni.

Le N, N', di cui si suppone l'esistenza, si dicono allora in *reciproca posizione generica rispetto al tipo di degenerazione* E. Nella mia Memoria del 1940, poggiando sulla risoluzione numerativa del problema generale della base, si prova che esiste sempre un sistema di un numero finito di caratteristiche per

(6) Pei punti del gruppo (virtuale = effettivo) NN', eccezionali per la rappresentazione di Σ su M, valgono le considerazioni consuete; in quanto essi sieno fuori di E.

ogni prefissato tipo di degenerazioni; ma il numero delle caratteristiche dipende, come dicemmo, dal tipo delle degenerazioni, che si vogliano escludere dalle soluzioni accettabili.

Così p. es. nei riguardi delle coniche del piano, se non ci si preoccupa di volere soltanto coniche non degeneri, l'unica caratteristica semplice (data da Jonquières) è la caratteristica μ perché una conica passi per un punto, mentre quando si vogliano escludere le coniche degeneri di tipo più generale, che son le coniche degeneri di 1ª e di 2ª specie (7), le caratteristiche semplici sono le due μ, ν di Jonquières-Chasles (ν condizione perché una conica tocchi una retta data). Ma queste caratteristiche non bastano più quando si vogliano accettare fra le soluzioni le coniche degeneri di 1ª e di 2ª specie, mentre si vogliano escludere quelle di 3ª specie, che son casi particolari delle precedenti.

Ci siamo fermati su queste considerazioni per chiarire meglio i termini del nostro problema, che è quello di trovare le caratteristiche delle coniche dello spazio, senza qui preoccuparci delle soluzione degeneri.

1. Indichiamo in primo luogo qualche modello proiettivo del sistema Σ, ∞^8, delle coniche dello spazio. S'intende che parliamo del sistema delle coniche irriducibili (cui appartengono come elementi d'accumulazione le coniche *piane* riducibili). Vi è invero un altro sistema di ∞^8 coniche spezzate in coppie di rette sghembre, che non ha qui interesse ad esser considerato.

Un primo modello s'ottiene dualizzando, considerando cioè il sistema $\overline{\Sigma}$ dei coni quadrici dello spazio. Nello spazio lineare S_9 delle quadriche di S_3, il predetto sistema è un'ipersuperficie algebrica (irriducibile) del 4º ordine, rappresentata dall'uguagliare a zero il discriminante dell'equazione d'una quadrica.

Però questo modello è poco opportuno, non soltanto perché non pone subito in evidenza la razionalità del sistema $\overline{\Sigma}$, ma anche perché è singolare.

(7) Una conica degenere di 1ª specie, consta, come luogo, di due rette distinte e come inviluppo del fascio delle rette passanti pel loro punto comune, contato doppiamente. Una conica degenere di 2ª specie è la duale della precedente. Le coniche degeneri di 1ª specie sono, come luoghi, ∞^4 e come inviluppi (doppi ∞^2; quelle di 2ª specie sono, come luoghi, doppi, ∞^2, e come inviluppi ∞^4.

Un modello non singolare è dato dal teorema seguente:

Il sistema Σ *delle* ∞^8 *coniche (irriducibili) dello spazio è birazionalmente equivalente alla varietà di Segre* M *prodotto di un* S_3 *per un* S_5.

Avvertiamo anzitutto che da ciò consegue senz'altro la irriducibilità e la razionalità di Σ.

Per dimostrare il teorema, fissiamo uno spazio lineare S, di ∞^3 punti P, il quale sia imagine proiettiva del sistema degli ∞^3 piani dello spazio lineare ∞^3, π, dove consideriamo Σ; ed uno spazio lineare S', di ∞^5 punti P', imagine proiettiva del sistema lineare degli ∞^5 coni quadrici aventi il vertice in un punto O di π.

Denotate con x_0, x_1, x_2, x_3 le coordinate proiettive omogenee d'un punto di π e con

$$(1) \qquad \Sigma a_{ij}\, x_i\, x_j = 0 \; (i, j = 0, 1, 2)\,;$$

$$(2) \qquad \Sigma\, b_h\, x_h = 0 \quad (h = 0, 1, 2, 3)$$

le equazioni rispettive d'un cono quadrico Γ avente il vertice nel punto O $(x_0 = x_1 = x_2 = 0, x_3 = 1)$ e l'equazione d'un piano di π, cosicché il sistema delle (1), (2) è l'equazione d'una conica γ di Σ, assumeremo

$$x_{ijh} = a_{ij}\, b_h$$

a coordinate omogenee d'un punto di uno spazio lineare S_{23} dove intendiamo immersa la varietà di C. Segre $M = S \times S'$, d'ordine 56, il cui punto generico viene ad esser imagine d'una coppia P, P' e quindi d'una conica γ, essendoci così corrispondenza birazionale fra i punti di M e le coniche γ di Σ.

La corrispondenza birazionale fra Σ, M è biunivoca senza eccezione fra gl'intorni di due elementi generici di Σ, M; precisamente fra l'intorno di una conica (irriducibile o riducibile) γ di Σ, il cui piano non passi per O, e l'intorno del corrispondente punto imagine di M, che è univocamente determinato in ambedue i casi, perché un solo cono Γ proietta una tal conica.

Studiamo gli elementi di Σ, che fanno eccezione alla biunivocità della corrispondenza fra Σ ed M.

Le ∞^5 coniche d'un piano α di π, non passante per O, son rappresentate su M dai punti d'un S_5 del tipo $P \times S'$. Se il piano α passa per O e lo si associa ad un cono Γ, che non lo contenga come parte, la coppia α, Γ è rappresentata da un punto di M, imagine della conica degenere in cui α sega Γ. Questa conica però proviene da ∞^3 coppie α, Γ, perché i Γ che la contengono costituiscono un sistema *lineare* ∞^3. Le imagini di α, Γ sono dunque in realtà infinite, distribuite sopra un S_3 di M. Pertanto le ∞^4 coniche spezzate in coppie di rette per O son eccezionali per la corrispondenza, nel passaggio da Σ ad M e il luogo dei loro punti imagini su M è una varietà ∞^7 W, in quanto due generici di quegli S_3 non hanno alcun punto comune.

Se poi α passa per O e viene associato ad un cono Γ, che lo contenga come parte, alla coppia α, Γ, rappresentata da un punto determinato di M, vengono a corrispondere tutte le ∞^5 coniche contenute in quel piano. Di coppie α, Γ siffatte ne esistono ∞^4 e i loro punti imagini riempiono una varietà ∞^4, Z, luogo di punti eccezionali, nel passaggio da M a Σ.

Poiché fra le coniche di un piano α per O vi sono anche le ∞^2 formate da coppie di rette per O, la varietà Z è una sottovarietà di W.

Si sono così determinate tutte le possibili eccezioni alla biunivocità della rappresentazione birazionale di Σ su M.

Vediamo come restano determinate le singole coniche γ di un piano α per O, in quanto hanno anch'esse le loro imagini su M. Consideriamo all'uopo lo S_5 di M che rappresenta le coppie α, Γ, con γ fisso, e sia Q un suo punto qualunque. Esso è su M centro di un insieme d'ampiezza decrescente di punti imagini di coniche i cui piani non passan per O. Dicasi H la varietà ∞^7 delle coniche di Σ, che hanno i piani passanti per O. Otteniamo allora, nell'insieme $\Sigma - H$, in corrispondenza ai predetti insiemi, un'infinità d'insieme d'ampiezza decrescente, i quali hanno una conica d'accumulazione γ (8) situata sopra un piano per O. Questa conica è individuata, perché, viceversa, ad ogni

(8) In virtù d'un principio di Bolzano generalizzato. Ved. la mia Nota *Su alcune questioni di topologia infinitesimale* (Annales de la Société polonaise de mathématique, 1930).

conica di acumulazione dei predetti insieme, a causa della continuità della corrispondenza, corrisponde un punto d'accumulazione degl'intorni di Q su M.

Così la corrispondenza birazionale fra M e Σ si estende per continuità e senza ambiguità anche alle coniche di H, che sfuggivano alla determinazione generale mediante le coppie α, Γ. Era naturale che così fosse, anche senza la considerazione svolta, che nel dominio algebrico rappresenta un lusso, perchè una corrispondenza birazionale fra due varietà algebriche è dovunque definita quanto è assegnata fra tutti i loro punti, ad eccezione di certe loro sottovarietà algebriche, in numero finito o infinito, ma che, se sono in numero infinito, non la riempiano.

Nel modo sopra indicato, anche le imagini delle ∞^4 coniche spezzate in coppie di rette per O, in quanto si riguardino quali coniche d'accumulazione di coniche non situate in piani per O, hanno ciascuna la propria imagine individuata su M. E la totalità di tali imagini costituisce una varietà algetrica ∞^4 in corrispondenza birazionale col sistema di quelle ∞^4 coniche. Tale varietà è tracciata sulla varietà eccezionale W.

Osservazione. Un'altra rappresentazione di Σ si può ottenere mediante le *forme di* Cayley o *forme associate* alle coniche irriducibili γ di S_3 (9). Sulla quadrica kleniana Q di S_5 rappresentativa delle rette di S_3, i complessi quadratici delle rette appoggiate alle singole coniche son rappresentata da ∞^8 ipersuperficie irriducibili, appartenenti totalmente al sistema lineare segato su Q dalle forme quadratiche dello spazio. Il sistema di queste superficie in uno spazio lineare S_{19} rappresentativo dei complessi quadratici è rappresentato da una varietà Ω_8 in corripondenza birazionale col sistema Σ delle γ. Ma non si evitano così i punti multipli, nè le eccezioni alla biunivocità (in relazione a qualche tipo di coniche degeneri); sicchè la complicazione del modello non offre utili compensi.

2. Per ottenere le caratteristiche semplici delle coniche γ, se-

(9) È noto che la forma cui alludiamo fu considerata da CAYLEY nel 1860 e da me per una V_k qualunque di S_r nel 1915 (nella Memoria sulle grassmanniane) sotto la forma grassmanniana, che è la più ampia, e può scriversi sotto due forme duali, in coordinate di punti o d'iperpiani. Scritta mediante coordinate d'iperpiani coincide con la *zugeordnete Form* di VAN DER WARDEN e CHOW, data da questi autori 22 anni dopo (1937).

condo il nostro punto di vista, bisogna passare attraverso la base delle ipersuperficie (varietà ∞^7) tracciate sopra la varietà M di Segre, in quanto le γ soddisfacenti ad una data condizione semplice (si sottintende sempre: pura!) son rappresentate su M da un'ipersuperficie pura.

Ora questa base è data (addirittura quale base minima) dalle due ipersuperficie seguenti: prodotto I d'un piano dello spazio S, dei punti P, per lo spazio S', dei punti P'; prodotto J di un iperpiano dello spazio S' per lo spazio S (10).

L'ipersuperficie I di M è l'imagine delle coniche γ, i cui piani passano per un punto di S_3, ossia delle coniche soddisfacenti ad una data condizione μ. L'ipersuperficie J rappresenta il sistema delle sezioni piane d'un sistema lineare ∞^4 di coni Γ. Poiché, al variare di ques'ultimo sistema, il primo varía in un sistema razionale e si conserva pertanto linearmente equivalente a se stesso, si può assumere come ipersuperficie J l'imagine del sistema delle sezioni piane degli ∞^4 coni Γ, che passano per una retta u della stella O, ossia delle ∞^7 coniche appoggiate ad u e dunque soddisfacenti ad una condizione ν. Il fatto che la retta u passi per O e che il sistema delle ∞^4 coniche col punto doppio O si muti nella varietà eccezionale W, non importa alcun disturbo. Il sistema delle ∞^7 coniche appoggiate ad u resta irriducibile.

Si conclude che:

Le caratteristiche semplici delle coniche irriducibili di S_3 *(considerate a prescindere da ogni esclusione eventuale delle coniche degeneri) sono le condizioni* μ, ν *rispettivamente perché una conica abbia il piano passante per un punto dato e perché una conica s'appoggi ad una retta data.*

Si trovano subito anche le caratteristiche di dimensione $d \leqq 8$, tenuto conto che la base delle varietà ∞^6 su M consta

(10) La base sulla varietà di Segre prodotto di più spazi lineari contenuta in un enunciato occasionale della Memoria di SEVERI sulle grassmanniane (1915), dopo un tentativo di BORDIGA (1918), di cui MARTINELLI riconobbe l'inefficienza, fu dimostrata algebricamente in una mia breve osservazione della rubrica "Problemi, risultati e discussioni" in Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni", 1941, p. 112; e dipoi più diffusamente e semplicemente nella mia Memoria *Fondamenti per una teoria generale dei connessi* (Acta Salmanticensia, 1950, p. 15). Dal punto di vista topologico il risultato è ovvia conseguenza della struttura dei cicli sul prodotto topologico di più varietà topologiche.

dei prodotti di un piano di S e d'un iperpiano di S' o d'una retta di S per S' o d'un S_3 di S' per S e analogamente per le varietà di dimensioni 5, 4, 3, 2, 1. Si perviene così alla conclusione che:

Quando le condizioni d'una determinata dimensione $d \leqq 7$, imposta alle coniche irriducibili dello spazio, si considerano non escludendo a priori le coniche degeneri, le caratteristiche relative sono tutte le condizioni simboleggiate da $\mu^i \nu^j (i, j = 0, 1, \ldots, d;\ i + j = d)$.

Osservazione. Nella mia Nota numerativa ricordata, del 1900, dove si esprimono simbolicamente le condizioni perché una conica si appoggi in $1, 2, 3, \ldots, 7, 8$ punti ad una data curva algebrica (non singolare), le relazioni stesse son ottenute senza il principio della conservazione del numero, che non potrebbe in quel caso invocarsi, perché una curva irriducibile non può mai esser limite d'una curva riducibile, le cui parti sieno prive di punti comuni. Ciò che si presuppone è soltanto l'esistenza di un polinomio (omogeneo nelle caratteristiche di data dimensione d ed a coefficienti polinomiali nell'ordine e nel rango della curva, i quali sono caratteri che s'addizionano quando si considera la somma di due curve sghembe prive di punti comuni); polinomio che valga sia per curva irriducibili come per curva riducibili.

Questo soltanto invero occorre per scrivere le equazioni funzionali, che a mano a mano bisogna integrare.

L'esistenza di un polinomio siffatto consegue senz'altro dall'espressione di ciascuna varietà ∞^{8-d} di M mediante le varietà della base di dimensione $8-d$, atteso che l'espressione inerente alla somma di due di quelle varietà è la somma delle espressioni relative agli addendi.

Così il calcolo compiuto in quella mia Nota resta fondato su basi del tutto rigorose, in quanto la conservazione del numero vien usata soltanto pel calcolo dei valori numerici di $\mu^i \nu^j$ $(i, j = 0, \ldots, 8;\ i + j = 8)$ e tale applicazione è legittima, perché si tratta di prodotti di condizioni pure; epperò, in ogni caso, di condizioni pure (anche se non vogliamo attardarci a dimostrare che trattasi di condizioni addirittura irriducibili) (11).

(11) Mi riferisco qui al campo di validità del principio della conservazione del numero, quele lo delimitai nel 1912 (Rendiconti del Circolo matematico di

3. Riferiamoci p. es. al calcolo numerico di ν^8, cioè del numero delle coniche appoggiate ad otto rette generiche dello spazio $a_1, a_2, \ldots, a_8$. Il sistema delle coniche appoggiate ad a_i, sopra M, è rappresentato (birazionalmente, ma con eccezioni, che cadono su W) da un'ipersuperficie $\Omega_7{}^i$, prodotto d'un S_3 per un S_4 e priva dunque di punti multipli. E siccome quel sistema contiene ∞^6 coniche degeneri di 1ª specie, così $\Omega_7{}^i$ incontra la varietà W, imagine delle coniche degeneri, in una varietà di dimensione normale.

Analogamente, l'intersezione di W con un numero di varietà $\Omega_7{}^i$, minore o uguale ad 8, ha dimensione normale. Otto $\Omega_7{}^i$ inoltre s'incontrano in un numero finito di punti, perché il sistema lineare a cui esse appartengono totalmente non è composto (12) e quei punti comuni son fuori di W, cioè *sono tutti imagini di coniche irriducibili.*

Infatti non vi sono coniche degeneri di 1ª specie (nè quindi di altre specie, casi particolari delle precedenti) appoggiate a 8 rette date, perché, atteso che non vi sono rette appoggiate a 5 o più rette generiche, una conica spezzata in due rette appoggiate alle 8 rette non potrebbe che esser formata da due rette appoggiate ciascuna a quattro di esse. Di coppie siffatte ve ne è però un numero finito a due a due sghembe, per la genericità delle 8 rette date.

Il numero delle coniche appoggiate a 8 rette è stato più volte calcolato:

Vi sono 92 coniche (irriducibili) incontranti 8 rette generiche dello spazio (13).

Questo risultato richede però un'ulteriore critica, in ordine alle molteplicità d'intersezione in ciascuno dei punti comuni a quelle 8 ipersuperficie di M, allorché, applicando la conservazione del numero, si ricorre ad una specializzazione de quelle ipersuperficie. Altrimenti non si è sicuri che il numero delle intersezioni (semplici) ottenute in corrispondenza alla a_i gene-

Palermo). Veggansi pure, in proposito, le Memorie citate in (1) e le mie Lezioni, *Introduzione alla geometria algebrica. Geometria numerativa* (Edizioni universitarie Docet, fascicolo I e II, Roma, 1948-49).

(12) Ved. a chiarimento di ciò la mia Nota di Salamanca citata in (11).

(13) Lüroth (Crelle, 1868); Hierholzer (Math. Annalen, 1870); Schubert (Kalkül, 1879), p. 95.

riche sia proprio 92 e non maggiore. Questa osservazione non fu considerata (nè poteva esserlo), quando poco meno d'un secolo fa, il problema fu trattato per la prima volta.

Varrebbe la pena di completare la ricerca in tale direzione. Ci limiteremo a dare una rapida indicazione d'un modo di calcolare ν^8, mediante convenienti specializzazioni delle a_i.

Si calcoli anzitutto il numero delle coniche appoggiate a 4 rette e passanti per due punti. E' il valore numerico del simbolo:

$$(\mu\nu - 2\mu^2)^2 \nu \text{ } (^{14}).$$

Prendendo una dette 4 rette complanare coi due punti si trova facilmente che il predetto numero è 4.

Si calcolino di poi le coniche passanti per un punto appoggiate a 6 rette. E' il valore del simbolo

$$(\mu\nu - 2\mu^2)\nu^6.$$

Poniendo due delle sei rette in un piano col punto, si trova il valore 18.

Per calcolare finalmente ν^8 si pongano tre delle 8 rette a_1, a_2, a_3 su un piano α. Si hanno allora per ognuno dei punti $a_1 a_2, a_2 a_3, a_3 a_1$, 18 soluzioni. In tutto dunque 54. Vi sono poi altre coniche, ma per tale specializzazione sono degeneri; e precisamente spezzate in una retta b del piano α e in una retta residua c. Poiché b non può appggiarsi a più di quattro delle rette $a_4, \ldots, a_8$, essa deve contenere una almeno delle traccie delle $a_4, \ldots, a_8$ su α. Se ne contiene una sola, p. es. la traccia di a_4, siccome b deve incontrare c, quella retta congiunge la detta traccia con uno dei punti dove α è tagliato da una delle due rette appoggiate alle a_5, a_6, a_7, a_8. Si hanno così 10 soluzioni. Se poi b congiunge le traccie di due delle a, p. es. le traccie di a_4, a_5, su α, allora c deve appoggiarsi a b e ad a_6, a_7, a_8.

Si hanno così $\binom{5}{2} \times 2 = 20$ soluzioni. Il numero totale

(14) Ved. p. es. la Memoria del 1940 citata in (1).

delle soluzioni contate è pertanto

$$8 + 54 + 10 + 20 = 92.$$

Ma resta da provare, come si è detto, che in ognuna delle imagini di tali soluzioni la molteplicità d'intersezione delle speciali ipersuperficie considerate è 1.

4. La base μ, ν delle caratteristiche semplici su Σ, a prescindere dalle coniche degeneri, ha per imagine la base I, J delle ipersuperficie di M, a prescindere da W e dall'imagine delle ∞^7 coniche degeneri. Precisiamo le relazioni di passaggio da Σ ad M, indispensabili anche per l'interpretazione delle caratteristiche multiple. Sia N l'ipersuperficie di M rappresentativa delle ∞^7 coniche di Σ appoggiata ad una generica retta a di π. È facile provare (con riferimento alla teoria dei connessi sviluppata nella mia Nota di Salamanca, 1950) che il connesso N ha sopra μ gl'indici 2,1 rispettivamente nelle b_h e nelle a_{ij}. Invero, a un generico punto P' di S' corrispondono nel connesso le ∞^2 sezioni piane d'un dato cono Γ, appoggiate ad u, e esse son rappresentate in S da una coppia di piani, ossia da un'equazione di 2° grado delle b_h; mentre, dato un generico punto P di S, ad esso corrispondono nel connesso le coniche segate su quel piano dal sistema lineare degli ∞^4 coni Γ passanti per u, le quali son rappresentate in S' da un'equazione lineare nelle a_{ij}. Per tanto, sopra U:

$$N \equiv 2I + J.$$

Se poi u varia e tende a una retta $\bar{u}$ della stella O, si ottiene sopra U:

$$N \equiv J + W,$$

perchè le ∞^7 coniche irriducibili appoggiate ad $\bar{u}$, costituiscono, in Σ, il limite delle ∞^7 coniche irreducibili appoggiate ad u. Il confronto delle due precedenti equivalenze lineari, porge $W \equiv 2I$.