SULLE CORRISPONDENZE FRA SUPERFICIE DELLA VARIETÀ DI SEGRE

di M. Villa e L. Muracchini (a Bologna)

1. — Nelle nostre ricerche sull'applicabilità proiettiva delle trasformazioni puntuali fra piani, abbiamo avuto occasione di osservare alcuni fatti relativi alle corrispondenze fra superficie della V_4 di Segre (1). Fra questi vi è il risultato che esponiamo nel n. 4.

2. — Premettiamo la nozione di *omografia tangente d'ordine* k ad una corrispondenza puntuale fra due superficie e la nozione di *direzione caratteristica.*

In uno spazio lineare (proiettivo) S_r ad r dimensioni, si consideri una superficie Σ e in un altro spazio $\overline{S}_r$ sia pure assegnata una superficie $\overline{\Sigma}$ e fra le due superficie Σ, $\overline{\Sigma}$ si abbia una corrispondenza γ (2). Si possono sempre scegliere i parametri nella rappresentazione parametrica di $\overline{\Sigma}$ in modo che

(1) Una trasformazione puntuale fra due piani è rappresentata sulla V_4 di Segre, immagine delle coppie di punti dei due piani, da una superficie. Per l'impiego di questa superficie nello studio della trasformazione puntuale, si veda: M. Villa, *Sulle superficie quasi asintotiche della V_4^6 di S_8 che rappresenta le coppie di punti di due piani,* Accad. Italia Rend., (7), 1,228-237 (1940); M. Villa, *Sulle trasformazioni puntuali degeneri,* Mem. Accad. Sc. Ist. Bologna, (9), 9, 19-26 (1941-42); M. Villa, *Superficie della V_4^6 di Segre e relative trasformazioni puntuali,* Mem. Accad. Sc. Ist. Bologna, (9), 9, 71-82 (1941-42); M. Villa, *Trasformazioni quedratiche osculatrici and una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi.* I. *Le proiettività caratteristiche,* Accad. Italia Rend., (7), 3, 718-724 (1942); II. *Loro costruzione,* Accad. Italia Rend., (7), 4, 1-7 (1943). Altri lavori verranno citati in seguito.

(2) Le funzioni che intervengono nella rappresentazione parametrica delle due superficie s'intente che soddisfano a tutte le condizioni di regolaritá che occorrono per le successive considerazioni analitiche.

punti delle due superficie $P, \overline{P}$ corrispondenti in γ siano dati dagli stessi valori dei parametri.

Si dirà che un'omografia ω fra gli spazi $S_r, \overline{S}_r$ è tangente d'ordine k (tangente senz'altro per $k=1$) alla corrispondenza γ fra $\Sigma, \overline{\Sigma}$ nella coppia $P, \overline{P}$ di punti corrispondenti quando ogni curva C tracciata su Σ e passante per P viene mutata da γ e da ω rispettivamente in due curve $\overline{C}$ e $\overline{C}_0$ che hanno in $\overline{P}$ un contatto *analitico* d'ordine k (almeno e, in generale, esattamente d'ordine k). Può accadere che per curve C la cui tangente in P ha una particolare direzione t le curve $\overline{C}$ e $\overline{C}_0$ abbiano in $\overline{P}$ un contatto *geometrico* d'ordine superiore a k, in tal caso si dirà che la direzione t tangente in P a Σ (ed anche la direzione $\overline{t}$ tangente in $\overline{P}$ alla $\overline{C}$) è *caratteristica* relativamente alla trasformazzione γ e alla omografía ω.

3. — Sopra una superficie giacente sulla V_4 di Segre esiste, in generale, un tritessuto di curve quasi-asintotiche $\gamma_{1,2,3}$ (³). Una corrispondenza puntuale tra due superficie appartenenti a V_4 di Segre si dirà che, in una coppia $P, \overline{P}$ di punti corrispondenti, ha comportamento *quasi-asintotico* quando alle tangenti in P alle tre $\gamma_{1,2,3}$ per P fa corrispondere le tangenti in $\overline{P}$ alle tre $\gamma_{1,2,3}$ per $\overline{P}$ (⁴).

Date due varietà $V_4, \overline{V}_4$ di Segre appartenenti rispettiva-

---

(³) Quando una transformazione puntuale T tra due piani $\pi, \overline{\pi}$ si rappresenta mediante una superficie della V_4 di Segre, le coppie di curve caratteristiche dei due piani corrispondenti in T, sono rappresentate da curva di V_4 quasi-asintotiche $\gamma_{1,2,3}$ (e inversamente). (Si veda: M. VILLA e G. VAONA, *Varietà quasi-asintotiche a più indici e curve caratteristiche di una trasformazione puntuale,* Atti Accad. Naz. Lincei, Rend., (8), 8, 470-476 (1950). Le curve caratteristiche, in generale, formano un tritessuto e i due tritessuti caratteristici di $\pi, \overline{\pi}$ (che si corrispondono in T) danno dunque luogo sulla superficie rappresentativa di T ad un tritessuto di curve quasi-asintotiche $\gamma_{1,2,3}$.

(⁴) Si suppone che i punti $P, \overline{P}$ non abbiano comportamento $\sigma_{1,2}$ per le due superficie (Si veda: M. VILLA, *Sull'annularsi in un punto della matrice jacobiana di m funzioni in n variabili,* Accad. Italia Rend., (7), 3, 209-216 (1942). Si esclude poi, per semplicità, che $P, \overline{P}$ abbiano comportamento $\sigma_{1,3}{}^4$ per le due superficie (Si veda: M. VILLA, *Sulle direzioni caratteristiche di una trasformazione puntuale,* Mem. Accad. Sc. Ist. Bologna, (9), 10, 7-19 (1943); M. VILLA, *Varietà quasi-asintotiche e trasformazioni puntuali,* Ann. Univ. Ferrara (nuova serie), 1, 17-21 (1951).

mente a due spazi $S_8, \overline{S}_8$, tra le omografíe fra $S_8, \overline{S}_8$ verranno considerate quelle che mutano V_4 in $\overline{V}_4$ e inoltre che trasformano una delle due schiere di piani di V_4 in una prefissata schiera di piani di $\overline{V}_4$. Questo insieme ∞^{16} di omografie s'indicherà con I ([5]).

4. — Ciò posto, si ha: *Una corrispondenza* γ *fra due superficie* $\phi, \overline{\phi}$ *situate rispettivamente su due varietà di Segre* $V_4, \overline{V}_4$ *di* $S_8, \overline{S}_8$, *in una coppia di punti corrispondenti* $P, \overline{P}$([6]), *possiede al più tre coppie di direzioni che sono caratteristiche in relazione a qualche omografia tangente dell'insieme* I (*Se* γ *ha in* $P, \overline{P}$ *comportamento quasi-asintotico tali coppie possono però essere infinite*). *Una omografia dell'insieme* I *tangente a* γ *in* $P, \overline{P}$ *dà luogo al più a due coppie di direzioni caratteristiche* (*Se* γ *ha in* $P, \overline{P}$ *comportamento quasi-asintotico queste coppie possono però essere infinite*).

Senza introdurre restrizioni, si può supporre che le due varietà $V_4, \overline{V}_4$ coincidano e che i punti $P, \overline{P}$ pure coincidano (P abbia le coordinate $1, 0, \ldots, 0$). Le equazioni di ϕ siano

$$x_0 = 1, \quad x_i = f_i(u, v), \quad x_5 = f_1 f_3, x_6 = f_1 f_4, \quad x_7 = f_2 f_3, \quad x_8 = f_2 f_4$$

e quelle di $\overline{\phi}$

$$x_0 = 1, \; x_i = \varphi_i(u, v), \; x_5 = \varphi_1 \varphi_3, \; x_6 = \varphi_1 \varphi_4, \; x_7 = \varphi_2 \varphi_3, \; x_8 = \varphi_2 \varphi_4$$

([5]) Se V_4 rappresenta le coppie di punti dei due piani π_1, π_2 e $\overline{V}_4$ le coppie di punti dei due piani $\overline{\pi}_1, \overline{\pi}_2$, una omografia che muta V_4 in $\overline{V}_4$ si ottiene assegnando una omografia Ω_1 fra i piani $\pi_1, \overline{\pi}_1$ e un'omografia Ω_2 fra i piani $\pi_2, \overline{\pi}_2$, ma si ottiene anche assegnando un'omografia Ω fra i piani $\pi_1, \overline{\pi}_2$ e un'omografia Ω_0 fra i piani $\pi_2, \overline{\pi}_1$. Si hanno quindi due insiemi di omografie che mutano V_4 in $\overline{V}_4$, ciascuno costituito da ∞^{16} omografie. Se le omografie di un insieme mutano la 1ª schiera di piani di V^4 nella 1ª schiera di piani di $\overline{V}_4$, le omografie dell'altro insieme mutano la 1ª schiera di piani di $\overline{V}_4$ nella 2ª schiera di piani di $\overline{V}_4$. I è pertanto uno qualunque dei due insiemi suddetti.

([6]) Si suppone che sia regolare nella coppia $P, \overline{P}$ e che i punti $P, \overline{P}$ siano semplici per $\Phi, \overline{\Phi}$ e che in essi le $\Phi, \overline{\Phi}$ non abbiano comportamento $\sigma_{1,2}$, nè comportamento $\sigma^4_{1,3}$ (si veda nota (4)). Escludiamo anche, per semplicità, che le tangenti in P (in $\overline{P}$) alle $\gamma_{1,2,3}$ coincidano.

dove le f, φ sono funzioni di u, v e punti corrispondenti di Φ, $\overline{\Phi}$ sono dati dagli stessi valori dei parametri u, v $(i=1,2,3,4)$. Si può supporre che il punto P si abbia per $u=v=0$; le funzioni f_i, φ_i si dovranno pertanto annullare per $u=v=0$. Si può ancora supporre che una delle omografie tangenti a γ in $P, \overline{P}$ sia l'identità. Se gli sviluppi in serie delle funzioni f_i, φ_i nell'intorno di $u=v=0$ sono

$$f_i=\sum_{h,k>0} \alpha^{(i)}{}_{hk}\, u^h v^k, \qquad \varphi_i=\sum_{h,k>0} \beta^{(i)}{}_{hk}\, u^h v^k,$$

per l'ipotesi fatta dovrà essere

$$\alpha^{(i)}{}_{10}=\beta^{(i)}{}_{10}, \qquad \alpha^{(i)}{}_{01}=\beta^{(i)}{}_{01}.$$

D'altra parte, non avendo $\Phi, \overline{\Phi}$ comportamento $\sigma_{1,2}$ in P, $\overline{P}$, si ha

$$\begin{vmatrix} \alpha^{(1)}{}_{10} & \alpha^{(2)}{}_{10} \\ \alpha^{(1)}{}_{01} & \alpha^{(2)}{}_{01} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} \alpha^{(3)}{}_{10} & \alpha^{(4)}{}_{10} \\ \alpha^{(3)}{}_{01} & \alpha^{(4)}{}_{01} \end{vmatrix} \neq 0,$$

Le ∞^4 omografie dell'insieme I che sono tangenti a γ in $P, \overline{P}$ mutano Φ nelle superficie Φ' di equazioni (λ parametri)

$$x_0=(1+\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)\,(1+\lambda_3 f_3+\lambda_4 f_4)$$
$$x_1=f_1(1+\lambda_3 f_3+\lambda_4 f_4), \qquad x_2=f_2(1+\lambda_3 f_3+\lambda_4 f_4)$$
$$x_3=f_3(1+\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2), \qquad x_4=f_4(1+\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)$$
$$x_5=f_1 f_3, \quad x_6=f_1 f_4, \qquad x_7=f_2 f_3, \quad x_8=f_2 f_4.$$

Consideriamo su Φ la curva C per cui $v=v(u)=\sum_{h>0} a_h u^h$; le due curve $\overline{C}, C'$ che si ottengono su $\overline{\Phi}$, Φ' per $v=v(u)$ avranno in $P\equiv P'$ un contatto geometrico del 2° ordine se sono verificate le condizioni

$$(1)\quad \left\| \begin{matrix} \begin{matrix} \beta^{(i)}{}_{20} - \alpha^{(i)}{}_{20} + (\beta^{(i)}{}_{11} - \alpha^{(i)}{}_{11})\, a_1 + \\ + (\beta^{(i)}{}_{02} - \alpha^{(i)}{}_{02})\, a_1{}^2 + (\alpha^{(i)}{}_{10} + \alpha^{(i)}{}_{01}\, a_1)\, . \\ . \{\lambda_i(\alpha^{(i)}{}_{01} + \alpha^{(i)}{}_{10}\, a_1) + \lambda_j(\alpha^{(j)}{}_{10} + \alpha^{(j)}{}_{01}\, a_1)\} \end{matrix} & \alpha^{(i)}{}_{10} + \alpha^{(i)}{}_{01}\, a_1 \\ \\ \begin{matrix} \beta^{(h)}{}_{20} - \alpha^{(h)}{}_{20} + (\beta^{(h)}{}_{11} - \alpha^{(h)}{}_{11})\, a_1 + \\ + (\beta^{(h)}{}_{02} - \alpha^{(h)}{}_{02})\, a_1{}^2 + (\alpha^{(h)}{}_{10} + \alpha^{(h)}{}_{01}\, a_1)\, . \\ . \{\lambda_h)\alpha^{(h)}{}_{01} + \alpha^{(h)}{}_{10}\, a_1) + \lambda_k(\alpha^{(k)}{}_{10} + \alpha^{(k)}{}_{01}\, a_1\} \end{matrix} & \alpha^{(h)}{}_{10} + \alpha^{(h)}{}_{01}\, a_1 \end{matrix} \right\| = 0$$

per $i \neq j = 1{,}2$ e $h \neq k = 3{,}4$.

Le condizioni (1) sono tre indipendenti nel coefficiente a_1 che determina la direzione della tangente a C in P. Uguagliando a zero i minori estratti dalla (1) formati rispettivamente con le prime due orizzontali e con le ultime due orizzontali si ottengono due equazioni cubiche in a_1 $E_{1,2} = 0$, $E_{3,4} = 0$ le quali *non* dipendono dai parametri λ (che determinano l'omografia tangente).

Se $E_{1,2} = 0$, $E_{3,4} = 0$ hanno una radice a_1 comune si potranno determinare i parametri λ in modo che essa soddisfi anche l'equazione $E_{2,3} = 0$ che si ottiene annullando, ad esempio, il minore formato con la 2ª e 3ª orizzontale. Pertanto la direzione a_1 sarà caratteristica per le omografie tangenti relative ai valori dei λ che sono stati determinati. Non vi possono essere più di tre radici comuni alle $E_{1,2} = 0$, $E_{3,4} = 0$, a meno che esse svaniscano entrambe identicamente. Ma affinchè ciò avvenga è necessario che in P la γ abbia comportamento quasi-asintotico. Infatti l'equazione cubica che fornisce i valori di a_1 relativi alle tangenti in P alle curve $\gamma_{1,2,3}$ di ϕ è

$$F = \begin{vmatrix} \alpha^{(1)}{}_{20} + \alpha^{(1)}{}_{11}\, a_1 + \alpha^{(1)}{}_{02}\, a_1{}^2 & \alpha^{(1)}{}_{10} + \alpha^{(1)}{}_{01}\, a_1 \\ \alpha^{(2)}{}_{20} + \alpha^{(2)}{}_{11}\, a_1 + \alpha^{(2)}{}_{02}\, a_1{}^2 & \alpha^{(2)}{}_{10} + \alpha^{(2)}{}_{01}\, a_1 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} \alpha^{(3)}{}_{20} + \alpha^{(3)}{}_{11}\, a_1 + \alpha^{(3)}{}_{02}\, a_1{}^2 & \alpha^{(3)}{}_{10} + \alpha^{(3)}{}_{01}\, a_1 \\ \alpha^{(4)}{}_{20} + \alpha^{(4)}{}_{11}\, a_1 + \alpha^{(4)}{}_{02}\, a_1{}^2 & \alpha^{(4)}{}_{10} + \alpha^{(4)}{}_{01}\, a_1 \end{vmatrix} = 0$$

e l'analoga equazione $\overline{F} = 0$ relativa a $\overline{\phi} = 0$ si ottiene dalla $F = 0$ cambiando le α nelle β. Ora $\overline{F} - F \equiv E_{1,2} - E_{3,4}$; quindi se $E_{1,2} \equiv 0$, $E_{3,4} \equiv 0$, devono corrispondersi in γ le tangenti in $P, \overline{P}$ alle $\gamma_{1,2,3}$ di $\phi, \overline{\phi}$, cioè γ deve avere in $P, \overline{P}$ comportamento quasi- asintotico.

D'altra parte appare che, se γ non ha comportamento quasi-asintotico in $P, \overline{P}$, non si possono determinare le λ in modo che $E_{2,3} = 0$ abbia più di due radici in comune con $E_{1,2} = 0$ e $E_{3,4} = 0$. Se $E_{1,2} \equiv E_{3,4} \equiv 0$ (sicchè γ ha comportamento quasi-asintotico in $P, \overline{P}$) esistono omografie tangenti dell'insieme I per cui ogni direzione tangente in P (in $\overline{P}$) è caratteristica.