CONVERGENCIA, SEPARABILIDAD Y AXIOMA DE ELECCION

por Gregorio Klimovsky

El objeto de este trabajo es demostrar la equivalencia lógica entre el axioma restringido de elección y ciertos teoremas elementales sobre separabilidad y convergencia en espacios topológicos. Se examinan también en él las condiciones en las que tal situación puede extenderse hasta convertirse en una equivalencia lógica con el axioma de elección.

Comenzaremos estableciendo la equivalencia lógica de los siguientes enunciados:

E_1: *Todo espacio topológico* (1) *que satisface el segundo axioma de numerabilidad es separable.*

E_2: *En todo espacio topológico X que satisface el primer axioma de numerabilidad, para todo punto s que sea de acumulación de un subconjunto A de X, existe una sucesión en $A \sim \{s\}$ que converge a s.*

E_3: *Para toda familia infinita numerable de conjuntos no vacíos disyuntos dos a dos, existe un conjunto infinito incluido en la unión de los conjuntos de la familia y que interseca a cada uno de éstos en un elemento a lo sumo.*

E_4: *Para toda familia numerable no vacía de conjuntos no*

---

(1) Salvo diferencias de detalle, las notaciones y definiciones relacionadas con teoría de conjuntos o topología son las de [4]. En particular, diremos que un conjunto es "finito" si su cardinal es un número natural, y que es "numerable" si su cardinal es menor o igual que el del conjunto de los números naturales. Si F es una familia, es decir, un conjunto de conjuntos, $\bigcup F$ es la unión de todos los miembros de F, o sea $\bigcup \{X_a, a \in F\}$ en la notación de [4]; análogamente para la intersección de F, $\bigcap F$. "Separable" se usa aquí, como en [4], para indicar la existencia de un conjunto numerable denso en el espacio. Dos conjuntos son "disyuntos" si su intersección es el conjunto vacío.

vacíos disyuntos dos a dos, existe un conjunto incluido en la unión de los conjuntos de la familia y que interseca a cada uno de éstos exactamente en un elemento.

E_4 es una forma del llamado «axioma restringido de elección» o también «axioma numerable de elección» (2); se trata de una afirmación más débil (3) que el axioma de elección pero que, al igual que éste último, es independiente (4) y consistente (5) respecto de los restantes axiomas de la teoría de conjuntos (6), siempre que éstos constituyan un sistema no contradictorio. E_3 es un enunciado aparentemente más débil que E_4 (7); de ahí el interés en probar que en realidad es equivalente a este axioma. E_1 y E_2 son teoremas elementales de topología gene-

(2) La denominación ''restringido'' parece deberse a Tarski (véase [9], y también [1], pág. 51). La denominación ''numerable'', usada en relación con este axioma, se emplea por ejemplo en [6], pág. 512, donde ya se señala la estrecha conexión que existe entre E_4 y ciertos teoremas elementales de topología. Nótese que el ''axioma de elección'' común dice lo mismo que el restringido pero sin imponer limitaciones al número cardinal de la familia no vacía de conjuntos no vacíos disyuntos dos a dos.

(3) Mostowski ha mostrado que el llamado ''principio de elecciones dependientes'' es más débil que el axioma de elección (es decir, no lo implica) [5]; pero, como observó Tarski [9], el principio de elecciones dependientes implica el axioma restringido de elección. Este último no puede, por consiguiente, implicar al axioma de elección. Ver [7], pág. 131.

(4) De acuerdo con los ya clásicos resultados de Fraenkel, Mostowski y Mendelson, el axioma más débil de elección (para familias numerables disyuntas de pares no ordenados) es independiente de la teoría de conjuntos cuando ésta es consistente, no posee ninguna clase de axiomas de elección —fuertes o débiles—, y se acepta la existencia de infinitos objetos que no son conjuntos, o la existencia de ''conjuntos extraordinarios''. De ahí sale la independencia, en un tal sistema, de las proposiciones que implican la forma más débil, entre ellas el axioma restringido. Debe tenerse en cuenta que el problema de la independencia del axioma de elección, o de sus formas débiles, es todavía un problema no resuelto cuando se trata de ''teorías puras'' de conjuntos. Véase [1], pág. 51. En estas discusiones, ''independiente'' quiere decir ''no demostrable a partir de los demás axiomas de la teoría''. La cuestión de la independencia en el sentido de ser además consistente con los restantes axiomas, está ligada a los resultados de Gödel (5).

(5) La consistencia del axioma fuerte de elección (existencia de una función que a todo conjunto asigne uno de sus elementos) y, por lo tanto, la de todas las formas débiles que de él se derivan, incluído el axioma restringido de elección, es un resultado clásico válido para los sistemas usuales de teoría de conjuntos, incluso en sus formas ''puras''. Ver Gödel [2]. Se exceptúan sistemas como el de Quine, desarrollados en Rosser [6], en los que el axioma de elección es falso —según el resultado de [8].

(6) Los sistemas usuales de teoría de conjuntos que aquí implícitamente consideramos son los de Zermelo, Zermelo-Fraenkel, von Neumann-Bernays-Gödel, sistemas simples de teoría de los tipos, etc. Ver [3].

(7) Pues, según la nomenclatura adoptada más adelante, E_4 afirma la existencia de ''selectores'' para una dada familia de conjuntos disyuntos dos a dos, aún cuando ella sea infinita, mientras que E_3 sólo afirma la existencia de ''seudo-selectores'' para este último caso.

ral (8), generalmente considerados como consecuencias muy particulares del axioma restringido de elección; al resultar lógicamente equivalentes a éste último, se tiene que también ellos son independientes y consistentes respecto de los demás axiomas de la teoría de conjuntos —siempre bajo el ya mencionado supuesto de que aquéllos constituyen un sistema no contradictorio—. La equivalencia de E_1 y de E_2 con E_4 sirve también para probar que E_1 y E_2 son más débiles que el axioma de elección (3).

Por otra parte, aún teniendo en cuenta el carácter elemental de E_1 y E_2, el que ambos enunciados se impliquen mútuamente —es decir, que desde el punto de vista lógico expresen un mismo estado de cosas— no constituye un hecho obvio que se encuentre señalado en el tratamiento de estos temas en los textos usuales de topología.

Para lograr nuestro cometido vamos a demostrar que E_2 implica E_3, que E_1 implica E_3, que E_3 implica E_4, que E_4 implica E_2 y que E_4 implica E_1.

E_2 *implica* E_3. Sea F una familia numerable de conjuntos no vacíos disyuntos dos a dos. Sea s un elemento que no pertenezca a $\cup$ F, y pongamos $X = \cup F \cup \{s\}$ (9). Vamos a definir una topología para X, estipulando que un subconjunto Y de X es abierto en la topología si y sólo si existe una subfamilia finita G de F tal que $Y = X \sim \cup G$ (no excluyéndose el caso en que G es vacío) o si Y es vacío. Es fácil verificar que la

(8) Véase, por ejemplo, [4], págs. 49 y 72. Añadido durante la impresión. Ya en 1919, W. Sierpinski, en un artículo titulado *L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l'analyse* y publicado en el Bull. de l'Acad. des Sc. de Cracovie, Cl. des Ec. Math. et Nat., Serie A, 1918, 97-152, señaló la equivalencia lógica entre ciertas formas débiles del axioma de elección (por ejemplo, la que afirma la existencia de selectores para familias numerables disyuntas no vacías de puntos de la recta) y ciertos teoremas de análisis elemental. En particular, la equivalencia entre E_3 y E_4 es una generalización de uno de los resultados de Sierpinski para sucesiones convergentes de números reales, generalización extendida a una familia muy amplia de espacios topológicos y establecida sin emplear las propiedades métricas de la recta. Ver [1], pág. 65, de donde extraemos la referencia.

(9) En los sistemas de Zermelo, Bernays, etc., se demuestra la inexistencia de un conjunto universal. De ahí que, dado un conjunto cualquiera, por ejemplo $\cup$ F, la existencia de un elemento s que no está en él puede siempre garantizarse. En los demás sistemas, si F es infinita y su unión es el conjunto universal, quítesele uno cualquiera de sus miembros, obteniéndose una nueva familia F' cuya unión no será ya el conjunto universal. La existencia de "seudo-selectores" y de "selectores" para F' implica obviamente la misma cosa para F.

familia Y constituída por tales conjuntos Y satisface la definición de «topología», de donde (X, Y) es un espacio topológico. Como F es numerable, la familia integrada por sus subfamilias finitas es numerable ([10]), de donde Y resulta ser numerable. Luego (X, Y) satisface el segundo axioma de numerabilidad, de donde «a fortiori» satisface el primero.

Por otra parte, si definimos A haciéndolo igual a $X \sim \{s\}$, se tiene que todo conjunto abierto contiene a s e interseca a todo conjunto de F —salvo a un número finito de éstos últimos a lo sumo—, o sea que interseca a A; en otras palabras, s es un punto de acumulación de A. Luego, en virtud de la hipótesis E_2, existirá una sucesión S cuyo dominio de valores está contenido en $A \sim \{s\}$, es decir, en A, y que converge a s. Nótese que el dominio de valores de S no puede ser finito, pues, en caso contrario, como dicho dominio de valores está contenido en A y $A = \bigcup$ F, todos los conjuntos de F —menos un número finito a lo sumo— no contendrán puntos del mismo, de donde se concluye la existencia de un entorno de s sin puntos del aludido dominio de valores de la sucesión (v. g., quitando a X la unión de los conjuntos de F que contienen puntos del dominio), lo cual contradice el hecho de ser s punto de acumulación de A. Más aún, razonando del mismo modo, puede verse que los valores de S, aún cuando constituyan un conjunto infinito, no pueden estar contenidos en la unión de sólo un número finito de elementos de F. Esto permite definir por inducción, a partir de S, otra sucesión T, del siguiente modo: $T(0) = S(0)$; $T(n+1) = S(i)$, donde i es el menor número natural tal que, para todo j, $0 \leqq j \leqq n$, $S(i)$ no sea igual a $T(j)$ ni esté en un mismo conjunto de F con $T(j)$ —nótese que, visto lo dicho acerca del dominio de valores de S, $T(n+1)$ existe si los $T(j)$, $0 \leqq j \leqq n$, existen—. De aquí se tiene que T es biunívoca, de lo cual resulta que el dominio de valores de T es el conjunto cuya existencia se afirma en E_3, puesto que es infinito, está incluido en la unión de F y no contiene pares de elementos distintos pertenecientes a un mismo conjunto de F.

E_1 *implica* E_3. Sea, como antes, una familia F infinita

([10]) Véase [7], pág. 41. Nótese que para establecer este resultado no se emplea ninguna forma del axioma de elección, aún cuando se tome en cuenta la "numerabilidad" del conjunto y no su "numerabilidad efectiva".

numerable de conjuntos no vacíos disyuntos dos a dos, y sea (X, Y) el espacio topológico definido para $X = \cup F$, cuyos conjuntos abiertos son los conjuntos obtenidos quitando a X las uniones de subfamilias finitas de F (entre ellas la familia vacía). El conjunto vacío también se considera abierto. Como el conjunto de tales subfamilias es numerable, (X, Y) resulta satisfacer el segundo axioma de numerabilidad. Por consiguiente, dada la hipótesis E_1, debe existir un subconjunto S de X, numerable y denso en X. Los puntos de S no pueden estar contenidos en la unión de sólo un número finito de conjuntos de F, pues quitando a X esa unión se obtendría un conjunto abierto sin puntos de S, lo que contradice la densidad de S. De aquí resulta ser S un conjunto infinito, cuyos puntos están en infinitos miembros distintos de F. Consideremos una enumeración $s_0, s_1, \dots, s_n, \dots$ de los elementos de S. Podemos definir por inducción otro conjunto infinito numerable T, con una enumeración $t_0, t_2, \dots, t_n \dots$ para sus elementos, poniendo $t_0 = s_0$, y $t_{n+1} = s_i$, donde i es el menor número natural tal que, para todo j, $0 \leqq j \leqq n$, s_i no sea igual a t_j ni esté en un mismo conjunto de F con t_j. De aquí se tiene que T es el conjunto cuya existencia se afirma en E_3, pues es infinito, está incluido en la unión de F y no contiene pares de elementos distintos pertenecientes a un mismo conjunto de F.

E_3 implica E_4. Sea F una familia cualquiera no vacía de conjuntos no vacíos disyuntos dos a dos. Diremos que un subconjunto de $\cup$ F es un «seudo-selector» de F si interseca a cada conjunto de F en un elemento a lo sumo. Si, además, tal subconjunto de $\cup$ F no es disyunto con ningún elemento de F, diremos que se trata de un «selector» de F. E_4 afirma la existencia de selectores de F cuando ésta es numerable. Vamos a considerar únicamente el caso en que F es infinita pues, en caso contrario, la verdad de E_4 se desprende del hecho de que el axioma de elección es un teorema de la teoría general de conjuntos cuando se aplica a familias finitas (11).

Al ser F infinita numerable, podemos considerar una enumeración cualquiera de F, es decir, una cualquiera de las correspondencias biunívocas entre F y el conjunto de los números naturales. Para cada número natural i, sea F_i el miembro

(11) Ver [7] pág. 92, y [1] pág. 49.

de F que corresponde a i en la aludida numeración, y sea $H_i = \times\{F_j : 0 \leqq j \leqq i\}$. Notemos que ninguno de los conjuntos H_i es vacío, pues ninguno de los F_i lo es ([12]), y que para $i \neq k$, H_i es disyunto con H_k, pues los elementos de H_i son funciones con dominio igual a $\{j : 0 \leqq j \leqq i\}$, mientras que los de H_k son funciones con dominio en $\{j : 0 \leqq j \leqq k\}$ ([13]). Luego H, la familia de todos los conjuntos H_i, i número natural, es una familia infinita numerable de conjuntos no vacíos disyuntos dos a dos. Por consiguiente, en virtud de la hipótesis E_3, debe existir un seudo-selector infinito M de H. Es fácil definir una enumeración para los elementos de M, pues a cada elemento de M corresponde un único elemento de H al cual pertenece, de lo cual resulta la existencia de una correspondencia biunívoca entre M y una subfamilia de H que deberá ser infinita y, por lo tanto, numerable. Podemos entonces definir m_0 como aquel elemento m de M para el que existe el menor número natural i tal que $m \in H_i$; y podemos definir m_{n+1} como aquel elemento m de M distinto de todos los m_j, $0 \leqq j \leqq n$, para el que existe el menor número natural i tal que $m \in H_i$. De este modo la enumeración de M queda establecida por inducción.

Para cualquier par i, j de números naturales, $0 \leqq i \leqq j$, definamos $\varphi^{i,j}$ como la función con dominio en H_j y dominio de valores en F_i tal que, a cada elemento h de H_j hace corresponder el elemento $h(i)$ de F_i —en otras palabras, dada la definición de H_j como producto cartesiano de los F_i, $0 \leqq i \leqq j$, se tiene que $\varphi^{i,j}$ es la «proyección» de H_j sobre F_i—. Sea ψ la función cuyo dominio está constituido por los números naturales, que a cada número natural n hace corresponder otro número natural $\psi(n)$ tal que $m_n \in H_{\psi(n)}$; la unicidad de ψ sale del hecho de ser M un seudo-selector de H, y la existencia de $\psi(n)$ para cada número natural n sale de la infinitud numerable de M. Obsérvese que, debido a la manera en que enumeramos M, $\psi(n) \geqq m$ para todo m. Podemos ahora definir una

([12]) Nótese que, como antes, se emplea aquí el axioma de elección para el caso finito, es decir, un teorema de la teoría de conjuntos sin axiomas de elección fuertes ni débiles ([11]).

([13]) En particular, H_0 es el conjunto de todas las funciones con dominio en $\{0\}$ y valores en F_0; de este modo H_0 y F_0 están en una correspondencia biunívoca obvia que, a cada elemento h de H_0, hace corresponder el elemento $h(0)$ de F_0. Sin embargo, si para formar la familia H reemplazamos H_0 por F_0, la familia podría no ser de conjuntos disyuntos dos a dos.

función f con dominio igual al conjunto de los números naturales y valores en $\cup$ F, que a cada número natural n hace corresponder el elemento $\varphi^{n,\psi(n)}(m_n)$. De acuerdo a lo dicho respecto de las funciones φ y ψ, la función f hace corresponder a cada número natural i un elemento de F_i. De ahí se tiene que si $i \neq j$ deberá ser $f(i) \neq f(j)$ —pues F_i es disyunto con F_j—, de modo que es biunívoca; el dominio de valores S de f resulta ser entonces un selector de F, ya que $S \subset \cup$ F, S interseca a cada conjunto de F en un elemento a lo sumo, pero no es disyunto con ninguno de tales conjuntos, pues para todo i, F_i contiene a $f(i)$.

E_4 *implica* E_2 y E_4 *implica* E_1. La demostración de E_2 y de E_1 utilizando el axioma de elección es bien conocida, restando sólo hacer notar que el empleo de tal axioma es innecesario, bastando usar el axioma restringido de elección. En el caso de E_2 esto se debe a que, para construir la sucesión en $A \sim \{s\}$ que converge a s, es suficiente considerar una sucesión $E_0, E_1, \ldots, E_n, \ldots$ de entornos de s que constituyen una base local en s (14), y definir a continuación otra base local $G_0, G_1, \ldots G_n, \ldots$, donde $G_n = \cap\{E_i : i = 0, 1, \ldots n\}$, y $G_{n+1} \subset G_n$ para todo número natural n; para cada n se elige entonces un punto de $G_n \cap (A \sim \{s\})$. Pero esto último exige admitir la existencia de una función que, para cada número natural n, hace corresponder un punto de $G_n \cap (A \sim \{s\})$. En el caso de E_1, es necesario considerar una base numerable de conjuntos abiertos $O_0, O_1, \ldots, O_n, \ldots$ y —para construir el conjunto denso numerable pedido— elegir un punto de O_n para cada número natural n; pero esto requiere admitir la existencia de una función que, para cada número natural n, hace corresponder un punto de O_n. La existencia de funciones tales es mera consecuencia del principio según el cual, dada una sucesión cualquiera de conjuntos no vacíos $D_0, D_1, \ldots, D_n, \ldots$ —no forzosamente disyuntos dos a dos—, existe una función f con dominio en el conjunto de los números naturales tal que, para todo n, $f(n) \in D_n$. Fácil es ver que tal principio es lógicamente equivalente a E_4. En efecto, que el principio implica E_4 sale de que, si F es una familia numerable no vacía de conjuntos no vacíos disyuntos dos

(14) Sucesión que existe pues el espacio satisface el primer axioma de numerabilidad.

a dos, y si $F_0, F_1, \ldots, F_n, \ldots$ es una enumeración de los miembros de F, entonces el selector de F cuya existencia se afirma en E_4 se obtiene identificándolo al dominio de valores de una cualquiera de las funciones con dominio en el conjunto de los números naturales y tales que $f(n) \in F_n$ para todo n, funciones cuya existencia está garantizada por el aludido principio. Recíprocamente, si E_4 es verdadero, y si $D_0, D_1, \ldots, D_n, \ldots$ es una sucesión de conjuntos no vacíos, entonces, definiendo para cada número natural n $F_n = D_n \times \{n\}$, se obtiene una familia F numerable no vacía de conjuntos no vacíos disyuntos dos a dos: la constituida por los F_n. Si S es el selector cuya existencia se afirma en E_4, la función f mencionada en el principio en cuesttión se obtiene definiendo $f(n) = \varphi(S \cap F_n)$, donde φ es la función que, a cada conjunto unitario $\{(d, m)\}$ constituido por un par ordenado (d, m), hace corresponder el primer término del par, es decir, d. Por consiguiente, como $S \cap F_n = \{(d, n)\}$ —por ser S selector de F—, $\varphi\{(d, n)\} = d$, de donde $d \in D_n$ y $f(n) = d \in D_n$.

Establecida así la equivalencia entre nuestros cuatro enunciados, surge el problema de si es posible particularizar los enunciados E_1 y E_2 de modo que continúen siendo equivalentes al axioma restringido de elección. Examinando el espacio topológico (X, Y) utilizado en la demostración de que E_2 implica E_3, puede verse sin dificultad que se trata de un espacio topológico conexo, ya que, para que un subconjunto no vacío de X sea cerrado, es necesario y suficiente que sea la unión de una subfamilia finita de F (o que sea igual a la unión de F); pero como F es infinita tenemos que no es posible que X sea la unión de dos conjuntos cerrados no vacíos disyuntos. Por otra parte, como Y es numerable, el espacio topológico (X, Y) satisface el segundo axioma de numerabilidad —según ya indicamos antes—. Además, el espacio (X, Y) es compacto [15]; para ello basta notar que, si un abierto de la topología contiene un punto de algún $Z \in$ F, contiene todos los puntos de Z. De ahí se tiene que, dado un cubrimiento de abiertos para X, considerando un abierto J cualquiera del mismo y los miembros de F no incluídos en él, si se elige para cada uno de éstos últimos [12] un

[15] En el sentido de [4], pág. 135; el espacio no es forzosamente de Hausdorff.

miembro del cubrimiento que lo incluya, se obtiene un subcubrimiento finito. Por otra parte, la existencia de un punto como el s, que está en todos los abiertos no vacíos de la topología Y, muestra que el conjunto $\{s\}$ es denso en X, de modo que el espacio X es separable. Nótese que, si se desea estudiar el enunciado E_2, o algunas de sus particularizaciones, sin presuponer sus equivalencias con enunciados como E_1 —que fue lo que hicimos en un comienzo, cuando demostramos que E_2 implica E_3 sin conocer la relación lógica entre E_1 y E_2—, no podemos dar por sentado que el espacio (X, Y) sea separable partiendo del hecho previamente establecido de que cumple el segundo axioma de numerabilidad, pues eso es admitir E_1 como verdadero. Todo esto permite establecer la equivalencia de E_4 con el siguiente enunciado E_2', utilizando, como antes, el espacio topológico (X, Y) para establecer que E_2' implica E_3 [16]:

E_2': *En todo espacio topológico X que satisface el segundo axioma de numerabilidad, que además sea conexo, compacto y separable, para todo punto s que sea de acumulación de un subconjunto A de X, existe una sucesión en* $A \sim \{s\}$ *que converge a s.*

El espacio (X, Y) no satisface ninguno de los axiomas usuales de separación; dos puntos de X que estén en un mismo conjunto de F deben pertenecer a los mismos entornos. Queda abierto el problema de si es posible mantener la equivalencia con E_4 imponiendo al espacio topológico mencionado en E_2 (o en E_2') alguna condición fuerte de separación, por ejemplo, la de ser un espacio de Hausdorff o la de ser regular. Nótese que, si se modifica ligeramente la definición de la topología Y, estipulándose como abierto a cualquier subconjunto de X que incluya a todos los miembros de F salvo un número finito a lo sumo —con los que no es forzoso que sea disyunto—, además del conjunto vacío, entonces el espacio resulta ser T_0, además de conservar sus propiedades de separabilidad, conexión, compacidad y de satisfacer el segundo axioma de numerabilidad (pues los que antes eran abiertos ahora también lo son, aún cuando no sean *todos* los abiertos, y es fácil verificar que constituyen una base en la nueva topología).

---

(16) La implicación de E_3 con E'_2 resulta de que E_2 implica E'_2; la de E_3 con E'_1 resulta de que E_1 implica E'_1.

Consideraciones paralelas a las recién efectuadas, pero aplicadas al espacio topológico (X, Y) utilizado en la demostración de que E_1 implica E_3, llevaría a mostrarnos que éste es conexo y compacto. Efectuando, como recién, un cambio en la definición de la topología Y, permitiendo considerar como abiertos a todos los conjuntos que incluyan a casi todos los conjuntos de F —es decir, todos salvo un número finito a lo sumo—, entonces el espacio resultaría ser un T_1 (no existe ahora un punto como el s del ejemplo utilizado en la demostración de que E_2 implica E_3, que estaba en todos los conjuntos abiertos). Ello permite demostrar la equivalencia de E_4 con el siguiente enunciado E_1', utilizando, como antes, el nuevo espacio topológico (X, Y) para establecer que E_1' implica E_3' (16):

E_1': *En todo espacio T_1, conexo y compacto, que satisface el segundo axioma de numerabilidad, existe un conjunto denso numerable.*

Como en el caso de E_2 y E_2', queda abierto el problema de si puede mantenerse la equivalencia de E_1 (o de E_1') con E_4 imponiéndose condiciones severas de separación, por ejemplo, la de que el espacio sea de Hausdorff o regular.

Surge ahora el problema de generalizar los enunciados E_1 y E_2 de manera que lleguen a ser equivalentes al axioma de elección. Con este fin, vamos a mostrar que éste último es lógicamentte a cada uno de los dos siguientes enunciados:

F_1: *En todo espacio topológico conexo* (17) *existe un subconjunto bien ordenable denso en el espacio.*

F_2: *En todo espacio topológico, si s es un punto de acumulación de un subconjunto A del espacio, existe una red en $A \sim \{s\}$, definida sobre un conjunto dirigido bien ordenable, que converge a s.*

(17) La exigencia de que el espacio sea conexo es esencial para no trivializar el problema. Pues, si consideramos el espacio discreto construído sobre un conjunto cualquiera, el único subconjunto denso en el total es precisamente el propio espacio, el que deberá ser bien ordenable si se admite que algún subconjunto denso (en este caso, el único posible) debe ser bien ordenable.

Un conjunto dirigido $(D, \geqq)$ se dirá bien ordenable si D es un conjunto bien ordenable. Que el axioma de elección implica a F_1 tanto como a F_2, es un hecho bien conocido de topología elemental ([18]). Las implicaciones inversas, que constituyen una generalización de los resultados establecidos más arriba, muestran que F_1 y F_2 son lógicamente equivalentes entre sí, lo que no se advierte en el tratamiento habitual de estos teoremas, y que son independientes y consistentes respecto de los restantes axiomas de la teoría de conjuntos ([4]), ([5]).

F_1 *implica el axioma de elección.* Supongamos que X sea un conjunto no bien ordenable. Sea Y la familia integrada por el conjunto vacío y por todos los conjuntos de la forma $X \sim Y$, donde Y es un subconjunto bien ordenable de X. Como la intersección de una familia cualquiera de conjuntos bien ordenables es bien ordenable y la unión de dos tales conjuntos también lo es, la familia Y resulta ser una topología para X ([19]). En virtud de la hipótesis F_1, aplicada al espacio topológico (X, Y), deberá existir un subconjunto D de X, denso en el espacio, y bien ordenable. D no puede coincidir con X, debido a nuestra hipótesis acerca de la inexistencia de buenas ordenaciones para X. Luego $X \sim D$ no es vacío, de dondè, debido a nuestra definición de la topología Y, resulta $X \sim D \in \mathrm{Y}$. Pero entonces tenemos que D es disyunto con un conjunto abierto —con $X \sim D$—, lo cual contradice la densidad de D. Ello muestra que nuestra suposición acerca de X es falsa, de lo cual resulta que X es bien ordinable. Como X es cualquiera resulta que todo conjunto es bien ordenable, lo cual es equivalente al axioma de elección.

F_2 *implica el axioma de elección.* Sea A un conjunto no bien ordenable, y s un elemento que no pertenezca a A. Pongamos $X = A \cup \{s\}$, y definamos Y como la familia integrada por el conjunto vacío y por todos los conjuntos de la forma

([18]) Para demostrar F_2, hasta elegir un punto de A para cada conjunto abierto que contenga a s. Pues tales conjuntos, están dirigidos por $\subset$, y constituyen una familia bien ordenable si el axioma de elección es válido. F_1 es obvio, pues todo el espacio será un conjunto denso bien ordenable, si el mencionado axioma es cierto.

([19]) El espacio topológico que así se obtiene es conexo, ya que lo contrario implicaría la posibilidad de dividir al conjunto X, que no es bien ordenable, en dos subconjuntos no vacíos disyuntos, cada uno de ellos bien ordenable.

$X \sim Y$, donde Y es un subconjunto bien ordenable de A. Como antes, fácil es ver que Y es una topología para X. Como A no es bien ordenable, todo conjunto abierto interseca a A, y como todos ellos contienen al punto s, resulta ser s punto de acumulación de A, o sea, de $A \sim \{s\}$. En virtud de F_2, debe existir una red $(S, \geqq)$ en $A \sim \{s\}$, que converge a s, tal que el dominio de S sea bien ordenable. Observemos que, si el dominio de una función es bien ordenable, el dominio de valores también; para ello, basta hacer notar que, si a cada elemento x del rango hacemos corresponder el menor elemento $\varphi(x)$ del dominio —en una dada buena ordenación de éste último— tal que $S(\varphi(x)) = x$, y si, para dos valores a y b ponemos $a \leqq b$ si y sólo si $\varphi a \leqq \varphi b$ en el dominio, entonces la ordenación obtenida para el dominio de valores de S es una buena ordenación. Pero, si llamamos T a dicho dominio de valores, como $T \subset A, X \sim T$ no es vacío y es un entorno de s. Pero este entorno no contendrá valores de S, lo cual contradice que la red converge a s. Luego, no puede existir tal conjunto A no bien ordenable, y el axioma de elección es válido.

Si se intenta particularizar los enunciados F_1 y F_2, manteniendo su equivalencia con el axioma de elección, puede notarse que el espacio topológico utilizado en la demostración de que F_1 implica el axioma de elección es T_1; ello resulta de que los conjuntos unitarios son bien ordenables, es decir, cerrados en la topología. En cuanto al espacio utilizado en la demostración de que F_2 implica el axioma, se tiene que es conexo pero no T_1, pues s está en todos los abiertos (20). Ello permite establecer la equivalencia del axioma de elección con los dos siguientes enunciados:

F_1': *En todo espacio topológico que sea T_1 y conexo, existe un subconjunto bien ordenable denso en el espacio.*

F_2': *En todo espacio topológico T_0, conexo y separable, si s es un punto de acumulación de un subconjunto A del es-*

(20) Pero el espacio es T_0, pues, dados dos puntos diferentes, como uno de ellos no es s su complementario en el total es un abierto que contiene al otro. Además, el espacio es separable pues el conjunto unitario $\{s\}$ está incluído en todos los abiertos.

pacio, existe una red en $A \sim \{s\}$, *definida sobre un conjunto dirigido bien ordenable, que converge a* s.

Queda abierto el problema de si la equivalencia con el axioma de elección se mantiene imponiendo condiciones de separación más severas, como ser la de que el espacio sea de Hausdorff (21) o normal. De igual modo, cabe preguntarse si F_2' se hace más débil que el axioma de elección si se impone al espacio la condición de ser compacto.

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA.
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES.
UNIVERSIDAD NACIONAL DE BUENOS AIRES.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. A. FRAENKEL, Y. BAR-HILLEL, *Foundations of Set Theory*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics .North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1958.

[2] KURT GÖDEL, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory*. Princeton, 1940.

[3] HAO WANG, R. MC. NAUGHTON, *Les systemes axiomatiques de la théorie des ensembles*. París-Lovaina, 1953.

[4] JOHN L. KELLEY, *General Topology*. Van Nostrand, New York, 1955.

[5] A. MOSTOWSKI, *On the principle of dependent choices*. Fund. Math. 35 (1948), págs. 127-130.

[6] J. BARKLEY ROSSER, *Logic for Mathematicians*. McGraw-Hill, New York, 1953.

[7] W. SIERPIŃSKI, *Cardinal and Ordinal Numbers*, Warzawa 1958.

[8] E. P. SPECKER, *The axiom of choice in Quine's New foundations for mathematical logic*. Proc. of the Nat. Ac. of Sciences of the U.S.A., vol. 39 (1953), págs. 972-975.

[9] A. TARSKI, *Axiomatic and algebraic aspects on two theorems on sums of cardinals*. Fund. Math. 35 (1948), págs. 79-104.

(21) Modificando la definición del espacio topológico utilizado en la demostración de F_2 puede lograrse que se cumpla la condición T_1; pero entonces la separabilidad del espacio ya no es válida. Para ello basta considerar como abierto a *cualquier* complementario de un conjunto bien ordenable, contenga a s o no.