RESOLUCION GEOMETRICA DE LAS ECUACIONES DE TERCERO, CUARTO Y QUINTO GRADO

por SERGIO SISPÁNOV, San Juan (Argentina)

Se sabe que mediante la sustitución $X = x - \frac{1}{n} A_1$ la ecuación *completa* de enésimo grado

$$f(X) = X^n + A_1 X^{n-1} + A_2 X^{n-2} + \dots + A_{n-1} X + A_n = 0$$

se reduce a la forma

$$x^n + a_1 x^{n-2} + a_2 x^{n-3} + \dots + a_{n-2} x + a_{n-1} = 0$$

en donde

$$a_1 = \frac{1}{(n-2)!} f^{(n-2)} \left(-\frac{1}{n} A_1\right), \quad a_2 = \frac{1}{(n-3)!} f^{(n-3)} \left(-\frac{1}{n} A_1\right),$$

$$\dots, a_{n-2} = \frac{1}{1!} f' \left(-\frac{1}{n} A_1\right), \quad a_{n-1} = f\left(-\frac{1}{n} A_1\right)$$

y el término con x^{n-1} desaparece. En vista de esto, nos limitaremos a considerar en adelante las ecuaciones *reducidas*.

§ 1. Para resolver la ecuación *cúbica*

$$x^3 + 3 a_1 x - 2 a_2 = 0 \tag{1}$$

busquemos puntos de intersección de las curvas

$$x = y - \frac{a_1}{y} \quad \text{e} \quad y = \frac{a_1^2 + tx}{t - a_1 x} \tag{2}$$

siendo t una constante. La primera de ellas es una *hipérbola* con asíntotas $y=0$ e $y=x$ que se cortan en el centro O de la curva (fig. 1). Su semieje real $OA = \sqrt{2|a_1| \cdot (\sqrt{2} \mp 1)}$ forma con el eje OX el ángulo de 112°30' o de 22°30', según que sea positivo o negativo el coeficiente a_1. La segunda curva, es una *hipérbola equilátera* cuyas asíntotas, paralelas a los ejes coordenados, se cortan en el centro $C\left(\frac{t}{a_1}\,;\,-\frac{t}{a_1}\right)$. El semieje real $CB = \sqrt{2(t^2 + a_1^3) : |a_1|}$ forma con el eje OX el ángulo de 135°.

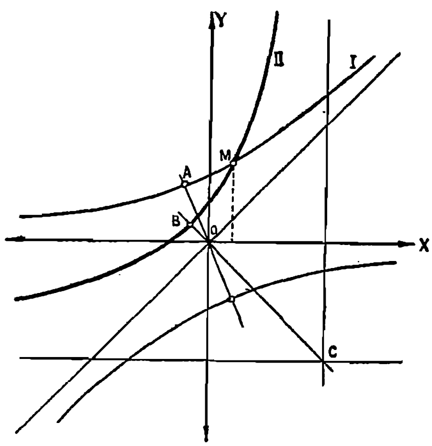

Fig. 1

A fin de encontrar las obscisas de los puntos de intersección M de dos hipérbolas, sustituimos en la primera ecuación (2) la expresión para y que nos da la segunda:

$$x = \frac{a_1^2 + tx}{t - a_1 x} - a_1 \frac{t - a_1 x}{a_1^2 + tx}$$

de donde

$$x(a_1 x - t) \cdot (t x + a_1^2) + (t x + a_1^2)^2 - a_1(a_1 x - t)^2 = 0.$$

Efectuando las operaciones indicadas y reduciendo términos semejantes se obtiene

$$a_1 t \,.\, x^3 + 3\, a_1^2\, t \,.\, x - a_1(t^2 - a_1^3) = 0$$

o dividiendo por $a_1 t$

$$x^3 + 3\, a_1\, x - \left(t - \frac{a_1^3}{t}\right) = 0.$$

Para que la ecuación obtenida sea idéntica a la propuesta (1) hacemos

$$t - \frac{a_1^3}{t} = 2\, a_2$$

es decir

$$t^2 - 2\, a_2\, t - a_1^3 = 0.$$

Las raíces de esta *resolvente cuadrada* son

$$t = a_2 \pm \sqrt{a_2^2 + a_1^3}. \qquad (3)$$

Para hallar las ordenadas de los puntos M reemplazamos x en la segunda ecuación (2) por su expresión que suministra la primera:

$$y\left[t - a_1\left(y - \frac{a_1}{y}\right)\right] = a_1^2 + t\left(y - \frac{a_1}{y}\right)$$

o bien

$$y(a_1 y^2 - t\, y - a_1^2) + (t\, y^2 + a_1^2\, y - a_1\, t) = 0.$$

Efectuando las operaciones y simplificando por a_1 resulta

$$y^3 - t = 0 \quad \text{de donde} \quad y = \sqrt[3]{t}.$$

La primera de las igualdades (2) nos da ahora

$$x = \sqrt[3]{t} - \frac{a_1}{\sqrt[3]{t}} \tag{4}$$

en donde t se determina mediante la relación (3).

En la fórmula (4) que no difiere esencialmente de la de Cardano, se puede multiplicar el radical $\sqrt[3]{t}$

$$\text{por} \qquad \omega = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) \qquad \text{y por } \frac{1}{\omega} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}),$$

llegando así a las expresiones para tres raíces.

En el caso de una raíz real las hipérbolas I y II son reales y se cortan en un punto real. En el caso de tres raíces reales la hipérbola II se hace imaginaria, pero corta a la I en tres puntos de abscisas reales. Las expresiones para x subsiste también en el caso de ser $a_1 = 0$, eligiendo $t \neq 0$.

§ 2. Para resolver la ecuación *cuártica*

$$x^4 - 2a_1 x^2 + 4a_2 x - 2a_3 = 0 \tag{5}$$

busquemos puntos de intersección de las curvas

$$x = \frac{1}{2\alpha}(y^2 + 2\alpha y - \beta) \qquad \text{e} \qquad y = \frac{x^2 + 2\alpha x + t}{2(x+\alpha)} \tag{6}$$

siendo

$$\alpha = \frac{a_2}{t - a_1}, \quad \beta = \frac{1}{2}(t + a_1) \tag{7}$$

y t cierta constante.

La primera es una *parábola* con el vértice

$$A\left[-\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\beta}{\alpha}\right); -\alpha\right]$$

y cuyo eje es paralelo al eje OX. (Fig. 2). La segunda curva es una *hipérbola* cuyas asíntotas $x+\alpha=9$, $x-2y+\alpha=0$ se cortan en el centro $C(-\alpha;\, 0)$. El semieje real

$$CB=\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5}\pm 1)\cdot|t-\alpha^2|}$$

forma con el eje OX el ángulo de 58°17' o de 148°17' (aproximadamente), según que sea t mayor o menor que α^2. Si $t=\alpha^2$, la hipérbola coincide con sus asíntotas.

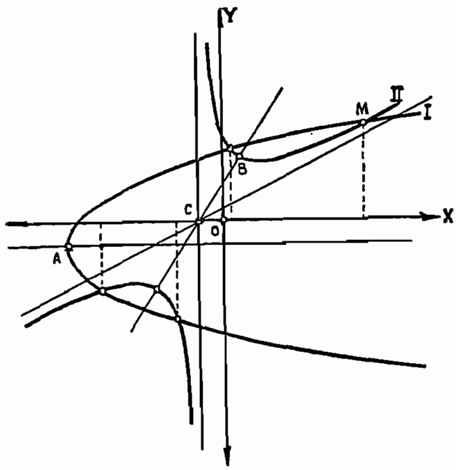

Fig. 2

A fin de encontrar las abscisas de los puntos de intersección M reemplacemos en la primera ecuación (6) la incógnita y por su expresión que nos da la segunda:

$$x=\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{(x^2+2\alpha x+t)^2}{4(x+\alpha)^2}+\alpha\,\frac{x^2+2\alpha x+t}{x+\alpha}-\beta\right]$$

o bien

$$(x^2+2\,\alpha\,x+t)^2+4\,\alpha(x+\alpha)\,(x^2+2\,\alpha\,x+t)-$$
$$-4\,\beta(x+\alpha)^2=8\,\alpha\,x\,(x+\alpha)^2.$$

Realizando las operaciones y simplificando encontramos

$$x^4 + 2(t - 2\beta) \,.\, x^2 + 8\,\alpha(t - \beta) \,.\, x + [t^2 + 4\,\alpha^2(t - \beta)] = 0.$$

Con auxilio de las igualdades (7) vamos a tener

$$x^4 - 2\,a_1\,x^2 + 4\,a_2\,x + \left(t^2 + \frac{2a_2{}^2}{t - a_1} \right) = 0.$$

Igualando los últimos términos independientes de x en la ecuación obtenida y en la dada (5) llegamos a *resolvente cúbica*

$$t^3 - a_1\,t^2 + 2\,a_3\,t + 2(a_2{}^2 - a_1\,a_3) = 0 \qquad (8)$$

que tiene por lo menos una raíz real.

Con el propósito de hallar las ordenadas de los puntos M, se introduce en la segunda relación (6) la expresión para x suministrada por la primera:

$$y = \frac{(y^2 + 2\alpha y - \beta)^2 + 4\alpha^2(y^2 + 2\alpha y - \beta) + 4\alpha^2 t}{4\alpha[(y^2 + 2\alpha y - \beta) + 2\alpha^2]}$$

o bien

$$(y^2 + 2\,\alpha\,y - \beta)^2 - 4\,\alpha\,y\,(y^2 + 2\,\alpha\,y + 2\,\alpha^2 - \beta) +$$
$$+ 4\,\alpha^2(y^2 + 2\,\alpha\,y + - \beta) = 0.$$

Efectuando las operaciones y reduciendo términos semejantes encontramos

$$y^4 - 2\,\beta\,y^2 + \beta^2 + 4\,\alpha^2(t - \beta) = 0.$$

Con auxilio de las igualdades (7) podemos escribir

$$(y^2 - \beta)^2 = \frac{2a_2{}^2}{a_1 - t}$$

de donde

$$y^2 = \frac{a_1 + t}{2} \mp a_2 \sqrt{\frac{2}{a_1 - t}}\,.$$

Pero conforme a la primera relación (6) se tiene

$$x=\frac{y^2-\beta}{2\alpha}+y,$$

y por lo tanto

$$x=\pm\sqrt{\frac{a_1-t}{2}}\mp\sqrt{\frac{a_1+t}{2}\mp a_2\sqrt{\frac{2}{a_1-t}}}.$$

siendo t una raíz de la resolvente (8) distinta de a_1.

La expresión obtenida para x no difiere esencialmente de la fórmula de Ferrari. Combinando en ella los signos de las maneras siguientes:

$$(++-),\quad (+--),\quad (-++),\quad (--+)$$

se obtienen las cuatro raíces de la ecuación considerada (5).

§ 3. En el caso de una ecuación de *quinto grado*

$$x^5-5\,a_1\,x^3-10\,a_2\,x^2+10\,a_3\,x-4\,a_4=0 \tag{9}$$

se buscan puntos de intersección de las curvas

$$y=x^2+t\,x-2\,a_1 \quad \text{y} \quad x=\frac{2ty^2+\alpha y+2\beta}{y^2+\gamma y+\delta} \tag{10}$$

siendo

$$\alpha=t^3+3\,a_1\,t+10\,a_2,\qquad \beta=a_1\,t^3-a_1{}^2\,t+2(5\,a_1\,a_2+a_4)$$
$$\gamma=3\,t^2-a_1,\qquad \delta=t^4+a_1\,t^2+10\,a_2\,t-2(3\,a_1{}^2-5\,a_3) \tag{11}$$

en donde t es una constante arbitraria.

La primera de las curvas (10) es una *parábola cuadrada* con el vértice

$$A\left[-\frac{1}{2}\,t;\,-\frac{1}{4}\,(t^2+8\,a_1)\right]$$

y cuyo eje es paralelo al eje OY. La segunda curva es una *cúbica* de género *hiperbólico* que tiene una asíntota real $x=2t$ paralela al eje OY. Otras dos asíntotas $y=y_1$ e $y=y_2$, siendo y_1 e y_2 raíces de la ecuación cuadrada $y^2+\gamma y+\delta=0$, son paralelas al eje OX. Ellas pueden ser reales, imaginarias o coincidir.

Si se sustituye en la segunda relación (10) la variable y por su expresión que da la primera, resulta

$$(x-2t) \cdot (x^2+tx-2a_1)^2+$$
$$+(\gamma x-\alpha) \cdot (x^2+tx-2a_1)+(\delta x-2\beta)=0.$$

Efectuando las operaciones indicadas y reemplazando, luego, las constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ por sus iguales (11) comprobemos sin dificultad que la ecuación en x así obtenida, es idéntica a la propuesta (9), para cualquier valor de t.

Procediendo al revés, es decir, introduciendo la expresión (10) para x en la expresión para y, tendremos

$$(y+2a_1) \cdot (y^2+\gamma y+\delta)^2-t(y^2+\gamma y+\delta) \cdot (2ty^2+\alpha y+2\beta)-$$
$$-(2ty^2+\alpha y+2\beta)^2=0.$$

Realizando las operaciones y haciendo uso de las igualdades (11) se llega a la ecuación

$$y^5-5b_1y^3-10b_2y^2+10b_3y-4b_4=0 \qquad (12)$$

en la cual

$$b_1=a_1t^2+6a_2t+(3a_1^2-4a_3),$$

$$b_2=a_2t^3+(3a_1^2-4a_3)t^2+$$
$$+(13a_1a_2+2a_4)t+(a_1^3+10a_2^2-2a_1a_3),$$

$$b_3=a_3t^4-2(2a_1a_2+a_4)t^3-a_1(6a_1^2-11a_3)t^2-$$
$$-2(8a_1^2a_2-5a_2a_3+a_1a_4)t+$$
$$+2(3a_1^4-20a_1a_2^2-8a_1^2a_3+5a_3^2-4a_2a_4),$$

$$b_4 = a_4 t^5 - 5 a_1 a_3 t^4 + 5 a_1(2 a_1 a_2 + a_4) t^3 +$$
$$+ 5(2 a_1^4 - 3 a_1^2 a_3 + 2 a_2 a_4) t^2 +$$
$$+ 10(a_1^3 a_2 - 5 a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 + a_3 a_4) t -$$
$$- 2(9 a_1^5 - 50 a_1^2 a_2^2 - 30 a_1^3 a_3 + 25 a_1 a_3^2 - 20 a_1 a_2 a_4 - 2 a_4^2).$$

Se puede hacer desaparecer en la ecuación (12) uno de los términos intermedios, resolviendo una de las ecuaciones $b_1(t) = 0$, $b_2(t) = 0$, $b_3(t) = 0$ que son de segundo, de tercero y de cuarto grado, respectivamente. Es más conveniente hacer

$$b_2(t) = a_2 t^3 + (3 a_1^2 - 4 a_3) t^2 +$$
$$+ (13 a_1 a_2 + 2 a_4) t + (a_1^3 + 10 a_2^2 - 2 a_1 a_3) = 0, \qquad (14)$$

ya que, esta *especie* de la resolvente cúbica tiene por lo menos una raíz real, si $a_2 \neq 0$; y en el caso de ser $a_2 = 0$ la ecuación dada (9) tiene ya la forma deseable. Una vez hallada la incógnita auxiliar t, las demás igualdades (13) nos servirán para calcular los coeficientes b_1, b_3, b_4.

De suerte que el problema queda reducido a la resolución de la ecuación (12) que ahora puede representarse bajo la forma

$$y^5 - 5 b_1 y^3 = 4 b_4 - 10 b_3 y. \qquad (15)$$

Si $b_1 \neq 0$, se pone $y = z \cdot \sqrt{|b_1|}$ y la relación (15) se convierte en

$$\frac{1}{5} z^5 \mp z^3 = a - b z \qquad (16)$$

siendo

$$a = \frac{4b_4}{5b_1^2 \sqrt{|b_1|}}, \qquad b = \frac{2b_3}{b_1^2}.$$

En la ecuación (16) se tiene en cuenta el signo superior o o inferior, según que sea b_1 positivo o negativo.

Si $b_1 = 0$, se hace $y = z$ y la relación (15) toma la forma

$$\frac{1}{5} z^5 = a - b\, z$$

en donde

$$a = \frac{4}{5} b_4, \quad b = 2\, b_3.$$

Caso 1º. $b_1 > 0$. Los valores de z son abscisas de los puntos de intersección N de la parábola $w = \frac{1}{5} z^5 - z^3$ con la recta $w = a - b\, z$ que determina los segmentos

$$z_0 = \frac{2 b_4}{5 b_3 \sqrt{|b_1|}}, \qquad w_0 = \frac{4 b_2}{5 b_1^2 \sqrt{|b_1|}}$$

sobre los ejes coordenos. Existen uno, tres o cinco puntos reales de intersección (fig. 3).

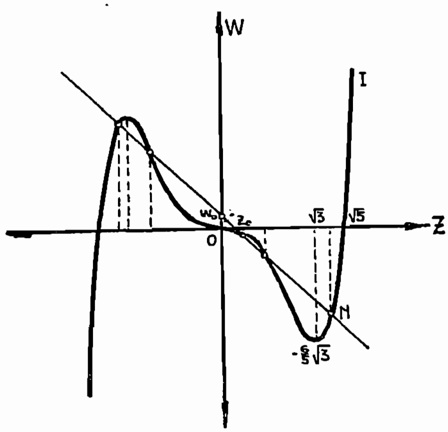

Fig. 3

Caso 2º. $b_1 < 0$. Los valores de z son abscisas de los puntos de intersección N de la parábola $w = \frac{1}{5} z^5 + z^3$ con la recta

$w = a - bz$. Los segmentos z_0 y w_0 que determina esta sobre los ejes se encuentran por las fórmulas precedentes. Existen uno o tres puntos reales de intersección (fig. 4).

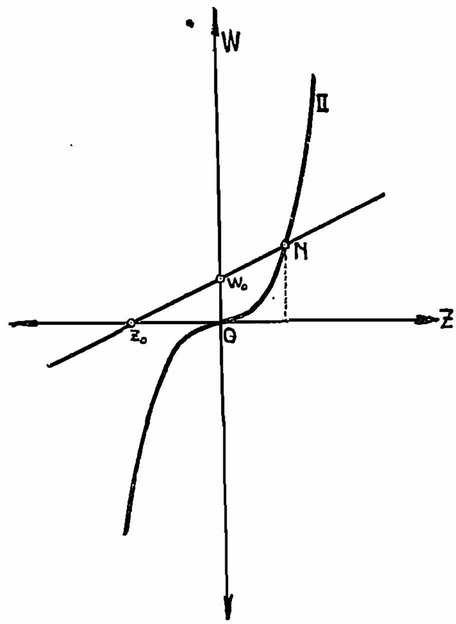

Fig. 4

Caso 3°. $b_1 = 0$. Los valores de z son abscisas de los puntos de intersección N de la parábola $w = \frac{1}{5} z$ con la recta $w = a - bz$ que determina sobre los ejes los segmentos

$$z_0 = \frac{2b_4}{5b_3}, \qquad w_0 = \frac{4}{5} b_4.$$

Existen uno o tres puntos reales de intersección (fig. 5).

En el caso de raíces múltiples algunos de los puntos de intersección coinciden, convirtiéndose las secantes $w = a - bz$ en las tangentes a las parábolas I, II, III.

Una vez hallados los valores de z, los valores correspondientes de y se encuentran mediante la relación $y = z \,.\, \sqrt{|b_1|}$

en los dos primeros casos e $y = z$ en el tercero. Luego, se calculan los valores de x por la segunda de las fórmulas (10).

Conociendo las raíces reales se puede disminuir el grado de la ecuación dada (9) y, resolviendo las ecuaciones de grados inferiores, determinar las raíces complejas, si tales existen. Vemos, pues, que las tres *determinadas* curvas: I, II, III (figs. 3, 4, 5) completamente resuelven todas las ecuaciones reales de quinto grado.

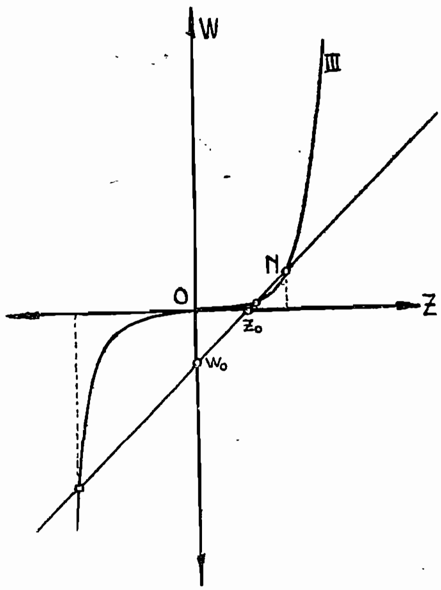

Fig. 5

§ 4. Se sabe que la ecuación *general* de quinto grado en x puede reducirse a la forma de Bring y Jerrard

$$z^5 \pm z = r \tag{17}$$

mediante la transformación de Tschirnhausen determinada por la fórmula

$$z = \alpha_0 x^4 + \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + \mathrm{x}_3 x + \alpha_4.$$

Para hallar los coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ es necesario adjuntar al dominio de racionalidad cuatro radicales cuadrados y resolver una ecuación cúbica. La resolución de la ecuación *canónica* (17) equivale geométricamente a la determinación de los puntos de intersección de la parábola $w = z^5 \pm z$ con la paralela $w = r$ al eje OZ. Este método conduce a cálculos *extremadamente* largos y es aplicable solamente en los casos de que la ecuación general dada tiene una o tres raíces reales, cumpliéndose además algunas condiciones muy especiales. En las demás circunstancias el parámetro r es complejo.

Otro método consiste en reducir la ecuación general a la forma

$$y^5 - 10\, b_2\, y^2 + 10\, b_3\, y - 4\, b_4 = 0$$

lo que se consigue empleando el procedimiento expuesto en el párrafo anterior y necesita la resolución de la ecuación cuadrada $b_1(t) = 0$. Luego, se aplica el método de Gordan o se practica la sustitución de Kiepert

$$y = \frac{\lambda z + \mu}{z^2 \pm 3}.$$

Para encontrar las constantes λ y μ es menester resolver otras dos ecuaciones cuadradas, con lo cual se llega a la forma *canónica* de Brioschi y Klein

$$z^5 \pm 10\, z^3 + 45\, z = r \tag{18}$$

que se soluciona buscando puntos de intersección de la parábola $w = z^5 \pm z^3 + 45\, z$ con la paralela $w = r$ al eje OZ. Los cálculos resultan menos penosos, pero el parámetro r puede ser real únicamente en el caso en que la ecuación general propuesta tenga una sola raíz real.

Si en las ecuaciones (17) y (18) la constánte $r = p + q\, i$ es compleja, lo es también la incógnita $z = u + v\, i$. Separando las partes reales de las imaginarias se llega a las ecuaciones $\varphi(u, p, q) = 0$, $\psi(v; p, q) = 0$ de grado 25 con *dos parámetros independientes* p y q. De suerte que los valores de u y de v no pueden hallarse ni por tablas de *una entrada*, ni por procedimientos geométricos sencillos.

Resoluciones transcendentes indicadas por Hermite y Jacoli necisitan algunos cálculos complementarios, pero no solucionan el problema del modo deseable, porque las tablas de las funciones elípticas son de *dos entradas*, ya que dichas funciones tienen dos argumentos: la amplitud y el módulo. Vemos, que son bastante restringuidas las condiciones en que las ecuaciones canónicas dependan *efectivamente* de un solo parámetro real.

El procedimiento geométrico, general y mucho más corto, se reduce a la determinación de una raíz real de la ecuación cúbica (14). Luego se calculan los segmentos z_0 y w_0, tomándolos por *parámetros* más *naturales*. Desde el punto de vista geométrico no es más difícil trazar la oblícua $w = a - b\,z$ que construir la paraleela $w = r$.

Cabe preguntar, sin embargo, si hay una transformación racional o irracional que permita siempre, resolviendo ecuaciones de grados inferiores, reducir la ecuación general de quinto grado con una, tres y cinco raíces reales a las formas canónicas dependientes de un solo parámetro real, y que tengan respectivamente una, tres o cinco raíces reales. Si existiese tal transformación, las ecuaciones canónicas así obtenidas podrían considerarse como diferentes casos de una *operación algebráica fundamental.* Las tablas de esta operación dependientes de un solo argumento real, nos permitirían con auxilio de la fórmula de transformación, resolver todas las ecuaciones de quinto grado de una manera análoga a la que la tabla de las raíces quintas resuelve ecuaciones binomias de quinto grado.