OPERACIONES POTENCIALES GENERALIZADOS Y SUMAS ORTOGONALES

por MISCHA COTLAR

(Instituto Matemática, Buenos Aires)

Esta ponencia es un resumen, sin demostraciones, de resultados y problemas referentes a una generalización de los operadores potenciales (*). Algunos de los enunciados son poco precisos y explícitos por tratarse de resultados no definitivos, cuyas demostraciones están aún en elaboración.

Sea $L^p(E^n)$ el conjunto de las funciones medibles $f(x)$ definidas en el espacio euclídeo $E^n=\{x\}$ tales que

$$\|f\|_p^{(n)}=\|f\|_p=\left\{\int_{E^n}|f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}<\infty, \tag{1}$$

donde $x=\{\xi_1\ldots\xi_n\}$, y $dx=d\xi_1\ldots d\xi_n$ es la medida de Lebesgue. Se dice que $h=Tf$ es un operador de *tipo* (p,s), o más precisamente de tipo $(L^p(E^n),L^s(E^m))$, si T hace corresponder a toda función f de $L^p(E^n)$ una función h de $L^s(E^m)$ de modo que

$$\|h\|_s^{(m)}\leqq M\,\|f\|_p^{(n)}, \tag{2}$$

siendo M una constante fija independiente de f; el mínimo M para el cual vale (2) es la *norma* de T. Para toda función h definida en E^m y todo $a>0$ sea $D(h;a)$ la medida (m-dimensional) del conjunto E_a de los puntos donde $|h(x)|>a$. Si $s<\infty$, se tiene evidentemente $(\|h\|_s)^s\geqq a^s\,|E_a|=a^s D(h;a)$. Luego si se verifica (2) entonces con más razón se verifica

$$D(h,a)\leqq(M\|f\|_p/a)^s, \tag{2a}$$

pero no recíprocamente. Por eso, si $s<\infty$, diremos con Zygmund [1] que T es de *tipo débil* (p,s) si se verifica (2) para

(*) Las cuestiones aquí resumidas han sido tratadas detalladamente en seminarios en el Instituto Matemático de Buenos Aires y en la Wáshington University de Saint Louis en 1958 y 1959. (Ver [8]).

todo $a > 0$ y toda f de L^p. Si $s = \infty$, entonces por definición tipo débil (p, s) es lo mismo que tipo (p, s). Si T es de tipo (o tipo débil) (p, s) se dice también que T es de tipo P donde P es el punto del plano de coordenadas $(1/p, 1/s)$; si $p, s \leqq 1$, entonces P es un punto del llamado *cuadrado de los tipos*. Los puntos de la diagonal principal d_0 de este cuadrado se caracterizan por la condición $p = s$, y los de la otra diagonal d' por la condición $1/s + 1/p = 1$, es decir $s = p' = p/(p-1)$. Análogamente se define el tipo $(L^p(D_n), L^s(D_m))$, donde $D_n \subset E^n$, $D_m \subset E^m$ son conjuntos acotados.

Dado un operador T uno de los problemas fundamentales que se presentan es determinar los puntos P tales que T es de tipo P. Aquí consideraremos este problema para el caso cuando T es un *operador potencial de M. Riesz*, o integral fraccionaria, de orden γ(*):

$$Tf = \tilde{f}_{\gamma n}(x) = c_{\gamma n} \int_{E^n} f(t)\,|x-t|^{\gamma-n}\,dt = f * |t|^{\gamma-n}, \qquad (3)$$

$$0 < \gamma \leqq n, \quad c_{\gamma n} = \Gamma((n-\gamma)/2)/\pi^{n/2}\, 2^{\gamma}\, \Gamma(\gamma/2). \qquad (3a)$$

Más aún consideraremos operadores potenciales *generalizados* cuya definición pasamos a dar. Para explicar el origen de esta definición recordaremos antes como se definen las transformadas de Hilbert n dimensionales, cuya teoría está íntimamente vinculada a la de los operadores (3). La transformada de Hilbert ordinario o 1-dimensional, corresponde al caso $n = 1$, $\gamma = 0$, en (3), y se define como

$$\tilde{f}_{01} = \int_{E^1} \frac{f(t)}{x-t}\,dt = f * (1/t) = f * N_{01}, \qquad (4)$$

siendo esta integral singular definida como valor principal (cfr. [2], [3]). Observemos que el núcleo $N(t) = N_{01}(t) = 1/t$ está caracterizado (salvo constante) por las dos propiedades siguientes: $N(at) = a^{-1} N(t)$ para *todo* $a > 0$, y la integral de N extendida al conjunto $1 < |t| < 2$ es nula. Por eso para $n > 1$ la transformada n-dimensional de Hilbert se define ([4], [5]) como

---

(*) Usaremos notaciones vectoriales: $x + y = (\xi_1 + \eta_1, \ldots, \xi_n + \eta_n)$, $(x, y) =$ producto escalar de x, y; $|x|^2 = (x, x)$; $*$ indicará el producto de convolución.

$\tilde{f}_{0n} = f * N_{0n}$ donde $N = N_{0n}$ es un núcleo tal que $N(ax) = a^{-n}$ $N(x)$ para *todo* $a > 0$, y todo x de E^n, y la integral de N extendida al anillo $1 < |x| < 2$ es nula. Si $\Sigma = \{x'\}$ es la esra unitaria de E^n, si para todo x es $x' = x/|x|$ y si $w(x')$ es la función definida en Σ por $w(x') = N_{0n}(x')$, entonces

$$\tilde{f}_{0n} = f * N_{0n}, \quad N_{0n}(x) = w(x')\, |x|^{-n}, \tag{4a}$$

y la integral de w sobre Σ es nula. $w(x')$ se llama *característica del operador* (4a). Hay pues tantas transformadas de Hilbert en E^n como funciones $w(x')$ con integral nula, mientras que en E^1 hay esencialmente una sola transformada de Hilbert.

Llamaremos operadores de *Hilbert generalizados* [6] a los operadores $H_{0n} f = f * K_{0n}$ cuyo núcleo verifica la propiedad homogénea *solo para un valor* de a, pongamos $a = 2$: $K_{0n}(2x) = 2^{-n} K_{0n}(x)$, siendo además nula la integral de K_{0n} extendida al anillo $1 < |x| < 2$. K_{0n} queda determinado por sus valores en $1 < |x| < 1$: si $k(x) = K_{0n}$ en $1 < |x| < 2$ y cero en los demás x, entonces $K_{0n}(x) = \Sigma^{\infty}{}_{-\infty} 2^{-ni} k(2^{-i} x)$, siendo nula la integral de k.

Volviendo a los operadores (3), observemos que su núcleo $N = N_{0\gamma} = |x|^{\gamma - n}$ verifica $N(ax) = a^{\gamma - n} N(x)$ para todo $a > 0$. Llamaremos pues operadores *potenciales generalizados* [7] a los operadores de la forma

$$H_{\gamma n} f = f * K_{\gamma n}, \quad 0 < \gamma \leqq n, \tag{5}$$

cuyo núcleo verifica la propiedad homogénea solo para $a = 2$:

$$K_{\gamma n}(2x) = 2^{\gamma - n} K_{\gamma n}(x). \tag{5a}$$

Poniendo $k(x) = \mathrm{K}_{\gamma n}$ en $1 < |x| < 2$ y nula en el resto, tendremos

$$K_{\gamma n}(x) = \Sigma^{\infty}{}_{i=-\infty} 2^{((\gamma - n)i} k(2^{-i} x). \tag{6}$$

Si $\gamma > 0$ la integral de $k(x)$ no necesita ser nula, más bien es $k \geqq 0$. Poniendo $k_i = k_{i\gamma}(x) = 2^{(\gamma - n)i} k(2^{-i} x)$ podemos escribir

$$K_{\gamma n}(x) = \Sigma^{\infty}{}_{-\infty} k_i(x), \quad H_{\gamma n} f = \Sigma^{\infty}{}_{-\infty} f * k_i, \tag{6a}$$

$k(x)$ se llamará núcleo *generador* y los k_i núcleos *generados* por k. En el caso de los operadores de Hilbert ordinarias el núcleo generador verifica las condiciones siguientes: a) $k(x)$ es nulo fuera de $|x|<2$; b) k es integrable con integral nula; c) $k(x) \in \mathrm{Lip}(1,1)$, es decir $\|k\|_{(1,1)}<\infty$, donde $\|k\|_{(p,\gamma)}$ (*) es la mínima constante c tal que $\|k(x+h)-k(x)\|_p \leqq c|h|^\gamma$. Por eso también en el caso de los operadores H_{0n} generalizados imponemos al núcleo generador las condiciones a) - c). Entonces los núcleos generados verifican la condición b) y las: a_i) k_i es nulo fuera de $|x|<2^i$; c_i) $\|k_i\|_{(1,1)} \leqq 2^{-i}c$. Análogamente al núcleo de $H_{\gamma n}$ le imponemos las siguientes condiciones, que se verifican en caso de los operadores (3) ordinarios: a') k es nulo fuera de $1<|x|<2$; b') k es >0 e integrable; c') $k \in \mathrm{Lip}(1,1)$. Entonces los núcleos generados verifican: a_i') k_i es nulo fuera de $2^i<|x|<2^{i+1}$; b_i') $\|k_i\|_1 \leqq 2^{i\gamma}c$; c_i') $\|k_i\|_{(1,1)} \leqq 2^{(\gamma-1)i}c$.

Llamaremos operadores *potenciales generalizados* * a los operadores de la forma $H_{\gamma n}f=\Sigma^{\infty}_{-\infty} f*k_i$, donde $\{k_i\}$ es una sucesión cualquiera de núcleos que verifican a_i') - c_i'). En particular, para $\gamma=0$, tendremos los *operadores de Hilbert generalizados* *. Más aún, las condiciones a_i) - c_i) implican (ver [6]) que los k_i son *casi ortogonales* en el sentido de que

$$\|k_{i+j} * k_i\|_1 \leqq 2^{-i}c, \quad \text{si} \quad j>0. \tag{7}$$

Análogamente a_i') - c_i') implican (ver [8], cap. 2) que los k_i son casi ortogonales en norma $(1, 2\gamma)$, es decir

$$\|k_i * k_{i+j}\|_{(1,2\gamma)} \leqq 2^{-i\gamma}c; \quad (j>0). \tag{7a}$$

Diremos que un operador H_γ es una *suma* γ*-ortogonal* si $H_\gamma=\Sigma^{\infty}_{-\infty} f*k_i$ y los k_i verifican (7a). En particular los 0-ortogonales son los que verifican (7). Así pues los operadores potenciales generalizados con caso particular de los generalizados *, y estos casos particular de las sumas γ-ortogonales. Para destacar el sentido de estas generalizaciones observemos que mientras en las transformadas de Hilbert los valores del núcleo N_{0n} pueden eligirse arbitrariamente tan sólo sobre la superficie esférica Σ, en las transformadas de Hilbert generalizadas los valores del núcleo K_{0n} pueden elegirse ar-

---

(*) Esto si $\gamma \leqq 1$. Si $\gamma>1$, $\gamma=\gamma'+\gamma''$, γ' = entero, $\gamma'' \leqq 1$, decimos que $k \in \mathrm{Lip}(p,\gamma)$ si k tiene derivadas absolutamente contínuas hasta el orden γ' y la derifada de orden γ' pertenece a $\mathrm{Lip}(p,\gamma'')$.

bitrariamente en la esfera sólida $|x| < 2$. Por eso las transformadas de Hilbert generalizadas forman una familia más amplia e incluyen también a los operadores del tipo de Fejer o ergódicos (ver [6]). Mucho más amplia aún es la familia de los operadores generalizados $*$ donde tenemos infinitos núcleos arbitrarios k_i que deben verificar a_i') - c_i'). Resulta que las propiedades básicas de los operadores potenciales ordinarios valen también para los generalizados $*$. Más aún, una parte de las mismas (que corresponden al caso $s = p'$) valen para las sumas γ-ortogonales. Pasamos a resumir estos hechos y algunos problemas que se les vinculan.

A) Calderón y Zygmund probaron (extendiendo a E^n resultados clásicos de E^1, debidos a Privalov, Lusin, M. Riesz y Kilmogorov [9]) que la transformada de Hilbert $\tilde{f}_{0n}$ existe como valor principal para toda $f \in L^p, 1 \leqq p < \infty$, y que el operador correspondiente es de tipo (p, p) si $1 < p < \infty$, y de tipo débil $(1,1)$, [4]. O sea los operadores de Hilbert son de tipo p para todo punto P interior de la diagonal $d_0 = A_0 B_0$, siendo de tipo débil en el extremo $B_0 = (1, 1)$. Todos estos resultados valen también [6] para los operadores de Hilbert generalizados $*$. Más aún, si $p = 2$ ellos valen también para las sumas 0-ortogonales ($p = 2$ corresponde a la intersección de d_0 con d') (*). (Cfr. Nota I). Para nosotros es de especial interés el siguiente

P r o b l e m a 1. Determinar para que otros valores de p, $p \neq 2$, son las sumas 0-ortogonales de tipo (p, p), o de tipo débil 1, y si es posible generalizar el concepto de 0-ortogonalidad de modo que esto valga para todo p.

E. Oklander está considerando [10] algunas aproximaciones al problema 1, usando la siguiente fórmula que generaliza la expresión clásica del radio espectral: si T es un operador en L^p, si $(Tf, g) = (f, Tg)$ para todo par de funciones elementales, entonces $\|T\| = \lim_{r \to \infty} (\|T_1{}^r\|)^{1/s}$ donde $s = 1 + rp'$, y $T_1 f = T\{[T(|Tf|^{p-1} \, sgn\, f]^{p'-1} \, sgn\, f\}$. Fórmulas análogas valen en el caso general de operadores de L^p en L^s.

Para las cuestiones indicadas en E), I), y otras, puede resultar útil considerar sumas 0-ortogonales continuas, dependientes de

(*) Aprovechamos la oportunidad para corregir una errata de [6] que puede inducir a confusiones: al comienzo de la última línea de la página 47, falta la palabra "luego".

un parámetro continuo $t \in E^m$: Sea $k(x) = k(t, x), t \in E^m, x \in E^n$, una familia de núcleos tal que $\|k_t * k_{t+s}\|_1 \leq M^2 \varepsilon^{-1+sm}$; entonces la suma continua (integral) $Hf = f * \left(\int k_t(x)\, d_t \mu \right)$ (μ = medida de Radón) es convergente para toda f y representa un operador de tipo $(2, 2)$. A estos teoremas sobre sumas 0-ortogonales se les puede dar una gran generalidad (cfr. [8], capítulo 2). Por ejemplo vale el siguiente teorema. Sea $V(a) \geqq 0$ una función decreciende de $a > 0$, $W(a, b)$ una función creciente en $a > 0$, y $b > 0$, μ una medida en E^m, y $\{x, y\}$ la medida-μ de la esfera de centro x y rado $|x - y|$. *Teorema:* Si a cada x de E^n está asignado un operador hermiteano $T(x)$, si para cada x, y los operadores $T(x), T(y)$ permutan y verifican $\|W(T(x); T(y))\| \leqq V(\{x, y\})$, entonces

$$\left\| \int_{E^n} T(x)\, d\mu \right\| \leqq \int_0^\infty V^{-1}(W(a, a))\, da.$$

Si $V(a) = \varepsilon^{a-1}$, $W(a, b) = ab$, $V^{-1}(a) = 1 + \log a / \log \varepsilon$, μ = medida discreta, obtenemos el teorema de las sumas ortogonales

B) Hardy y Littlewood (para $n = 1$, [12]), Sobolev y Thorin (para $n > 1$, [13], [14]), probaron que el operador potencial $\tilde{f}_{\gamma n}$, dado por (3), es de tipo $(L^p(E^n), L^s(E^n))$ para todo p, s tales que $1/p - 1/s = \gamma/n$, $\gamma/n < 1/p < 1$. O sea el operador (3) es de tipo P para todo punto interior del segmento d_γ que se obtiene trasladando d_0 en γ/n. Otras demostraciones de este teorema fueron dadas por Stein-Weiss [15] y Du Plessis [16]. Zygmund probó [1] que este operador es de tipo débil $(1, n/(n - \gamma))$, o sea de tipo débil en el extremo B de d_γ. Si $E^m \subset E^n$, y si en (3) hacemos t varían en E^n y x en E^m, entonces el operador (3) hace corresponder a funciones $f(t)$ definidas en E^n funciones $\tilde{f}_{\gamma n}$ definidas en E^m, de modo que cabe preguntar para que p, s este operador es de tipo $(L^p(E_n), L^s(E^m))$. Sobolev [4a] probó que el operador (3) es de tipo $(L^p(E^n), L^s(E^m))$ si $1/p - (m/n)(1/s) = \gamma/n$, $\gamma/n < 1/p < 1$, $m < n < m + \gamma$, o sea de tipo P para todo punto interior al segmento $d_{\gamma m}$ que se obtiene rotando d_γ con pendiente m/n. En realidad Sobolev probó un resultado mucho más débil, suponiendo que el operador se considera sobre dominios acotados (es decir t, y x, varían en (3) sólo en dominios acotados y no en todo el espacio), y que P está encima de $d_{\gamma m}$ estrictamente, y propuso como problema el resultado que acabamos de enunciar. El problema fue resuelto por Ilin [17] (ver también Smolitzki [17a]). Sin conocer el trabajo de Ilin, Panzone y el autor [7b], (cfr. [7a]), obtuvieron el mismo resultado por un método diferente que se aplica a situaciones más generales, probando además que el operador es de tipo débil $(1, m/n-\gamma)$ en el extremo del segmento. La misma situación se presenta si $E^m \supset E^n$. Si f y $\tilde{f}_{\gamma n}$ son considerados sobre dominios acotados $D^n \subset E^n$, $D_m \subset E^m$ (de modo que la integral en (3) se extiende solo a D_n) entonces, según lo probaron Sobolev y Kondrachiev [15a], el operador es de tipo P para todo punto situado sobre o encima de $d_{\gamma m}$; además si P está estrictamente encima de $d_{\gamma m}$ el operador es también completamente continuo (compacto); finalmente si $0 < 1/p < \gamma/n$ entonces el operador (3) actúa de $L^p(D^n)$ en $C(D_m)$ y es compacto (cfr. Nota 2).

Todos estos resultados de Thorin, Zygmund, Sobolev y Kondrachiev valen [7], [7a], [7b], para los operadores potenciales generalizados $* \; H_{\gamma n}$, $0 < \gamma \leqq n$. Estos resultados valen para sumas γ-ortogonales si $1/p + 1/s = 1$ (es decir si P está en la intersección de d_γ con d'), y se puede extender un poco más el dominio de los p donde estos resultados subsisten.

P r o b l e m a 2. No sabemos si para sumas γ-ortogonales estos resultados valen para todos los p, y cual es el campo de su validez; falta además aclarar la compacidad del operador.

C) De los resultados de B) resulta en particular que si $f \in L^p$, entonces $\tilde{f}_{\gamma n}$ es integrable sobre todo compacto, luego la integral (3) converge para todos los x salvo conjunto de medida nula. Más aún si $m < n < m + \gamma/p$ y $E^m \subset E_n$, entonces $\tilde{f}_{\gamma n}$ pertenece a cierto $L^s(E^m)$ y por tanto los puntos donde la integral (3) no converge forman conjunto de medida nula m-dimensional en todo subespacio E^m (y esto es mucho más que decir que es de medida nula n-dimensional). Consideremos ahora los puntos de divergencia contenidos en un conjunto m-dimensional pero no situado en un mismo subespacio E^m (por ejemplo, un conjunto contenido en una suma numerable de superficies m-dimensionales, $m < n$). Como se sabe, para tales conjuntos conviene usar las medidas fraccionarias de Hausdorff o la noción de capacidad.

Recordemos que un conjunto compacto $B \subset E$ tiene γ-*capacidad* nula si para toda medida de Radón μ tal que $\mu(B) > 0, \mu(E-B) = 0$ se verifica $\|\tilde{\mu}_\gamma(x)\|_\infty = \infty$, donde $\tilde{\mu}_\gamma = \mu * |x|^{\gamma-n}$. Du Plessis [16] probó el siguiente teorema: Si $\gamma/n < 1/p, p > 2$ y si $f \in L^p(E^n)$ entonces los puntos x en que la integral (3) no converge forman un conjunto de γ'-capacidad nula, para todo $\gamma' > n - \gamma p$; si $1 \leqq p \leqq 2$, entonces este conjunto es de $(n-\gamma p)$-capacidad nula. Introduciendo la noción de capacidad respecto de núcleo generales $K_{\gamma n}$, el teorema de Du Plessis se extiende [7] a los operadores potenciales $H_{\gamma n}$ generalizados $*$, así como a capacidad m-dimensional, $E^m \subset E^n$. En el mismo trabajo Du Plessis probó el siguiente teorema, que Hardy y Littlewood [12] demostraron para $n = 1$: Si $f \in \mathrm{Lip}\,\beta, 0 < \beta < 1$, entonces $\tilde{f}_{\gamma n} \in \mathrm{Lip}(\gamma + \beta)$, $0 < \gamma + \beta < 1$; si $f \in L^p(E^n), p > 1, 1/p + 1/n > \gamma/n > 1/p$, entonces $\tilde{f}_{\gamma n} \in \mathrm{lip}(\gamma - n/p)$. Para $n = 1$ Hardy y Littlewood dieron varios otros teoremas de este tipo (generalizados a $n > 1$ en [7]), por ejemplo: $f \in L^p(E^n)$ implica $f_{\gamma n} \in \mathrm{Lip}\,(p, \gamma)$ si $0 < \gamma < 1$. También estos teoremas se extienden a los operadores potenciales generalizados $*$ [7], así como al caso de clases $\mathrm{Lip}\,\beta(E^m), m < n$.

P r o b l e m a 2a. Determinar la estructura de los conjuntos de divergencia de las sumas γ-ortogonales, así como la validez para estas sumas de los teoremas referentes a las clases Lip.

D) Si, en vez de normas tomadas respecto de la medida de Lebesgue dx, se consideran normas respecto de meddias ponderadas $|x|^a dx$, entonces hablaremos de tipos $(L^p(E^n); |x|^a dx)$; $L^s(E^m, |x|^b dx))$. En caso de un dominio $D \subset E^n$ se usa en vez de $|x|^a$ un peso $\sigma(x)$ que tiende a cero, al tender x al contorno de D, con «velocidad» $|d(x)|^\alpha$, $d(x) =$ distancia al contorno. Hardy - Littlewood [12] probaron para $n = 1$ que los operadores (3) son del tipo $(L^p(E^n), |x|^b dx)$; $L^s(E^n, |x|^a dx)$ si $1/p - 1/s = \gamma/n - (a + b)$; Stein - Weiss [15a] extendieron este teorema a $n > 1$, que se reduce al teorema de Thorin - Sobolev si $a = b = 0$. En un trabajo en preparación, E. Ortiz y el autor [22] prueban que los resultados más precisos de Sobolev (para $E^m \subset E^n$, compacidad, tipo débil, etc.), se extienden al caso de tales pesos. E. Stein (para $n > 1$, [23]) y Babenko ($n = 1$, [23a]) probaron teoremas análogos para las transformadas de Hilbert. Todos estos teoremas valen para operadores (potenciales o de Hilbert) generalizados $*$, y parcialmente para las sumas ortogonales.

Kantarovich [18] mostró que los resultados «más débiles» de Sobolev-Kondrachev (para dominios compactos y P encima de d_Y) pueden deducirse de teoremas generales sobre operadores integrales, que extienden un teorema de Young (ver [8], cap. 4).

Problema 2b. Examinar para estos operadores integrales los tipos débiles, teoremas de capacidad, tipos ponderados, así como los teoremas de Horvath que se mencionan en F) y de las clases de Sobolev que se mencionan en E).

E) En [4] Calderón y Zygmund imponen al núcleo N_{0n} (o a su función característica $w(x'))$ ciertas coniciones de continuidad uniformes. En [4a] ellos prueban que es suficiente exegir $|w| \log(1+|w|) \in L^1(\Sigma)$ (si $p>1$; el caso $p=1$ no está aclarado). Más aún ellos extienden los teoremas de A) a los operadores $f * N$ con $N(x) = N_{0n}(x)\, \psi(|x|)$, donde N_{0n} es como antes y ψ es una transformada de Fourier-Stieltjes. En una nota de próxima publicación, E. Oklander y el autor dan otra demostración de estos resultados, basada en el siguiente teorema general. Dada una función $w(s)$ sobre Σ y para todo $s \in \Sigma$ un operador $T_s f$, definimos al operador radial (cfr. 4a) $Hf = \int_\Sigma w(s)\, T_s f\, ds$. Bajo condiciones generales sobre w y T, si los T_s son de seudo-tipo «uniforme» (ver definición en G)), y si los T_s son de tipo (p, p), resulta que Hf es también de tipo (p, p). Este teorema puede aplicarse también a operadores de Hilbert generalizados, y estamos considerando con Oklander el siguiente

Problema 3. Extender (mediante el teorema de operadores radiales), los resultados de [4a] a transformadas de Hilbert generalizadas $*$. Idem para los operadores potenciales generalizados $*$, y examinar sistemáticamente las propiedades de los operadores radiales arriba definidos.

Los operadores de Hilbert son casos particulares de las integrales singulares de la forma ([4a], [5]) $Hf = \int f(y)\, K(x, y)\, dy$, donde $K = N(x, x-y)$, siendo $N(x, az) = a^{-n} N(x, z)$ para todo $a>0$, y la integral de N sobre $|z|=1$ es nula. Más generalmente en [4a] se consideran núcleos de la forma $K = N(x, x-y)\,\psi(|x-y|)$. Calderón y Zygmund demuestran [4a] que bajo ciertas condiciones generales estos operadores son de tipo (p, p) si $1 < p < \infty$ (para $p = 1$, está sin aclarar) y valen los demás resultados de A). Parece que también aquí el teorema general sobre operadores radiales, mencionado más arriba, permite extender estos resultados a operadores generalizados. Llamando *operadores potenciales fuertemente generalizados* a los operadores integrales cuyo núcleo es de la forma $K_\gamma(x, y) = N(x, x-y)\,\psi(|x-y|)$ y donde N verifica la propiedad homogénea para un sólo valor de a: $N(x, 2z) = 2^{\gamma - n} N(x, z)$, estamos considerando el siguiente

Problema 4. Extender los resultados de A), B), D), a los operadores potenciales fuertemente generalizados, y definir los fuertemente generalizados * y las sumas fuertemente ortogonales; ídem para C).

En [4b] Calderón y Zygmund prueban que los operadores de Hilbert son de tipo $(W_p{}^r, W_p{}^r)$ donde $W_p{}^r$ son los espacios de Sobolev (ver Nota II).

Problema 4a. Examinar como actúan los operadores tenciales y potenciales generalizados o fuertemente generalizadas con respecto a tipos $(W_p{}^r, W_s{}^r)$.

Problema 4b. Extender a operadores potenciales generalizados la teoría de periodización de Calderón-Zygmund en [4d].

F) J. Horvath [24] probó que los operadores de Hilbert son de tipo $(D_{L_{p'}}, D_{L_{s'}})$ (*) si $1 < p < \infty$. Análogamente los potenciales (3) son de tipo $(D_{L_{p'}}, D_{L_{s'}})$, con $1/p - 1/s = \gamma/n$, $p > 1$. Usando una definición equivalente de tipo débil (ver [7]) es posible definir el tipo débil en $D_{L_{p'}}$ y completar los teoremas de Horvath para $p = 1$, así como con los teoremas de Sobolev Kondrachev de B). Todos estos teoremas se extienden a operadores generalizados * quedando como antes por aclarar el caso de sumas ortogonales, así como los teoremas de C).

Cora Ratto de Sadosky [25] mostró que los resultados de B) valen para los operadores potenciales hiperbólicos con núcleo $(|t_1{}^2 - t_2{}^2|^{1/2})^{2-\gamma}$, si $t \in E^2$, y aún para potenciales hiperbólicos

(*) $f \in D_{L^p}$ si es infinitamente derivable y las derivadas $\in L^p$; $f_n \longrightarrow 0$ en este espacio si $D^i f_n \longrightarrow 0$ en L^p para todo i. $D_{L^{p'}}$ es el dual D_{L^q}, $q = p'$.

generalizados; la propiedad de tipo débil $(1,1)$ no vale en el caso hiperbólico. Este trabajo considera sistemáticamente tan sólo el caso $n=2$, y Cora Ratto está examinando en detalle el caso general, así como las propiedades de C) para los hiperbólicos.

Las propiedades de los operadores hiperbólicos de E^2 están vinculadas a la teoría general de operadores dobles o iterados: si $f(x,y)$ es función de dos variables $(x,y)\in E^m\times E^n$, y si T_x actúa en E^m, T_y en E^n, cabe considerar el operador doble $T_x T_y f = Tf$ y la relación entre los tipos de los operadores T, T_x, T_y. El caso en que T_x, T_y son operadores de Hilbert generalizados $*$ fue estudiado en [6]. Sin embargo falta aún un estudio sistemático del caso general; en particular convendría examinar el tipo de operadores dobles respecto de normas mixtas $_x\| \, _y\|f(x,y)\|_p\|_r$.

G) La teoría, y las demostraciones de las propiedades, de los operadores potenciales generalizados, está estrechamente vinculada al teorema de convexidad de Riesz - Thorin y sus extensiones. En los teoremas de A), B), D) se trata de establecer que los operadores potenciales generalizados $*$ son de tipo P en todos los puntos interiores de $d_{\gamma m}=AB'$, y de tipo débil en B'; además en caso de dominios acotados se trata de establecer el tipo compacto. Se obtiene pues una considerable simplificación de las demostraciones usando el siguiente *teorema de Marcinkiewicz-Zygmund* [1]: Si un operador T es (*) de tipo débil P_1 con norma débil M_1 y de tipo P_2 con norma débil M_2, entonces T es de tipo P en todo punto P interior a P_1P_2 y con norma $M \leqq c\, M_1^{1-\alpha} M_2^{\alpha}$, siendo α la razón en que P divide al segmente (siempre que el segmento no sea paralelo al eje de abcisas); la constante c depende de P y tiende al infinito si P tiende a P_1 o P_2. Este teorema generaliza la parte esencial del teorema clásico de Riesz - Thorin que afirma: si T es de tipo en P_1 y P_2 entonces es de tipo en todo P del segmento P_1P_2 valiendo $M \leqq M_1^{1-\alpha} M_2^{\alpha}$. Gracias al teorema de Marcinkiewicz, para establecer el tipo de $H_{\gamma n}$ basta probar que $H_{\gamma n}$ es de tipo débil en el extremo B' y de tipo en el punto C' en que $d_{\gamma m}$ corta a d'; porque entonces por este teorema $H_{\gamma n}$ será de tipo en todo punto de C', B', y siendo $H_{\gamma n}$ esencialmente hermiteano esto implica enseguida el tipo en la parte simé-

(*) Como las funciones elementales (escaleras) son densas en L^p, todo operador acotado T queda determinado por sus valores en estas funciones. Por tanto en todos los teoremas de convexidad se supone que T está definido en el conjunto de las funciones elementales escaleras.

trica AC'. La demostración del tipo en C' es más fácil de tratar pues C' es punto de d' luego L^p y L^s son en este caso espacios duales, y pueden aplicarse los teoremas de operadores ortogonales. Por otra parte la demostración del tipo débil en $B' = (1, (n-\gamma)/m)$ es más fácil de tratar gracias a los dos hechos siguientes. 1) En caso de B' es $p=1$ y este es el único valor de p para el cual vale $\Sigma \|f_i\|_p = \|\Sigma f_i\|_p, f_i \geqq 0$. Debido a esto resulta ([7], proposición 3) que para establecer el tipo débil en B' de T basta probarlo para funciones características de intervalos (cubos), y esto último suele ser fácil. 2) Para el caso $p=1$ se puede dar una nueva extensión del teorema de Riesz-Thorin basada en la siguiente noción de seudo-tipo ([6], [7]). Por lo observado sólo consideraremos funciones escaleras f luego el soporte $S(f)$ de f es un conjunto acotado y podemos hablar de $m(f) =$ mínimo de $|f|$ en $S(f)$; con Q indicaremos un cubo que contiene a $S(f)$ y con $\mu(f, Q) = |Q|^{-1} \|f\|_1$. Para muchos operadores T dados por integrales singulares, tales como los $H_{\gamma n}, Tf(x)$ es «bueno» en los puntos x fuera de $S(f)$, y «malo» en $S(f)$; además existe una h tal que Tf mejora si sustituimos f por $f-h$, donde h se mantiene menor que $m(f)$ o que $\mu(f, Q)$. Por tanto es de esperar que para muchos T sea posible encontrar una tal h, y un conjunto F del «tamaño» de $S(f)$, tales que verifica

$$\left\{ \int_{E^n - F} |T(f-h)|^s \, dx \right\}^{1/s} \leqq c \|f\|_1. \tag{8}$$

Decimos que T es de *seudo tipo* $*$ $(1, s; a), a > 0$, si para toda f existe una h y un F para los cuales se verifica (8) y tales que $|h(x)| \leqq c\, m(f)$, $|F| \leqq [c\|f\|_1 / m(f)]^{s/a}$. T es de *seudo tipo* $(1, s; a), a > 0$, si para todo Q existe un F y una h tales que vale (8) y $|h(x)| \leqq c\, \mu(f, Q)$, $|F| \leqq c|Q|^{s/a}$. Evidentemente tipo $(1, s)$ implica seudo tipo $*$ y seudo tipo. Se prueba que si $a \leqq s$ entonces seudo tipo implica seudo tipo $*$, y se tiene *la siguiente extensión del teorema de Riesz:* Si $P_2 = (1, 1/s)$, si T es de tipo débil P_1 y de seudo tipo $(1, s; a)$, entonces T es de tipo débil en P_2, y por tanto de tipo P en todo punto interior de $P_1 P_2$; aquí $a = \operatorname{tg} \varphi / \operatorname{tg} \vartheta$, $\varphi =$ argumento del vector OP_2, $\vartheta =$ el del vector $P_1 P_2$. Gracias a este teorema, para establecer el tipo débil en B' basta probar el seudo tipo $(1, s; a)$ y esto es tarea mucho más fácil, por lo menos en caso de los operadores $H_{\gamma n}$.

Indiquemos todavía otros dos perfeccionamientos de los teoremas de convexidad que resultan útiles en la teoría generalizada de potenciales. En el teorema de Riesz - Thorin P_1, P_2 son puntos cualesquiera del cuadrado de los tipos, mientras que en el de Marcinkiewicz se supone que estos puntos están el triángulo inferior del mismo. En los teoremas de Sobolev y las teorías generalizadas de potenciales aparecen segmentos $P_1 P_2$ con puntos en el triángulo superior; estas y otras cuestiones hacen pensar en la utilidad de extender el teorema de convexidad de Marcinkiewicz a todo el cuadrado. Tal extensión parece posible y la demostración será publicada en un trabajo próximo. Por otra parte los teoremas de Sobolev - Kondrachev sugieren la extensión de los teoremas de convexidad de Riesz y de Marcinkiewicz a tipos, y tipos débiles, compactos. Creo haber demostrado el teorema de Riesz para tipos compactos, y el de Marcinkiewicz - Zygmund para el caso de medidas de Lebesgue en espacios euclídeos.

En las demostraciones de las propiedades de potenciales generalizados se usa también una extensión del teorema de Riesz para operadores que dependen analíticamente de una variable compleja; esta extensión se debe a I. Hirshman [26] y E. Stein [15b]. Los teoremas de convexidad fueron también estudiados en los espacios H^p de Hardy por Calderón - Zygmund [4c] y Stein - Weiss [15c]. Stein y Weiss extendieron los teoremas de convexidad al caso de medidas variables [15b], además ellos probaron [15d] que en los teoremas de convexidad es suficiente que la hpóteisis se verifique para funciones características de conjuntos. Calderón (comunicación oral) consideró el teorema de Riesz en los espacios de Sobolev, y en un trabajo de próxima publicación, Lions estudia cuestiones más generales de este tipo. Finalmente en [17] (ver también [8], cap. III) se indica una unificación parcial de los teoremas de Riesz y Marcinkiewicz, pero está aún sin resolver la unificación completa.

P r o b l e m a 5. Generalizar la noción de seudo tipo para $p \neq 1$, y aclarar las relaciones entre seudo tipo, tipo, tipo débil, unificando estos conceptos.

P r o b l e m a 5a. Examinar los teoremas sobre seudo tipo en otros espacios, tales como los de Hardy, Sobolev, Nikolski; ídem tipo débil en los dos últimos espacios.

P r o b l e m a 5b. Demostración del teorema de Marcinkiewicz - Zygmund para tipos compactos en el caso de medidas arbitrarias; ídem en el triángulo superior de los tipos.

H) Si $Tf = f * K$ y si K, f son funciones «buenas», definidas en E^n entonces $\mathrm{F}(Tf) = \mathrm{F}(f)\,\sigma$, con $\sigma = \mathrm{F}(K)$, donde F es la transformada de Fourier. Más generalmente, diremos que T es un operador dado por un *multiplicador* σ, si σ es una función definida en E^n y para toda función elemental f se tiene $\mathrm{F}(Tf) = \mathrm{F}(f)\,\sigma$. Si K no es integrable se puede definir $\mathrm{F}(K)$ de dos maneras: 1) Aproximando (por ejemplo, truncando) a K por núcleos integrables $K_j \to K$ y probando que $\mathrm{F}(K_j)$ converge en cierto sentido a un límite σ de modo que $\mathrm{F}(Tf) = \mathrm{F}(f)\,\sigma$. 2) Definir $\mathrm{F}(K)$ en sentido de las distribuciones. No siempre ambas definiciones concuerdan y en 1) diferentes aproximaciones pueden dar diferentes límites. En el caso de las transformadas de Hilbert $Hf = f * K, K = N_{01}$, Calderón y Zygmund probaron [4], [4e] que: a) $\sigma = \mathrm{F}(K)$ existe en sentido de 1) de modo que estos operadores son dados por multiplicadores; b) σ es una función homogénea de grado 0, luego $\sigma(x)$ está determinada por su restricción $\sigma(x')$ a Σ, y esta restricción recibe el nombre de *símbolo del operador* $\sigma(H)$; c) si $N_{01} \in C^\infty$ (en $x \neq 0$), también $\sigma \in C^\infty$, recíprocamente toda $\sigma \in C^\infty$, homogénea de grado 0, es el símbolo de un operador de Hilbert; d) el símbolo del producto de operadores es igual al producto de los símbolos; e) el operador tiene inverso si y solo si su símbolo no se anula; f) si $w(x')$ es la característica del operador entonces la correspondencia $w(x') \to \sigma(x')$ proporciona una generalización del concepto de función conjugada para E^n; g) una teoría análoga tiene lugar para el caso $u \in L^p(\Sigma)$. Horváth [24] probó que $\mathrm{F}(N_{01})$ existe en sentido 2) concordando ambas definiciones. Los operadores de Hilbert generalizados son también dados [6] por un multiplicador σ que verifica la propiedad homogénea sólo para $a = 2$: $\sigma(2x) = \sigma(x)$; recíprocamente, toda función $\sigma \in C^\infty$ homogénea para $a = 2$ es el símbolo de un operador de Hilbert generalizado. Las propiedades d) y e), en cambio, no están aclaradas del todo aún, y menos aún la f), que aquí *cambia fundamentalmente*, pues ahora $w(x')$ y $\sigma(x')$ están definidas en la *esfera sólida*. En el caso de los operadores potenciales generalizados también se extienden las propiedades a) - c) [8] en sentido de la definición 2), y si $0 < \gamma < 1/2$ también en sentido de 1).

Problema 6. Aclarar las propiedades d) - f) para los operadores de Hilbert y potenciales generalizadas. El problema está sin abordar para los operadores generalizados *.

Un importante teorema de Marcinkiewicz (para series Fourier, extendido a integrales Fourier por Mijlin [5a]) da la siguiente condición suficiente para que un operador general T, dado por el multiplicador σ, sea de tipo (p, p) para todo $1 < p < \infty$: existe la derivada $\partial \sigma^n / \partial x_1 \ldots \partial x_n$, siendo continuas las derivadas precedentes, $|x|^s |D^{(s)} \sigma(x)| \leqq M$ para $s = 0, \ldots, n$. Las propiedades de tipo de los operadores de Hilbert pueden obtenerse como caso particular de este teorema. La demostración de Marcinkiewicz usa propiedades sútiles de funciones de Walsh y funciones analíticas. Calderón - Zygmund [4d] dieron una demostración directa, para algunos casos particulares importantes, como aplicación de [4], con extensión al caso $p = 1$; según comunicación oral de Calderón, estos autores obtienen el teorema completo con los mismos métodos directos. Sería útil extender el teorema a los tipos (p, s); creo que para ello habría que reemplazar, en la última desigualdad, $|x|^s$ por $|x|^{s+\gamma}$ con $1/p - 1/s = \gamma/n$.

Problema 6a: Generalizar este teorema de Marcinkiewicz para tipos $(p, s), 1/p - 1/s = \gamma/n$, y deducir su demostración aplicando los teoremas de tipo de los operadores potenciales generalizados; ídem para tipos $(L^p(E^n); L^s(E^m))$.

I) Si Hf es una transformada de Hilbert en E^2, su característica $w(t)$ es una función definida en la circunferencia, o en $(0, 2\pi)$, y por tanto desarrollable en serie de Fourier $w(t) = \Sigma\, c_n e^{int}$. Son pues de especial importacia los operadores U_m cuya característica es $w(t) = e^{imt} (m \neq 0)$, y se tienen los resultados siguientes (Giraud, Mijlin [5], [5b]; ver también Horváth [24] donde estas fórmulas se deducen por un método original basado en álgebras Grassmann): h) $U = U_1$ es un operador unitario fijo y $U_m = 1/m\, U^m, U_{-m} = (-1)^m m^{-1} U^{-m}$; h$_1$) $\sigma(U_m) = (-i)^m m^{-1} e^{imt}$ si $m > 0$ y $(i)^m |m|^{-1} e^{imt}$ si $m < 0$; h$_2$) todo operador de Hilbert H de característica $w = \Sigma\, c_m e^{imt}$ se desarrolla en serie de Laurent del operador U:

$$H = \sum_1^\infty c_m \mathrm{m}^{-1} U^m + \sum_1^\infty (-1)^m m^{-1} c_{-m} U^{-m} \qquad \text{(Mijlin)};$$

h$_3$) en caso de $E^n, n > 2$, la característica w, definida en la superficie esférica, se desarrolla en serie de funciones esféricas

Y_{ml}; luego es de interés particular el caso $w = Y_{ml}$, y en este caso $\sigma = \varepsilon_{me} Y_{me}$, donde $\varepsilon_m =$ constante; h$_4$) si $w = \Sigma\, c_{me} Y_{me}$ entonces $H = \Sigma\, c_{me}\, \varepsilon_m\, Y_{me}$. Así pues, entre los posibles operadores de Hilbert están los operadores «fundamentales» U_{ml}, y todo otro operador se descompone en serie de fundamentales. Finalmente, si H es una integral singular con núcleo $K(x, y) = N(x, x \to y)$, el símbolo se define como la restricción a Σ de $F_z N(x, z)$; aquí $N(x, z')$ se desarrolla en una serie de funciones esféricas con coeficientes no constantes, dependientes de x:

$$N(x, z') = \Sigma\, c_{me}(x)\, Y_{ml}(z'), \quad \text{y} \quad \sigma = \Sigma\, c_{me}(x)\, \varepsilon_m\, Y_{ml}(z').$$

Perfeccionando resultados anteriores de Giraud, Mijlin y Tricomi, Calderón y Zygmund [4b] extendieron los resultados a)-h) a integrales singulares con núcleos $N(x, x - y)$; sólo que las propiedades d) y e) valen no en forma absoluta sino módulo los llamados operadores regulares; en caso de dominios acotados estos operadores regulares son los compactos.

Pasando a operadores de Hilbert generalizados, las propiedades h) no están aclaradas del todo. Por otra parte es *necesario tomar un camino diferente* al de la teoría clásica de Giraud-Mijlin y Calderón-Zygmund, pues en las tranformadas generalizadas la característica está definida en $|x| < 1$ y no se aplica la descomposición en funciones esféricas sino la de series de Fourier. Por otra parte la descomposición en elementos fundamentales puede hacerse para la característica o para el símbolo, y parece que los dos procedimientos conducen a desarrollos diferentes.

P r o b l e m a 6b. Aclarar la teoría de descomposición correspondiente a h) para operadores de Hilbert y potenciales generalizados, desarrollando la característica o el símbolo en series de Fourier en el anillo $1 < |x| < 2$. El problema correspondiente para operadores fuertemente generalizados está sin abordar.

J) Vamos a insistir una vez más en el hecho de que los a, para los cuales el núcleo verifica $K(ax) = a^{-n} K(ax)$, forman un grupo contínuo en el caso de las transformadas de Hilbert ordinarias, y un grupo discreto en caso de los operadores generalizados. Este hecho no influye en las propiedades de tipo del operador, pero vimos que al considerar la descomposición en núcleos fundamentales surgen diferencias esenciales, apareciendo por lo menos dos formas diferentes de abordarla. Por ahora no tenemos elementos para decidir cual de las dos formas es la más adecuada para los operadores potenciales generalizados $*$ y si es posible pasar de una de ellas a la otra.

Por eso creemos que conviene enfocar el problema desde un punto de vista general, en relación con algunas ideas de L. Schwartz [3a] y el problema de los momentos. Tratándose de cuestiones que recién estamos abordando, nos limitaremos a esbozar la idea básica.

Como los operadores potenciales H son acotados basta considerarlos sobre un espacio vectorial D, de funciones, denso en los L^p; por ejemplo, D puede ser el espacio L_0 de las funciones escaleras, o el espacio $\mathcal{D}$ de las funciones infinitamente derivables, nulas fuera de compactos. Siendo estos operadores H convoluciones, con un ligero cambio de definición podemos suponer que verifican $(Hf,g)=(f,Hg)$ para todo f,g de D, donde $(f,g)=\int f(x)\,g(x)\,dx$. Además estos operadores son dados por multiplicadores.

Más generalmente, fijado D, consideremos un operador lineal T, definido en D, que a cada f de D le hace corresponder cierta función localmente integrable Tf, y tal que $(Tf,g)=(f,Tg)$. Para cada $f,g \in D$ definimos

$$(f|g)=(Tf,g)=(\mathrm{F}(Tf),\mathrm{F}\,g).$$

Entonces a todo tal operador T le corresponde una forma bilineal $(f|g)$, y toda forma bilineal corresponde a un único operador. Toda medida μ define una forma bilineal

$$(f|g)=\int_{E^n}\mathrm{F}\,f(x)\,\mathrm{F}\,\overline{g(x)}\,d\mu$$

y por tanto un operador T. En este caso diremos que T es un operrador *multiplicador* (en sentido amplio) siendo μ el multiplicador. Si $d\mu=\sigma(x)\,dx$ obtenemos la noción de multiplicador dada más arriba. Si μ es una medida positiva la $(f|g)$ correspondiente es esencialmente un producto escalar y define una estructura prehilberteana en D. Si μ es una medida cualquiera, $(f|g)$ es una combinación lineal de tales productos escalares. Recíprocamente, dada una forma bilineal $(f|g)$ en D, que es un producto escalar, o una combinación de productos escalares, surge el problema si tal forma bilineal es dada por una medida μ, es decir si define un operador multiplicador. Si $D=\mathcal{D}$ entonces se tiene el siguiente teorema que generaliza un resultado de Schwartz (Schwartz impone la condición que $(f|g)$ sea contínua en $D\times D$, lo que aquí no se supone): *Teorema A*. Si $D=\mathcal{D}$ y $(f|g)$ es un producto escalar en D, entonces las condiciones siguientes son equivalente:

a) $(f|g)$ es dado por un multiplicador $d\mu$, y μ es una medida a crecimiento lento ($(1+|x|^a)$ es integrable $-\mu$ para algún $a<\infty$)) y única.

b) $(f'|g)=-(f|g')$, o sea el operador $Af=if'$ es simétrico.

c) Si $\tau_a f(x)=f(x-a)$ entonces $(\tau_a f|\tau_a g)=(f|g)$, o sea τ_a es un grupo de operadores unitarios en el espacio prehilberteano D.

Así pues los operadores multiplicadores T son aquellos cuya forma bilineal asociada es un producto escalar tal que el operador $Af=if'$ es simétrico en el espacio de Hilbert correspondiente. Este punto de vista está relacionado a ciertos resultados de Krein - Lifshitz [29] y A. Devinatz [30] sobre el problema de momentos. En efecto, podemos considerar que $(f|g)=(\varphi|\psi)$, $\varphi=\mathrm{F}f$, $\psi=\mathrm{F}g$, es un producto escalar en el espacio $\Lambda=\mathrm{F}(D)=\{\varphi\}$ de las funciones $\varphi=\mathrm{F}f, f\in D$. Para cada $f\in D$, $\varphi=Ff$ es función analítica y tiene la propiedad siguiente (P): si $\varphi\in\Lambda$ y si $\varphi(x_0)=0$ entonces $(x-x_0)^{-1}\varphi(x)\in\Lambda$. Luego el teorema A equivale al siguiente

Teorema A': Si $(\varphi|\psi)$ es producto escalar en $\Lambda=\mathrm{F}(\mathrm{D})$ tal que $(u\varphi(u)|\psi(u))=(\varphi|u\psi)$, entonces $(\varphi|\psi)=\int\varphi(u)\,\overline{\psi}(u)\,d\mu$ donde $d\mu$ es una medida positiva; más aún $d\mu$ es única y a crecimiento lento.

En esta forma, y en E^1 la primera parte del teorema A' es un caso particular del teorema siguiente de Krein-Lifshitz: *Teorema B* (teorema general de los momentos). Si $\Lambda=\{\varphi\}$ es un espacio vectorial cualquiera de funciones analíticas con la propiedad (P), y si $(\varphi|\psi)$ es un producto escalar en Λ tal que $(u\varphi|\psi)=(\varphi|u\psi)$, entonces $(\psi|\varphi)=\int\varphi(u)\,\overline{\psi}(u)\,d\mu$, donde μ es una medida positiva. En general μ no es única ni es a crecimiento lento. Krein probó el teorema sólo para E^1 y el teorema fue parcialmente extendido a E^n por Devinatz, sin embargo parece que el teorema completo no vale si $n > 1$. El espacio $\Lambda = F\mathcal{D}$ es un espacio especial de funciones analíticas para el cual el teorema B vale para todo E^n (esto puede verse por un razonamiento directo o extendiendo una idea de Devinatz), y además en este caso la medida es única y a crecimiento lento. (Esto sugiere el problema de hallar otros espacios Λ de funciones analíticas en E^n donde se presenta la misma situación; en particular sería interesante considerar el caso $\Lambda = F_s D$ donde F_s es la transformada de Fourier - Sturm - Licuville correspondiente a cierto operador diferencial A: si $A = f'$ tendremos $F_s = F$, el caso precedente). Designaremos con M la clase de todas las medidas en E^n, con M' las medidas a crecimiento lento, con M'' las de masa total finita, y con M''' las de la forma $d\mu = \sigma(x)\,dx$. Para nosotros es de especial interés el siguiente problema: bajo que condiciones suplementarias la medida $d\mu$ del teorema A pertenece a M'''; y cuando es ella además a crecimiento lento con $\alpha < n$. Este problema está relacionado a la teoría de Markov - Lifshitz - Krein quienes han considerado el caso $\Lambda = \{1, u, u^2, \ldots\}$. Para nosotros es especialmente interesante el caso $\Lambda = F\mathcal{D}$.

K) Vimos que las formas $(f|g)$ definidas en $\mathcal{D}$ dadas por una medida μ son aquellas que dejan invariante el grupo de traslaciones τ_a, para todo a. Sea ahora $\Gamma = \{\gamma\}$ un grupo (lineal) fijo en E^n o en $\mathcal{D}$: a cada γ le corresponde una transformación lineal $f(x) \to \gamma f(x)$ en $\mathcal{D}$. Sean $M(\Gamma), M'(\Gamma)$, $M''(\Gamma), M'''(\Gamma)$ las medidas de M, M', etc., que son invariantes respecto de Γ. Los productos escalares $(f|g)$ correspondientes son también invariantes- Γ y se presenta el problema de determinar todos los elementos extremales o irreducibles, y descomponer en elementos irreducibles toda otra medida de $M(\Gamma), M'(\Gamma), \ldots$ (Una medida μ, pongamos $\mu \geqq 0, \mu \in M(\Gamma)$, es irreducible si $0 \leqq \mu_1 \leqq \mu$ implica $\mu_1 = c\,\mu$). Aquí se podría aplicar las teorías generales existentes de la descomposición de un espacio de Hilbert, invariante respecto de un grupo, en partes irreducibles; solamente que en nuestro caso importan también las *formas bilineales que no son propiamente productos escalares* sino combinaciones lineales, a coeficientes complejos, de tales productos, de modo que no tenemos propiamente un espacio de Hilbert sobre $\mathcal{D}$. Por otra parte para nosotros es importante también el caso de grupos Γ discretos. Los elementos extremales de $M''(\Gamma)$

fueron determinados por Schoenberg y Krein en el caso cuando Γ es el grupo de todos los movimientos rígidos de E^n (ver [29]). En este caso, las transformadas de Fourier de los elementos extremos son las soluciones fundamentales de la ecuación diferencial $\Delta u + \lambda u = 0$, $u(0) = 1$. Los elementos extremales de $M'(\Gamma)$ fueron determinados por Méthée y Schwartz [3a] en caso en que $n = 4$ y Γ es el grupo de Lorentz, y ahora se obtienen las soluciones elementales de la ecuación de Klein - Gordon. Para nosotros será de interés especial poder desarrollar los métodos de Krein y Schwartz en el caso $M'''(\Gamma)$ y también cuando Γ es un grupo discreto. En efecto, consideremos por ejemplo el caso de la transformada de Hilbert ordinaria en $E^1, Hf = f * (x^{-1})$; la forma bilineal correspondiente es

$$(f|g) = (Hf, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x)/(x-t)\, dt\, dx; \quad f, g \in \mathrm{D}.$$

Este operador es dado por un multiplicador de M''' y por tanto la forma bilineal es invariante respecto de traslaciones. De la propiedad homogénea $H[f(ax)] = [Hf](ax)$ se deduce enseguida que $(a^{1/2} f(ax) |\, a^{1/2} g(ax)) = (f|g)$. O sea, si $\rho_a f(x) = a^{1/2} f(ax)$, la forma bilineal $(f|g)$ correspondiente a H es invariante-Γ donde $\Gamma = \{\rho_a\}$ es el grupo de las «dilataciones», $a > 0$. Análogamente las formas bilineales de las transformadas de Hilbert en E^n son invariantes-Γ donde $\Gamma = \{\rho_a\}, \rho_a f(x) = a^{n/2} f(ax)$. O sea las transformadas de Hilbert son dadas por multiplicadores de $M'''(\Gamma)$ donde Γ es el grupo *contínuo* de las dilataciones ρ_a. Por tanto la teoría de Mijlin - Giraud - Calderón - Zygmund de descomposición en núcleos fundamentales corresponde a nuestro problema de descomposición de $M'''(\Gamma)$ en elementos extremales irreducibles, cuando Γ es el grupo de dilataciones, *para todo* $a > 0$. El problema 6b corresponde por tanto al de la descomposición en elementos irreductibles de $M'''(\Gamma)$ cuando Γ *es un grupo discreto de dilataciones*, y es la discontinuidad del grupo lo que cambia el aspecto del problema, además de ser complejo el producto escalar. Llegamos así a los siguientes problemas.

P r o b l e m a 7. Extender la teoría clásica de descomposición en subespacios irreducibles al caso de espacios con un producto escalar complejo, combinación lineal de productos escalares ordinarios.

Problema 7a. Extender las teorías de Schwartz y de Krein al caso de grupos discontínuos.

Problema 7b. Desarrollar una teoría análoga a la de Schwartz y Krein en el caso de $M'''(\Gamma)$, donde Γ es un grupo discreto de dilataciones, determinar las características y símbolos de los elementos irreducibles, y a que ecuaciones diferenciales corresponden (ídem para los operadores potenciales que corresponden a los grupos de dilataciones $\rho_{a\gamma}$, $\rho_{a\gamma} f(x) = a^{n+\gamma/2} f(ax)$).

Estos problemas, especialmente el último punto del problema 7b, pueden considerarse también desde el punto de vista de la teoría de Gelfand y Shilov [2a]. Finalmente estas cuestiones pueden considerarse también desde el punto de vista de núcleos reproductivos «singulares»: Si los elementos de un espacio de Hilbert son funciones $f(x)$ definidas en cierto conjunto X, un núcleo reproductivo de este espacio es una función $K(x, y)$ tal que para todo y es $K(x, y)$ un elemento del espacio y $f(y) = (f, K(x, y))$, para toda f y todo punto y. La fórmula de inversión de Fourier puede escribirse formalmente $f(y) = (f, K(x, y))$ donde $K(x, y) = \int_{E^n} e^{it(x-y)}\, dt$. La última integral naturalmente no es convergente pero se puede todo entender en sentido de integrales singulares, por tanto la fórmula de inversión de Fourier puede interpretarse como un núcleo reproductivo singular. Más generalmente si $K(x, y)$ es igual formalmente, a $\int_{E^n} K_t(x, y)\, dt$, y en el sentido de integrales singulares es $f(y) = (f, K(x, y))$ hablaremos de núcleos reproductivos singulares. Podemos considerar pues tales núcleos singulares invariantes respecto de traslaciones y otros grupos, y obtener teoremas análogos a los teoremas A, B de J). Desde este punto de vista, los problemas que acá nos interesan se vinculan a la teoría de Krein [29].

Nota I. El teorema de las sumas 0-ortogonales es caso particular del teorema general siguiente ([6], [8], cap. 2, [11]): Sea T_i una sucesión de operadores en un espacio de Hilbert tales que 1) cada T_i es hermiteano (o normal); 2) comutan entre sí; 3) $\|T_i T_{+ij}\| \leqq M^2 \varepsilon j, \varepsilon < 1$ (casi ortogonalidad). Entonces si $S_n = T_1 + \ldots + T_n$, se tiene $\|S_n\| \leqq M\,c(\varepsilon), S_n f$ converge hacia un Sf para todo f del espacio, y Sf es un operador acotado, $\|S\| \leqq M\,c(\varepsilon)$. Teoremas análogos valen para sumas contínuas o con funciones V, W indicadas en A).

Problema 1ª. Falta aclarar si este teorema vale para operadores no normales, o que no comutan.

Nota II. Los teoremas de Sobolev - Kondrachev juegan un papel importante en la teoría de los espacios $W_p{}^r$ de Sobolev [14a], ver [8], cap. 4 y [18]). $f \in W_p{}^r(D)$ si ella y sus primeras r derivadas (en sentido de distribuciones) pertenecen a $L_p(D)$. Los teoremas de B) proporcionan los llamados teoremas de inmersión de Sobolev, por ejemplo: el operador idéntico es de tipo $(W_p{}^1(D);\ L(D \cap E^m))$ si $(1/p, 1/s)$ está encima de $d_{\gamma m}$. Deny - Lions [19] estudiaron los espacios de Beppo Levi donde las derivadas de f pertenecen a $L^p(D)$ pero f misma pertenece tan solo localmente a $L^p(D)$. Vishik, Vasharin y otros [20] consideraron espacios de Sobolev para medidas ponderadas $\sigma(x)\,dx$ (ver D)) y los teoremas de inmersión correspondientes; sus resultados pueden obtenerse de los teoremas generales indicados en D) (ver 22). Nikolski consideró espacios más generales, por decir así de funciones con derivadas de orden fraccionario pertenecientes a L^p. Del trabajo de Calderón-Zygmund [4b] se deduce el isomorfismo de los espacios $W_p{}^r$ con p fijo, para $D = E^n$. No sabemos cual es la situación para los D generales, o para los espacios de Nikolski y Beppo Levi, ni como son los duales de estos espacios (según información oral del Prof. Kahane, parece que Lions ha considerado este problema); más generalmente habrá que determinar la forma integral de los operadores contínuos entre dos tales espacios. El hecho de que los teoremas de Sobolev valen en el extremo de $d_{\gamma m}$ con tipo débil, permite extender para este extremo los teoremas de inmersión (cfr. [7], pág. 12); este aspecto de los espacios de Sobolev será estudiado en una nota próxima. No sabemos si esto se aplica a espacios de Nikolski, pues Nikolski estudió sus espacios por métodos diferentes de la teoría de aproximación.

REFERENCIAS

(1) ZYGMUND, *Theorem of Marcinkiewicz*, Jornal M. Pures App (1956), 223; (2) GELFAND-SHILOV, *Foiones. generalizadas*, 1958, Moscú; (2a) *Journal M. Purres App.* (1956), p. 383; (3) L. SCHWARTZ, *Théorie des Distributions*, 1950; (3a) *Matemática y Física cuántica*, Cursos y Seminarios, Buenos Aires, 1958; (4) CALDERÓN-ZYGMUND, *Existence of Singular Integrals*, Acta Math. 88, 1952; (4a) *American Journal* 1956; (3b) *Ibid* 1957; (4c) *Studia Math* 1955, p. 142; (4d) *Amer. Journal* (1956) p. 282; (4e) *Ibid*, pág. 315; (5) S. MIJLIN, *Singular integral equations*, Uspehi M. Nauk (traducción inglesa) 3 (1948); (5a) VESTORIK LGU (1957); (5b) SBORNIK 43 (1936); (6) M. COTLAR, Revista *M. Cuyana* 1 (1955); (7) COTLAR-PANZONE, *Generalidad potential operators*, Revista UMA (1959); (7a) *Acta M. Hung.* 19 (1958); (7) *Comunicación* UMA, 1957, Bahía Blanca; (8) M. COTLAR, *Seminario sobre operadores potenciales*, Universidad Bs. Aires, 1959; (9) A. ZYGMUND, *Series trigométricas*. 1935 y 1959; (10) E. OKLANDER, *Fórmula para normas en Lp*, Comunicación UMA 1959; (11) BELA Sz. Nagy, *Acta M. Hung.* 18 (1957); (12) HARDY-LITTLEWOOD, *Fractional integrals*. Math. Zeit. 27 (1928) y 28 (1928); (13) G. THORIN, *Convexity Theormes*. Uppsala 1948; (14) S. SOBOLEV, *Doklady Acad.* Nauk 20 (1938); (14a) *Aplicaciones del Análisis Funcional*, Leningrado 1950; (15) STEIN-WEISS, *Jornal Math.* Mech. 7 (1958); (15a) *Ibid* 8 (1959); (15b) TOHOKU *Math.* J. 9 (1957); (15c) *Trans. Amer.* M. Soc. 87, 1 (1958); (15d) *Jour. Math. Mech.* 8, 2 (1959); (16) DU PLESSIS, *Fractional integrals*. Trans., *Amer. Math. Soc.*, 80, 1 (1955); (17) V. ILIN, *Uspehi Math.* Nauk 1956; (17a) SMOLITZKI. *Ibid*. 12 (1957); (18) L. KANTOROVICH, *Operadores integrales* Ibid 1956; (19 DENY-LIONS, *Les espaces de B. Levi*, Ann. Ins. Fourier V, 1953; (20) A. VASHARIN, *Izvestia Ac.* Nak 23, 3 (1959); (21) S. NIKOLSKY, *Trudi Inst. Steklov* (1951), Mat. Sbornik 1953, 56, 57, 58; (22) COTLAR-ORTIZ, *Tipos ponderados de op. potenciales*, Com. UMA 1959; (23) E. STEIN, *Procedings Am. M. Soc.* 8, 2 (1957); (23a) *Trans. Am. M.* Soc. 43 (1956); (24) J. HORVATH, *Singular operators, spherical harmonics*, Ibid 82 (1956), *Procedings* 9 (1958), 10 (1959); (25) CORA RATTO SADOSKY, *Tesis*, Universidad Bs. Aires 1959; (26) I. HIRSCHMAN, *Convexity theorem*, Journal d'Analyse, 2 (1952); (27) COTLAR-BRUSCHI, *Revista*, Univ. La Plata V, 3 (1956); (28) J. MARCINKIEWICZ, *Studia Math.* 8, 1939; (29) M. KREIN, *Núcleos hermiteanos*. Ukrainski Journal 14 (1949) (1950); (30) A. DEVINATZ, *Two Parameter Moment Problems*, Transac. Am. Math. Soc. 74 (1953), (1957).