OSSERVAZIONI SULLE COPPIE DI ELEMENTI CURVILINEI SPAZIALI

Nota di ALESSANDRO TERRACINI, Torino (Italia)

Dedicata al Prof. Beppo Levi nel suo ottantesimo compleanno

Ho avuto recentemente occasione di osservare (1) che, per due elementi curvilinei spaziali C, C', mentre è stata ripetutamente considerata la possibilitá di proiettarli su uno stesso piano α, *da uno stesso centro*, in modo da ottenere proiezioni $\overline{C}, \overline{C}'$ aventi contatto di ordine più elevato dell'ordinario (il piano principale di Halphen, la retta ed il punto principali introdotti da Bompiani hanno appunto avuto origine in una considerazione di tale natura), di rado sono state utilizzate proiezioni da due centri *distinti*, rispettivamente G, G'.

Nella presente Nota, supposto che C, C' escano da uno stesso punto O con una stessa retta tangente t, ma con piani osculatori γ, γ' tra loro distinti, e che α sia un piano passante per la retta t, mi propongo di fare qualche osservazione in proposito: tra esse la più notevole sembra essere quella contenuta nel penultimo enunciato del n. 2, che conduce —nell'ordine di idee indicato— a definire un piano legato in modo proiettivamente invariante a due E_3 nelle condizioni indicate.

Assunte coordinate cartesiane $x_0=x, x_1, x_2$ con l'origine in O e l'asse x coincidente con la retta t (ovviamente sostituibili con coordinate proiettive non omogenee), siano i due elementi

(1) A. TERRACINI, *Enti geometrici collegati con coppie di elementi curvilinei spaziali* "Rend. di matematica e delle sue applicazioni", (5), vol. XIV, Roma, 1955.

C, C' rappresentati rispettivamente dalle

(1) $$x_1 = a_2 x^2 + a_3 x^3 + [4]; \quad x_2 = b_2 x^2 + b_3 x^3 + [4];$$

(2) $$x_1 = a_2' x^2 + a_3' x^3 + [4]; \quad x_2 = b_2' x^2 + b_3' x^3 + [4];$$

e sia $x_2 = mx_1$ l'equazione del piano α. Se $G \equiv (g_0, g_1, g_2)$, $G' \equiv (g_0', g_1', g_2')$, posto

$$h = mg_1 - g_2, \; h' = mg_1' - g_2'; \; \delta_i = a_i - a_i',$$
$$\rho_i = b_i - ma_i, \; \rho_i' = b_i' - ma_i', \qquad (i = 2, 3)$$

si trova facilmente che le due proiezioni $\bar{C}, \bar{C}'$, sostituite dalle loro proiezioni sul piano x_1 eseguite parallelamente all'asse x_2, hanno come equazioni rispettivamente la

(3)
$$x_1 = \left(a_2 + \frac{g_1}{h}\rho_2\right)x^2 + \left[a_3 + \frac{g_1}{h}\rho_3 - \frac{2g_0\rho_2}{h}\left(a_2 + \frac{g_1}{h}\rho_2\right)\right]x^3 + [4],$$

e l'analoga dove a_2, ecc. si sostituiscano con a_2', ecc.

1. - *Contatto di secondo ordine (almeno) tra* $\bar{C}, \bar{C}'$. — Da quanto si è detto risulta (2) che *affinchè* $\bar{C}, \bar{C}'$ *abbiano contatto del secondo ordine (almeno) nel punto O è necessario e sufficiente che i piani tG, tG' si corrispondano* (entro il fascio t) *nella proiettività* π_α *avente l'equazione*

(4) $$m(b_2 - b_2')\, g_1 g_1' + (ma_2' - b_2)\, g_1 g_2' +$$
$$+ (b_2' - ma_2)\, g_2 g_1' + \delta_2 g_2 g_2' = 0.$$

La proiettività π_α *(non degenere se* $\alpha \neq \gamma$, $\alpha \neq \gamma'$*) si può definire come quella che ha come uniti il piano* α *ed il piano principale* (di equazione $x_1/x_2 = \delta_2/(b_2 - b_2')$), *e in cui sono*

(2) Il risultato non cessa di essere valido anche se il piano α coincide col piano xx_2 bastando in tal caso scambiare, nella deduzione fatta, x_1 con x_2. Un'avvertenza analoga vale anche nel seguito.

omologhi i piani osculatori γ, γ'. L'invariante assoluto della proiettività π_α vale pertanto $(b_2 - ma_2)/(b_2' - ma_2')$.

Ricordiamo che Bompiani[3] ha introdotto per la figura costituita dagli E_2 di C, C' e da un piano α passante per la t un invariante proiettivo τ, per il quale si trova questa stessa espressione. Perciò l'invariante assoluto della proiettività π_α coincide con l'invariante proiettivo di Bompiani a cui dànno luogo gli E_2 di C, C' ed il piano α.

A norma della (4) è poi chiaro che, al variare del piano α, il piano stesso ed i piani tG, tG' si corrispondono in una trilinearità.

I precedenti risultati si estendono in modo analogo al caso in cui, anzichè il contatto di secondo ordine almeno tra $\overline{C}, \overline{C}'$, si richieda che l'invariante di Mehmke-Segre di $\overline{C}, \overline{C}'$ in O abbia un valore prefissato J. La (4) è allora sostituita dalla

$$(5) \qquad m(Jb_2 - b_2')\, g_1 g_1' + (ma_2' - J b_2)\, g_1 g_2' + \\ + (b_2' - m J a_2)\, g_2 g_1' + (Ja_2 - a_2')\, g_2 g_2' = 0;$$

cosicchè —per ogni valore di J— si ha ancora una corrispondenza trilineare tra i piani α, tG, tG'. Inoltre, fissato il piano α, i piani tG, tG' vengono a corrispondersi in una proiettività $\omega(\alpha, J)$, avente come uniti ancora il piano α ed il piano (indipendente da α) $x_1/x_2 = (Ja_2 - a_2')/(Jb_2 - b_2')$: anche in questa proiettività sono omologhi i piani osculatori γ, γ'. Infine, l'invariante assoluto della proiettività $\omega(\alpha, J)$ è $J\tau$ (dove, come sopra, τ è l'invariante di Bompiani degli E_2 di C, C' e del piano α).

2. - *Contatto di terz'ordine (almeno) tra* $\overline{C}, \overline{C}'$. — Dalla (3) segue ancora che *affinchè* $\overline{C}, \overline{C}'$ *abbiano contatto del terzo ordine almeno nel punto O è necessario e sufficiente che i raggi OG,*

---

(3) E. Bompiani, *Alcuni invarianti proiettivi di elementi curvilinei*, Rend. Acc. Lincei, (6) vol. XXII, 1935, v. p. 490. Cfr., di Bompiani, anche un corso litografato sugli elementi curvilinei, p. 96. L'invariante proiettivo in questione è il valore dell'invariante di Mehmke-Segre dei due E_2 di un piano generico, in cui quelli di C, C' si proiettano da un punto generico del piano α. Esso coincide poi, come si è detto nel testo, col birapporto formato dai piani osculatori γ, γ' col piano α e col piano principale.

OG' siano omologhi nella corrispondenza T rappresentata (entro la stella O) dalle

$$(6)\quad g_0' : g_1' : g_2' = -2\rho_2\rho_2'(b_2 g_1 - a_2 g_2)\, g_0 + \\ + \delta_3 \rho_2'(mg_1 - g_2)^2 + \rho_3\rho_2'(mg_1 - g_2)\, g_1 + \rho_3'(mg_1 - g_2)\,\varphi : \\ 2\rho_2'(b_2 g_1 - a_2 g_2)\,\varphi : \\ 2\rho_2'(b_2 g_1 - a_2 g_2)\,\psi,$$

dove si è posto

$$\varphi = (ma_2' - b_2)\, g_1 + \delta_2 g_2,$$

$$\psi = m(b_2' - b_2)\, g_1 + (ma_2 - b_2')\, g_2.$$

La corrispondenza T, non degenere (4) se il piano α non coincide con nessuno dei due piani osculatori γ, γ' è —per un piano α generico— *birazionale quadratica*: la rete omaloidica dei coni quadrici p. e. della «prima» stella ha come retta base la t: lungo essa quei coni hanno contatto del secondo ordine (e come piano tangente fisso il piano osculatore γ).

Esiste qualche piano α ($\alpha \neq \gamma$, $\alpha \neq \gamma'$) tale che la corrispondenza T si riduca ad un'omografia? Si riconosce tosto sulle (6) che, *salvo il caso eccezionale in cui ciascuno dei due piani osculatori γ, γ' è stazionario* (5), *esiste uno ed un solo piano α^* tale che la corrispondenza T si riduca ad un'omografia.* Esso è caratterizzato da

$$m = \frac{b_2'(\delta_3 b_2 - a_2 b_3) + a_2' b_2 b_3'}{a_2'(a_3 b_2 + a_2 b_3' - a_2 b_3) - a_2 b_2' a_3'}.$$

Dai due E_3 delle curve C, C' risulta così (salvo l'eccezione indicata) ben individuato un *piano invariante* α^*.

---

(4) Chiamiamo degenere la corrispondenza T se $\dfrac{\partial(g_0', g_1', g_2')}{\partial(g_0, g_1, g_2)} = 0$.

(5) E allora la corrispondenza T è sempre omografica, e piú precisamente è un'omologia stellare, il cui piano ed asse di omologia coincidono rispettivamente col piano α e con la retta principale; il suo invariante assoluto è $1/\tau$.

Osservazioni. - 1) Il birapporto formato dai piani osculatori γ, γ', dal piano invariante α^*, e dal piano principale vale

$$H = \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_2' b_3' - a_3' b_2'}. \tag{7}$$

Esso coincide pertanto con l'invariante proiettivo introdotto per altra via da Bompiani[6] per due E_3 tangenti in un punto.

2) *L'omografia stellare a cui si riduce la corrispondenza* T *relativa al piano invariante* α^* *è un'omologia, avente come asse la retta principale, come piano d'omologia lo stesso piano invariante* α^*, *e come invariante assoluto* H.

(6) Cfr. E. Bompiani, l. c. (3), e la p. 97 del corso litografato ivi citato.