LIMITAZIONI E CONFRONTI PER LE FUNZIONI META-ARMONICHE

Nota di G. Supino

1. - Le funzioni meta-armoniche (cioè quelle coddisfacenti alla equazione $\Delta_2 u = \lambda u$) sono assai studiate; le proprietà fondamentali si trovano, per esempio, nell'articolo del Burgatti sulle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine (1). Ma, avendo avuto occasione di considerare di nuovo tali funzioni per alcune ricerche sulle lastre elastiche (2), espongo qui alcune proprietà che ritengo nuove e non del tutto prive di interesse.

2. - Richiamiamo dapprima alcuni risultati ben noti.

La funzione u, soddisfacente alla equazione

$$\Delta_2 u = \lambda^2 u \tag{1}$$

sia definita in un campo τ limitato dal contorno σ. In un punto P di τ sia $u > 0$; allora è, in P,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0$$

cioè una almeno delle due derivate seconde è positiva in P. Se ne deduce che nel punto P non si può avere un massimo

---

(1) G. Ascoli, - P. Burgatti - G. Giraud, *Equazioni alle derivate parziali del tipo ellittico e parabolico*, Firenze, 1936.

(2) *Le condizioni ai limiti per le lastre elastiche piane*, "Annali di Matematica" 1938 e 1945.

della u, e poichè P è un punto qualunque di τ si conclude che la u non può avere in τ un massimo positivo.

Analogamente si ragionerebbe se la u fosse negativa; in conclusione *la u non può avere all'interno del campo nè un massimo positivo nè un minimo negativo.*

Da questa osservazione si deduce:

1) che se M rappresenta il massimo valore assoluto de u su σ allora anche all'interno è $|u| \leqq M$ altrimenti si avrebbe nell' interno almeno un massimo positivo o un minimo negativo;

2) che se sul contorno si ha $u \geqq 0$ anche all'interno è $u \geqq 0$ altrimenti si avrebbe in τ un minimo negativo. Analogamente se sul contorno è $u \leqq 0$ anche nell'interno è $u \leqq 0$.

3. - Le ricerche qualitative in questo ordine di idee possono essere proseguite raggiungendo altri risultati.

Consideriamo due funzioni u_1 e u_2 soddisfacenti rispettivamente alle equazioni

$$\Delta_2 u_1 = \lambda_1^2 u_1, \quad \Delta_2 u_2 = \lambda_2^2 u_2. \tag{2}$$

Supponiamo che sia $\lambda_1 > \lambda_2$ e che in un punto P interno al campo τ sia $u_1 = u_2 > 0$. Allora si ha in P:

$$\Delta_2(u_1 - u_2) = \lambda_2^2(u_1 - u_2) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\, u_1. \tag{3}$$

Segue che in P è $[(u_1 - u_2) = 0$ e quindi$]$ $\Delta_2(u_1 - u_2) > 0$ cioè $u_1 - u_2$ non può avere un massimo in P. Possiamo allora considerare un punto P' vicino a P e tale che in esso sia $u_1 > u_2$; ma considerando la (3) in P' si vede che anche qui $u_1 - u_2$ non può avere massimo.

Così proseguendo concludiamo che se è $\lambda_1 > \lambda_2$ e se in un punto interno di τ è $u_1 = u_2 > 0$ allora, sul contorno, vi sono certamente dei punti in cui è $u_1 > u_2$ (3).

Il risultato può essere invertito. Consideriamo due funzioni u_1 e u_2 soddisfacenti rispettivamente alla prima e alla seconda delle (2); sia $\lambda_1 > \lambda_2$ e sia sul contorno $u_1 = u_2 > 0$: allora in

(3) Non è possibile che i punti P, P' ... si trovino su una linea chiusa perchè la differenza $u_1 - u_2$ cresce passando da un punto all'altro.

un punto interno generico è sempre $u_1 < u_2$. Infatti dall'essere $u_1 > 0$ sul contorno si deduce che è anche $u_1 > 0$ nell'interno altrimenti si avrebbe nell'interno un minimo negativo (v. n. 2); la stessa osservazione vale per u_2. Ma se fosse $u_1 \geqq u_2 > 0$ in un punto interno, si avrebbe (come si è visto or ora) $u_1 > u_2$ su qualche punto del contorno e ciò è contrario all'ipotesi.

Completiamo il risultato osservando che data una successione di funzioni u_n soddisfacenti ad equazioni del tipo $\Delta_2 u_n = \lambda_n^2 u_n$ (con $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots \lambda_n \rightarrow 0$) e supposto che esse assumano gli stessi valori (positivi) sul contorno, allora i valori assunti in un punto arbitrario, interno al campo, soddisfano alla diseguaglianza

$$u_1 < u_2 < \ldots u_n \rightarrow U$$

essendo U la funzione *armonica* che assume i prescritti valori sul contorno. Le funzioni u_n sono dunque in questo caso funzioni «subarmoniche».

Se i valori dati al contorno sono negativi si trova che

$$0 > u_1 > u_2 > \ldots u_n \rightarrow U$$

le funzioni u_n sono allora «superarmoniche».

4. - Consideriamo di nuovo u_1 e u_2 (definite dalle (2) e con $\lambda_1 > \lambda_2$), e supponiamo che su σ siano dati i valori delle derivate normali e sia $\frac{du_1}{dn} = \frac{du_2}{dn} < 0$. Allora in ogni punto di τ è $0 < u_1 < u_2$.

Ed infatti se in ogni punto di σ è $\frac{du_1}{dn} < 0$ (essendo n rivolta verso l'interno del campo) si deduce che non può essere anche $u_1 < 0$ in un punto di τ perchè questa posizione porta come conseguenza che si abbia sul contorno un minimo negativo e in un punto di questo tipo sarebbe necessariamente $\frac{du_1}{dn} > 0$ contrariamente all'ipotesi. Analogamente non può essere $u_2 < 0$. D'altra parte è $u_1 < u_2$ perchè se in un punto P interno fosse $u_1 = u_2$ allora sarebbe (n. 3) $\Delta_2(u_1 - u_2) > 0$ ed il massimo $u_1 - u_2$ sarebbe su un punto Q del contorno. Ma ciò implicherebbe che in Q fosse $\frac{du_1}{dn} < \frac{du_2}{dn}$ mentre per ipotesi le due derivate sono equali. Resta così dimostrato l'asserto.

5. - In alcuni passari lavori [4] ho dimostrato che se U è una funzione armonica assegnata in un campo convesso e se il contorno di questo si suppone diviso in due parti σ_1 e σ_2 essendo in σ_1 $0 \leqq U \leqq M$ e in σ_2 $U = 0$ allora in un punto P interno al campo τ racchiuso da σ, alla minima distanza r da σ_1, si ha (nel caso di due dimensioni)

$$U(P) \leqq \frac{M}{\pi}\,\omega_P;\ \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_P \leqq \frac{M\sigma_1}{\pi r^2}, \tag{4}$$

essendo ω_P l'angolo visuale secondo cui da P si vede σ_1:

$$\omega_P = \int_{\sigma 1} \frac{\cos(nr)}{r}\, d\sigma_1.$$

Analoghe diseguaglianze si hanno nello spazio.

In base al teorema del n. 3 le limitazioni relative alle funzioni armoniche si estendono senz'altro a tutte le funzioni u tali che $\Delta u = \lambda^2 u$. Ma questa estensione non ha interesse perchè, per le funzioni stesse, si può affermare qualche cosa di più. Ha interesse invece l'estensione delle limitazioni relative alle derivate, ma perciò sono necessarie alcune osservazioni che ora svolgeremo.

6. - Una funzione u $\left(= \frac{1}{\lambda^2}\Delta_2 u\right)$ assuma in σ_1 un valore $\leqq M$ e in σ_2 il valore zero. Siano P_1, P_2 gli estremi di σ_1; per la convessità del campo il segmento $\overline{P_1 P_2}$ è interno a σ_1 o fa parte del contorno di esso. Assumiamo come asse y la retta $\overline{P_1 P_2}$,

(4) Supino, G., *Alcune limitazioni valide per le funzioni armoniche,* Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, 2° sem. 1928. Alcune limitazioni valide per le derivate di una funzione armonica. Ibid. 2° sem. 1928. Tutti i risultati sono esposti in modo completo nella memoria: *Sopra alcune limitazioni valide per le funzioni armoniche e le loro derivate.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1931 (Tomo LV).

l'asse x sia normale ad essa. La funzione $\overline{u}=M\,e^{-\lambda x}$ assume in $\overline{P_1 P_2}$ il valore M mentre in σ_2 è maggiore di u. Essa soddisfa inoltre alla equazione $\Delta_2 \overline{u}=\lambda^2 \overline{u}$. La $\overline{u}$ è quindi una funzione maggiorante della u perchè la differenza $\overline{u}-u$ soddisfa alla stessa equazione alle derivate parziali ed è maggiore od eguale a zero sul contorno del campo comune; dunque $\overline{u}-u$ è maggiore od uguale a zero anche nell'interno (v. n. 2). In luogo della funzione $\overline{u}=M\,e^{-\lambda x}$ si può considerare la funzione $\overline{u}'=M_0$ $e^{-\lambda(x+y)}$ essendo $M_0=\dfrac{M}{e^{-\lambda y_0}}$ ed y_0 la più grande distanza dell'origine dai punti P_1 e P_2.

7. - Estendiamo i ragionamenti precedenti alle derivate.

Una funzione $u=\dfrac{1}{\lambda^2}\,\Delta_2 u$ che assume in σ_1 un valore $U \leqq M$ ed in σ_2 il valore zero è in tutto il campo minore od eguale alla funzione armonica U che assume sul contorno gli stessi valori di u; quindi in σ_2 è $\dfrac{\partial U}{\partial n}>\dfrac{\partial u}{\partial n}>0$ (se si indica con n la normale *interna*); in σ_1 è $\dfrac{\partial n}{\partial u}\leqq\dfrac{\partial U}{\partial n}\leqq 0$. Le limitazioni date in σ_2 per $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ valgono dunque anche per $\dfrac{\partial u}{\partial x}$; in σ_1 invece si può solo affermare che $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ è limitata, se i valori dati per u su σ_1 ammettono derivata su σ_1 stessa. Ma anche così si trova egualmente una limitazione, per $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ valida nell'interno del campo.

Indichiamo con N il massimo valore di $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|$ in una zona di contorno uguale a $\sigma_1+\sigma_1'$ (essendo $\sigma_1'=2/\lambda$).

La funzione $\overline{u}=N$ in $\sigma_1+\sigma_1'$ nulla in $\sigma_2-\sigma_1'$ è maggiorata dalla funzione

$$u_1(P)=N_0\,e^{-\lambda(x+y)}$$

avendo scelto l'origine delle coordinate nel centro del segmento che congiunge i due punti P_1 e P_2 estremi di $\sigma_1+\sigma_1'$ e avendo posto $N_0 = \frac{N}{e^{-\lambda y_0}}$ essendo y_0 uguale alla distanza di P_1 o P_2 dall'origime.

La funzione $\overline{\overline{u}}$ nulla in $\sigma_1 + \sigma_1'$ uguale ad $\frac{M\sigma_1}{\pi r^2}$ in $\sigma_2 - \sigma_1'$ è maggiorata dalla funzione uguale ad $\frac{M\sigma_1}{\pi r^2}$ in $\sigma_2 - \sigma_1'$ e ad $M\sigma_1 . \frac{\lambda^2}{\pi 4}$ in $\sigma_1 + \sigma_1'$. Si osservi che questo valore si raccorda al precedente agli estremi di $\sigma_1 + \sigma_1'$. Ed essendo sul contorno $\overline{\overline{u}}$ minore della funzione ora assegnata, la stessa cosa si verifica nell'interno perchè si ha

$$\Delta\left(\frac{M\sigma_1}{\pi r^2}\right) = \mu^2 (x\, y) \left(\frac{M\sigma_1}{\pi r^2}\right)$$

con $\mu^2 < \lambda^2$ (in quanto è $\mu(x, y) = \frac{2}{r} < \lambda$) e quindi si possono applicare per confronto le osservazioni del n. 3.

Concludiamo dunque affermando che è, in un punto interno generico,

$$\frac{\partial u}{\partial z} \leqq N_0\, e^{-\lambda(x+y)} + \frac{M\sigma_1}{\pi r^2}$$

essendo z una direzione generica.