ECUACIONES DIFERENCIALES Y ANALISIS FUNCIONAL

por José L. Massera
(Instituto de Matemática y Estadística, Universidad de la República, Montevideo)

Genéricamente hablando, el tema de esta investigación es el estudio de ciertas propiedades de las ecuaciones y sistemas diferenciales lineales y cuasi-lineales, utilizando métodos del análisis funcional. La investigación fue realizada en estrecha colaboración con J. J. Schäffer y está íntimamente vinculada con los trabajos sobre espacios funcionales que él ha expuesto en otra comunicación de este Symposium. Los resultados obtenidos han sido publicados en parte; otros resultados están en curso de publicación y hay diversos temas sobre los cuales la investigación continúa, tales como, por ejemplo, la extensión de los resultados a ecuaciones definidas en todo el eje real, a ecuaciones en diferencias finitas, etc.

Las ecuaciones consideradas son:

$$\dot{x} + A(t)\,x = 0 \tag{1}$$

$$\dot{x} + A(t)\,x = f(t) \tag{2}$$

$$\dot{x} + A(t)\,x = h(x, t) \tag{3}$$

en que x es un elemento de un espacio de Banach X; $A(t)$ un endomorfismo de X y f una función con valores en X; ambos funciones de la variable independiente escalar $t \in J = [0, \infty]$, integrales (Bochner) en cada intervalo finito parcial; $\dot{x} = dx/dt$; h una función, en general no lineal, de $X \times J$ en X, que satisface oportunas hipótesis de regularidad y acotación.

Un problema central en todo el trabajo es el siguiente: ¿en qué condiciones puede asegurarse que (2) tiene al menos una solución perteneciente a un espacio funcional de Banach D (una D-solución) para cada $f \in B$, en que B es otro espacio funcional de Banach dado? (En ese caso, diremos que la pareja (B, D) es *admisible* para la ecuación (2)). Los espacios funcionales considerados pertenecen a las clases estudiadas por J. J. Schäffer en [14], entre los cuales figuran todos los espacios de Orlicz y, a fortiori, los espacios $L^p, 1 \leqq p \leqq \infty$; en lo sucesivo utilizaremos la terminología y anotaciones de ese trabajo. El caso particular $B = D = C$, el espacio de las funciones continuas y acotadas en J, siendo X de dimensión finita y A continuo, fue estudiado por Perron [11] que, desde este punto de vista, puede considerarse como el iniciador de este tipo de investigaciones. Ciertos trabajos de Persidskii [12], Malkin [5], Maizel [4], Krein [2], Kučer [3], se vinculan también a estos problemas; los dos últimos utilizan algunos métodos del análisis funcional.

La incidencia del análisis funcional en nuestro trabajo proviene de tres ángulos diferentes:

a) Del hecho de que X es un espacio de Banach, en general de dimensión infinita. Esto no constituye, sin embargo, ni la aplicación más importante del análisis funcional ni el motivo esencial de la generalidad de los teoremas obtenidos; casi todos los teoremas conservan su significación en el caso en que X es un espacio euclideano de dimensión finta.

b) De la aplicación de teoremas de categoría del análisis funcional (aún en el caso en que $\dim X < \infty$).

c) De las propiedades de las clases de espacios funcionales consideradas.

Análogos comentarios pueden hacerse en relación a la sustitución de las hipótesis de continuidad usuales en la teoría de las ecuaciones diferenciales por hipótesis del tipo de Carathéodory. En efecto, los teoremas conservarían, en lo fundamental, todo su valor si se les enunciara bajo hipótesis de continuidad. Sin embargo, muchas demostraciones se simplifican formalmente bastante cuando se trabaja en las condiciones más generales.

De los teoremas demostrados resulta que la admisibilidad de tales o cuales parejas (B, D) es condición necesaria y suficiente para que las soluciones de la ecuación (1) tengan uno u otro de los siguientes tipos de comportamiento:

Dicotomía de las soluciones de (1): Existen dos subespacios complementarios Y_0, Y_1 de X (puede extenderse la definición y los teoremas al caso en que existe Y_0 pero no tiene complemento Y_1) y constantes positivas N_0, N'_0, γ_0, tales que:

(Di) Para toda solución $x(t)$ de (1) con $x(0) \in Y_0$, y todo par de valores $t \geqq t_0 \geqq 0$, $\|x(t)\| \leqq N_0 \| x(t_0)\|$;

(Dii) Para toda solución $x(t), x(0) \in Y_1$, $\|x(t)\| \geqq N'_0 \|x(t_0)\|$, $t \geqq t_0 \geqq 0$;

(Diii) Para toda pareja de soluciones no triviales $x_i(t)$, $x_i(0) \in Y_i$, $i=0$, 1, $\gamma[x_0(t), x_1(t)] \geqq \gamma_0$, $t \geqq 0$. ($\gamma[x, y]$ designa la «distancia angular» [1] $\| \|x\|^{-1} x - \|y\|^{-1} y \|$).

Dicotomía exponencial de las soluciones de (1): Existen dos subespacios complementarios Y_0, Y_1 y constantes positivas N, N', ν, ν', γ_0, tales que:

(Ei) Para toda solución $x(t)$, $x(0) \in Y_0$, $\|x(t)\| \leqq N e^{-\nu(t-t_0)} \|x(t_0)\|$, $t \geqq t_0 \geqq 0$;

(Eii) Para toda solución $x(t)$, $x(0) \in Y_1$, $\|x(t)\| \geqq N' e^{\nu'(t-t_0)} \|x(t_0)\|$, $t \geqq t_0 \geqq 0$;

(Eiii) $=$ (Diii).

En el caso particular $Y_0 = X$, la dicotomía [exponencial] equivale a la estabilidad uniforme [exponencial o asintótica, que en este caso son equivalentes] de las soluciones de (1). En el caso general, podría designarse esos comportamientos como estabilidad [asintótica] condicional uniforme. Otros tipos de estabilidad también considerados son la estabilidad «en media» y «por trozos» en que, en lugar de los valores puntuales $x(t)$ que intervienen en las dicotomías, se consideran, respectivamente, los valores medios $\Delta^{-1} \int_t^{t+\Delta} \|x(\tau)\| \, d\tau$, y las D-normas de los «trozos» $\chi_{[t, t+\Delta]}(\tau)\, x(\tau)$ en que χ_E designa la función característica de un confunto E cualquiera; $\Delta > 0$ se supone fijo.

Una selección de resultados típicos de [9], que incluyen como casos muy particulares muchos teoremas de [6], son los siguientes:

Lema 1. *Si* $f_n \longrightarrow f$, $x_n \longrightarrow x$ *(convergencia en media en cada intervalo finito) y* $\dot{x}_n + A(t)\, x_n = f_n$ *para todo* n*, entonces* x *es (a menos de equivalencias) una solución de (2) y la convergencia* $x_n \longrightarrow x$ *es uniforme en cada intervalo finito.*

(Este lema expresa que la correspondencia lineal que asocia a cada $x(t)$ absolutamente continua la función $\dot{x}(t) + A(t)\, x(t)$ tiene su gráfico cerrado en la topología indicada).

Lema 2. *Si* D *es un espacio funcional de Banach más fino que* L*, la familia* X_D *de las* D*-soluciones de* (1) *es un subespacio de* D *y la correspondencia* $T_0 : X_D \longrightarrow X$ *definida por* $T_0 x = x(0)$ *es biunívoca y acotada.*

Teorema 1. *Si* X_{0D} *es la variedad lineal de los valores iniciales de las* D*-soluciones de* (1), X_{0D} *es cerrado si y sólo si existe* $S > 0$ *tal que, para toda D-solución* $|x|_D \leqq S\|x(0)\|$.

Teorema 2. *Si* (B, D) *es una pareja admisible, existe* $K > 0$ *tal que, para todo* $\varepsilon > 0$ *y toda* $f \in$ B*, existe una* D*-solución* $x(t)$ *de* (2) *tal que* $|x|_D \leqq (K + \varepsilon)\, |f|_B$.

La demostración de los Teoremas 1 y 2, fundamentales para lo que sigue, se basa en los teoremas de categoría. De ahora en adelante, para evitar complicaciones suplementarias, nos limitaremos a considerar el caso $\dim X < \infty$ y designaremos con X_{1D} a un subespacio cualquiera complementario de X_{0D}. Observamos que las parejas (B, D) de $\mathcal{T}$-espacios de Banach forman un conjunto parcialmente ordenado por la relación definida por: (B_1, D_1) es *más fuerte* que (B_2, D_2) si B_1 es más débil que B_2 y D_1 más fino que D_2 (ver [14]). Como esto equivale a decir que, como conjuntos de funciones, $B_1 \supset B_2$, $D_1 \subset D_2$, es claro que la hipótesiss «(B_1, D_1) es admisible» es más fuerte que (implica) la hipótesis «(B_2, D_1) es admisible». Observamos además que las relaciones «más fuerte», «más débil», no son estrictas (toda pareja es, a la vez, más fuerte y más débil que sí misma); las relaciones estrictas se expresan con las locuciones «no más débil», «no más fuerte».

T e o r e m a 3. *Si* (B, D) *es una* $\mathcal{T}$*-pareja admisible, existen funciones positivas* $M_0(\Delta)$, $M'_0(\Delta)$ *de* $\Delta > 0$, *respectivamente no creciente y no decreciente, tales que, si* $t \geqq t_0 \geqq 0$,

(i) *para toda solución* $x(t)$ *de* (1) *con* $x(0) \in X_{0D}$ (*toda* D-*solución*)

$$\int_t^{t+\Delta} \|x(\tau)\|\, d\tau \leqq M_0(\Delta) \int_t^{t_0+\Delta} \|x(\tau)\|\, d\tau,$$

$$|\chi_{[t,t+\Delta]}\, x|_D \leqq M_0(\Delta)\, |\chi_{[t_0,t_0+\Delta]}\, x|_D;$$

(ii) *para toda solución* $x(t)$ *de* (1) *con* $x(0) \in X_{1D}$,

$$\int_t^{t+\Delta} \|x(\tau)\|\, d\tau \geqq M'_0(\Delta) \int_t^{t_0+\Delta} \|x(\tau)\|\, d\tau,$$

$$|\chi_{[t,t+\Delta]}\, x|_D \geqq M'_0(\Delta)\, |\chi_{[t_0,t_0+\Delta]}\, x|_D.$$

T e o r e m a 4. *Si la* $\mathcal{T}$*-pareja* (B, D) *es admisible, y no más débil que* (L^1, L_0^∞), *existen funciones y números positivos* $M(\Delta)$ (*no creciente*), $M'(\Delta)$ (*no decreciente*), ν, ν', *tales que, si* $t \geqq t_0 \geqq 0$,

(i) *para toda solución* $x(t)$ *de* (1) *con* $x(0) \in X_{0D}$ (*toda* D-*solución*)

$$\int_t^{t+\Delta} \|x(\tau)\|\, d\tau \leqq M(\Delta)\, e^{-\nu(t-t_0)} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \|x(\tau)\|\, d\tau,$$

$$|\chi_{[t,t+\Delta]}\, x|_D \leqq M(\Delta)\, e^{-\nu(t-t_0)}\, |\chi_{[t_0,t_0+\Delta]}\, x|_D;$$

(ii) *para toda solución* $x(t)$ *de* (1) *con* $x(D) \in X_{1D}$,

$$\int_t^{t+\Delta} \|x(\tau)\|\, d\tau \geqq M'(\Delta)\, e^{\nu'(t-t_0)} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \|x(\tau)\|\, d\tau,$$

$$|\chi_{[t,t+\Delta]}\, x|_D \geqq M'(\Delta)\, e^{\nu'(t-t_0)}\, |\chi_{[t_0,t_0+\Delta]}\, x|_D.$$

El Teorema 3 [4] expresa las propiedades ya enunciadas de estabilidad [asintótica] condicional uniforme en media y por trozos. (Comparar con las dos primeras propiedades (puntuales) de las dicotomías).

T e o r e m a 5. *Si la $\mathcal{T}$-pareja* (B, D) *es admisible y además, o bien es más fuerte que* (L^1, L^∞) *o bien* $A \in M$, *los subespacios* X_{0D} X_{1D} *engendran una dicotomía de las soluciones de* (1). *Recprocamente, si hay una dicotomía,* (L^1, L_0^∞) *es admisible (y toda pareja más débil).*

T e o r e m a 6. *Si la $\mathcal{T}$-pareja* (B, D) *es admisible y no más débil que* (L^1, L_0^∞) *y si hay una dicotomía (en particular, si* $A \in M$), *los subespacios* x_{0D}, x_{1D} *engendran una dicotomía exponencial de las soluciones de* (1). *Recíprocamente, si hay dicotomía exponencial, son admisibles las parejas* (M, L^∞), (M_0, L_0^∞), (L^1, T) *(y muchas otras).*

El Teorema 5 [6] expresa la relación entre la admisibilidad de ciertas parejas y la estabilidad [asintótica] condicional uniforme puntual.

En trabajos anteriores se han examinado otros diversos problemas, de los cuales puede dar idea la siguiente selección de teoremas.

a) Teoremas de existencia de soluciones casi-periódicas (esencialmente en [6], [10]):

T e o r e m a 7. *Si la $\mathcal{T}$-pareja* (B, D) *es admisible y no más débil que* (L^1, L_0^∞) *y si* $A(t)$ *es casi-periódico, para cada* f *casi-periódica la* (2) *tiene una y una sola solución casi-periódica.*

b) Teoremas sobre ecuaciones no lineales (esencialmente en [6]):

T e o r e m a 8. *Sea* (B, D) *una $\mathcal{T}$-pareja admisible y* $h(x, t)$ *una función definida para* $t \in J$, $x \in X$, $\|x\| < a$ $(0 < a \leqq \infty)$, *con valores en* X, *tal que, para cada* $x \in D \wedge L^\infty$, $|x|_\infty < a$, *sea* $h(x(t), t) \in B$. *Sea* $\beta = |h(0, t)|_B$ *y supongamos que exista una constante* $\gamma > 0$ *tal que, para cada pareja* $x', x'' \in D \wedge L^\infty$, $|x'|_\infty$, $|x''|_\infty < a$, *sea* $|h(x'(t), t) - h(x''(t), t)|_B \leqq \gamma\, |x' - x''|_D$. *Entonces, si* β, γ *son suficientemente pequeños, existe* $b > 0$ *tal que, para cada* $\xi_0 \in X_{0D}$, $\|\xi_0\| < b$, *existe una y una sola solución* $x(t, \xi_0) \in D$ *de la* (3) *tal que* $x(0, \xi_0) = \xi_0 + \xi_1$, $\xi_1 \in X_{1D}$.

Corolario. *Sea* (B, D) *una* $\mathcal{C}$*-pareja admisible y no más débil que* (L^1, L_0^∞), $A \in M$. *Si* $h(x,t)$ *es una función definida para* $t \in J$, $x \in X$, $\|x\| < a$, *tal que es continua y acotada, como función de t, para cada x fijo, y si existe una constante positiva* γ *tal que* $\|h(x',t) - h(x'',t)\| \leqq \gamma \|x' - x''\|$ *para toda pareja* $x', x'' \in X$, $\|x'\|$, $\|x''\| < a$ *y todo* $t \geqq 0$, *entonces vale la conclusión del Teorema 8, con* C *en lugar de* D.

Un resultado análogo vale para la existencia de soluciones casi-periódicas de la (3).

c) Teoremas de «grossièreté» (esencialmente en [6]):

Teorema 9. *Sea* (B, L^∞) *admisible y* $B \in B(\widetilde{X})$ ($\widetilde{X}$: *espacio de los endomorfismos de X). Entonces, si* $|B|_B$ *es suficientemente pequeña,* (B, L^∞) *es admisible para la ecuación* $\dot{x} + (A(t) + B(t))\, x = f(t)$.

d) Teoremas del segundo método de Lyapunov [8]:

Teorema 10. *Condición necesaria y suficiente para que haya dicotomía exponencial es que exista una función de Lyapunov (generalizada) V con una cota superior infinitamente pequeña y tal que V′ sea definida.*

Teorema 11. *Condición necesaria y suficiente para que haya dicotomía es que existan dos funciones no negativas* V_0, V_1, *positivamente homogéneas del mismo grado, tales que* $V_0 + V_1$ *sea definida positiva y tenga una cota superior infinitamente pequeña, y* $V'_0 \leqq 0$, $V'_1 \geqq 0$.

e) Teoremas sobre ecuaciones periódicas (que son esencialmente nuevos sólo si $\dim X = \infty$) [7]:

Teorema 12. *Si* $A(t)$ *es periódica de período* 1 *y* $|A|_M < \log 4$, *existe una representación de Floquet* $x(t) = P(t)\, e^{tB} x_0$ *de las soluciones de* (1), *con P periódica y B constante.*

(La representación no es posible en general; existen contraejemplos con $|A|_M$ arbitrariamente poco superior a π).

Teorema 13. *Sea* $A(t)$ *periódica de período* 1 *y la adherencia de* $X_0 = X_{0C}$ *reflexiva. Si para alguna f periódica de período* 1 *la* (2) *tiene una solución acotada, tiene una solución periónica de período* 1.

Teorema 14. *Si* (B, D) *es una* $\mathcal{T}$*-pareja admisible y no más débil que* (L^1, L_0^∞) *y si* $A(t)$ $f(t)$ *son periódicos de período* 1, *existe una y una sola solución periódica de período* 1.

f) Teoremas sobre ecuaciones con coeficientes constantes [13] (generalizaciones al caso de dimensión infinita).

BIBLIOGRAFIA

[1] J. A. Clakson, *Uniformly convex spaces,* Trans. Amer. Math. Soc., 40 (1936), 396-414.

[2] M. G. Krein, *Sobre algunas cuestiones relacionadas con las ideas de Lyapunov en la teoría de la estabilidad,* Uspehi Mat. Nauk (N. S.), 3, Nº 3 (25) (1948), 166-169 (en ruso).

[3] D. L. Kučer, *Acerca de algunos criterios de acotación de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales,* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 69 (1949, 603-606 (en ruso).

[4] A. D. Maizel, *Acerca de la estabilidad de las soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales,* Trudy Uralskogo Politehn. Inst., 5 (1954), 20-50 (en ruso).

[5] I. G. Malkin, *Acerca de la estabilidad en primera aproximación,* Sbornik Naučnyh Trudov Kazanskogo Aviacionnogo Inst., 3 (1935), 7-17 (en ruso).

[6] J. L. Massera and J. J. Schäffer, *Linear differential equations and functional analysis, I,* Annals of Math., 67 (1958), 517-573.

[7] J. L. Massera and J. J. Schäffer, *Linear differential equations and functional analysis, II. Equations with periodic coefficients,* ibid, 69 (1959), 88-104.

[8] J. L. Massera and J. J. Schäffer, *Linear differential equations and functional analysis, III. Lyapunov's second method in the case of conditional stability,* ibid, 69 (1959), 535-574.

[9] J. L. Massera and J. J. Schäffer, *Linear differential equations and functional analysis, IV,* (en publicación).

[10] J. L. Massera, *Un criterio de existencia de soluciones casi-periódicas de ciertos sistemas de ecuaciones diferenciales casi-periódicas,* Publ. Inst. Mat. Estad. (Montevideo), III (1958), 99-103.

[11] O. Perron, *Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen,* Math. Zeitschrift, 32 (1930), 703-728.

[12] K. P. Persidskii, *Acerca de la estabilidad del movimiento en primera aproximación,* Mat. Sbornik, 40 (1933), 284-293 (en ruso).

[13] J. J. Schäffer, *Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes en espacios de Banach,* Publ. Inst. Mat. Estad. (Montevideo), III (1958), 105-110.

[14] J. J. Schäffer, *Function spaces with translations,* Math. Annalen, 137 (1959), 209-262.