SOBRE LA DETERMINACION DE FUNCIONALES EN GEOMETRIA INTEGRAL

KURT LEGRADY
(Universidad de Chile, Santiago de Chile)

1. Sea (G, M, ψ) un espacio de Klein con grupo de Lie G, variedad analítica M y aplicación analítica $\psi : G \times M \rightarrow M$ que define G como grupo de homeomorfismos de M. G se considera como espacio fibrado con base M, fibra típica y grupo $F(p_0)$ — grupo estábil de un punto $p_0 \in M$ y proyección π_0. Sea $N \subset M$ tal que su grupo estábil $F(N)$ esté cerrado. $F(N)$ define una otra fibración de G con la variedad analítica $G/F(N)$ como base y proyección π_1. Los elementos de la base representan los transformados σN de N. Si en particular $F(N)$ opera transitivamente sobre $N \ni p_0$ la relación $p \in \sigma N, p = \tau p_0$ es equivalente a $\sigma F(N) \quad \tau F(p_0) \neq \emptyset$. Resulta que la variedad $G/F(N) \quad F(p_0)$ representa los pares de objetos $(\sigma N, p)$ coincidentes.

2. Una forma diferencial Ω sobre $G/F(N)$ invariante bajo las operaciones de G y con grado $|\Omega| = \dim G/F(N)$ define una medida invariante μ_N sobre este espacio. Sea $\{A\}$ la familia de los subconjuntos de M tal que $\{\pi_1(\sigma) \mid \sigma N \quad A \neq \emptyset\}$ es μ_N-medible. La función $A \rightarrow \mu_N(A)$ es constante sobre las clases de intransitividad de $\{A\}$ respecto a G pero generalmente no cumple la relación

$$\mu_N(A \cup A') = \mu_N(A) + \mu_N(A') - \mu_N(A \cap A'). \qquad (1)$$

Una función $\varphi : G/F(N) \times \{A\} \rightarrow R$ (o con valores en un espacio vectorial sobre R), $(\dot{\sigma}, A) \rightarrow \varphi(\dot{\sigma} N \cap A)$ se llama función de coincidencia si es constante sobre las clases de intransitividad de $(\dot{\sigma} N \cap A)$ cumple a (1) para todo $\dot{\sigma}$ fijo, mientras para todo A fijo define una función integrable sobre $G/F(N)$. Ella define un funcional sobre $\{A\}$ invariante a izquierda que cumple con (1).

3. Sean $\{\{A^{\nu}, A'^{\nu} \ldots\}\}_{\nu=1\ldots n}$, $n = \dim M$ las familias de subvariedades de M diferenciables y de dimensión ν cuyos grupos estables poseen densidades —è. d. sobre los $G/F(A^{\nu})$ existen medidas $\mu_{A_{\nu}}$. Sea $\{\{B^{\mu}\}\}$ una familia de subvariedades de M diferenciables tal que cada intersección finita de los A y su transformados con los B pertenece a $\{\{B^{\mu}\}\}$— salvo tal vez de transformados cuyos representantes formen un subconjunto de medida nula. Sea $\phi' \subseteq \sum_{v=1}^{m} \phi^{\nu} = \phi$ un subespacio vectorial (graduado) de funcionales $\varphi^{\nu} \in \phi^{\nu}$ definidos para subvariedades cuya totalidad contiene las familias de arriba, que cumplen con (1), son invariantes respecto a G y definen funciones de coincidencia

$$\sigma_{\nu_1}, \ldots \sigma_{\nu k}, B^{\mu}) \longrightarrow \varphi^{\nu}(\sigma_{\nu_1} A^{\nu_1} - \ldots - \sigma_{\nu k} A^{\nu k} - B^{\mu}). \qquad (2)$$

Las integraciones por los $\mu_A{}^{\nu_1} \square \ldots \square \mu_A{}^{\nu k}$ definen un homomorfismo (*)

$$\phi' \longrightarrow \sum_{(i_1, \ldots j k)} \mathop{\square}_{\rho=1}^{k} \phi^{(j\rho)}. \qquad (3)$$

La tarea principal de la geometría consiste en la determinación de este homomorfismo.

4. En [1] Chern generalizó las fórmulas de Crofton y Cauchy del plano euclideo a un espacio de Klein cualquiera esencialmente en las siguientes condiciones: (*i*) $F(N)$ opera transitivamente sobre N. (*ii*) para todo $A \in \{A\}$ G admite una sección diferenciable sobre A respecto a π_0 construída por el método del «repère mobile» de Cartan. (*iii*) $F(p_0)$ admite una sección diferenciable sobre $F(p_0)/F(N) - F(p_0)$.

Así se obtiene una sección diferenciable (canónicamente para la familia $\{A\}$) de G sobre el conjunto representativo de los pares coincidentes en $G/F(N) - F(p_0)$. La forma Ω sobre

(*) Indicamos con $\square$ el producto tensorial.

$G/F(N)$ tiene imagen recíproca $\pi_1{}^*\Omega = \Omega_1$ en el anillo de las formas invariantes a izquierda y en el caso de la fórmula de Crofton su grado es igual a la dimensión de la imagen de la sección última. La integración sobre este conjunto se efectúa de dos maneras: a) Integración a lo largo de las fibras $F(N)$ da la función de coincidencia —número de los puntos de la intersección— que después se integra sobre $G/F(N)$; b) Integración a lo largo de las secciones (iii) en las fibras $\sigma F(p_0)$ que da la función de coincidencia —número de los puntos de la in- $\{A\}$, supuesto que $F(p_0)/F(N)$ $F(p_0)$ sea compacto, $F(p_0)$ opere transitivamente sobre los subespacios k-dimensionales del espacio tangencial en p_0 y que N posea una densidad «alrededor de p_0». Esta forma se integrará a lo largo de la sección (ii). Así el homomorfismo (3) asocia a la forma de grado cero cuya integral es el número de los puntos de la intersección σN A una forma de grado k $(= \dim A)$ definida sobre la familia $\{A\}$. Tomando en cuenta la orientación se puede evitar que el homomorfismo resulte idénticamente cero.

5. Se notará que las condiciones señaladas en 4, son demasiado fuertes. En particular, el suponer que A admite una sección del espacio fibrado principal, excluye en el caso euclideo la teoría de los funcionales de los cuerpos convexos, ya que no existe tal sección mientras los funcionales dependen de secciones de espacios fibrados asociados [2].

En el álgebra P de las formas locales sobre un espacio fibrado principal P para todo elemento x del álgebra G de Lie del grupo estructural G se define [3] las derivaciones y antiderivaciones $\vartheta_x = \chi_x d + d\chi_x$ y χ_x, donde $\chi_x \omega|_p$ para $|\omega| = 1$ es el valor de ω para el vector tangencial de la fibra definida por la transformación infinitesimal x. Asimismo d es la derivación exterior en P. Una forma $\Omega \in$ P, cero común de todos los $\chi_x, \vartheta_x, x \in G$ se llama forma básica de P; a ella corresponde una forma Ω' de la base de P tal que $\pi_0{}^*\Omega' = \Omega$. Por ejemplo las densidades en la geometra integral son formas básicas. En este caso, como se notará, la condición se reduce a $d\Omega = 0$ [1, 4].

Si $F(N)$ opera transitivamente sobre los elementos de contacto de un orden fijo del espacio de Klein N, $F(N)$ puede ser connsiderado como espacio fibrado con base: los elementos de contacto y grupo y fibra típica $G' \subset F(N) - F(p_0)$ y toda forma básica con respecto G' define una función de coincidencia por medio de la integral de esta forma extendida a la inyección canónica (según un esquema de Cartan) de $\sigma N \quad A$ en la base. Una construcción análoga a la anterior asocia luego otra forma básica a una tal forma básica relativa (a N). La última lo es respecto a un grupo $G'' \subset F(p_0)$ y se extiende a la imagen canónica de A en la variedad de sus elementos de contacto - base de G con respecto a la fibración por G″.

La introducción de las formas básicas permite formular un principio para asociar a todo espacio de Klein un espacio $\Sigma' \phi^{(\nu)}$ lo que representa una generalización natural de consideraciones para grupos particulares.

6. La generalización de la «kinematische Hauptformel» exige una regularización ya que los bordes de las intersecciones no son variedades diferenciables. Si $F(N)$ no opera transitivamente en N la construcción de un conjunto representativo de los pares coincidentes se efectúa de otra manera. Todas las consideracionnes anteriores suponen que $F(p_0)$ opere transitivamente sobre los subespacios tangenciales de dimensión fija de p_0. Si esta condición no está satisfecha, quizás, una métrica Riemanniana puede servir para determinar en forma sencilla un espacio $\Sigma\, \phi^{(\nu)}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] CHERN, *Integralgeometry in Klein Spaces* (Ann. o. Math. 43, 1942).

[2] HADWIGER, *Integralsiätze im Konvexring* (Abh. Sem. Hamburg, 20, 1956).

[3] KOSZUL, *Homologie et Cohomologie des Algèbres de Lie* (Bull. Soc. Math. France 78, 1950).

[4] SANTALÓ, *Integralgeometry in aff. and proj. Spaces* (Ann. o. Math. 51, 1950).