SOBRE LAS TEORIAS DEL CAMPO UNIFICADO

por L. A. Santaló

(Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires)

1. *Introducción.* La teoría de la relatividad general asigna al espacio tiempo una estructura de espacio de Riemann cuadridimensional (postulado fundamental). Sentado este postulado, las ecuaciones del campo aparecen de una manera natural y obligada, con solo tener en cuenta el principio de la «simplicidad», es decir, que ellas deben ser las más simples entre las ecuaciones covariantes (tensoriales) posibles, dada la naturaleza del problema.

En efecto, en el vacío, dichas ecuaciones son

$$R_{ij}=0, \tag{1.1}$$

donde R_{ij} es el tensor de Ricci del espacio, que en un espacio de Riemann es el único tensor contraido del de curvatura y por tanto el tensor más simple de dos índices, después del fundamental g_{ij}.

En presencia de materia o de energía, las ecuaciones (1.1) se sustituyen por las

$$R_{ij}-\frac{1}{2}R\,g_{ij}=T_{ij}, \tag{1.2}$$

donde T_{ij} es el tensor materia-energía (dato físico) y en el primer miembro R es la curvatura escalar $R=R_{ij}\,g^{ij}$. Todavía se puede agregar en el primer miembro el término cosmológico λg_{ij} pero siempre se está dentro del teorema de E. Cartan (1):

(1) *Sur les équations de la gravitation d' Einstein*, Journal de Math. Purès et Appliquées (Liouville), 1922, págs. 141-203.

Todo tensor de dos índices S_{ij} cuyas componentes sean funciones del tensor simétrico fundamental g_{ij} y de sus derivadas parciales de primero y segundo orden, conteniendo a estas últimas linealmente, es de la forma $S_{ij} = R_{ij} + \alpha R g_{ij} + \lambda g_{ij}$ donde α y λ son constantes.

En el caso de las ecuaciones de la gravitación, la constante α queda determinada por la ecuación de conservación $S^{ij}{}_{;i} = 0$.

En esta determinación de las ecuaciones del campo, que prácticamente elimina toda arbitrariedad de elección entre varias posibilidades, radica el principal atractivo de la teoría de la relatividad general, que posee a este respecto la máxima simplicidad conceptual.

No ocurre lo mismo con las posteriores teorías del campo unificado. En ellas las ecuaciones del campo se eligen entre varias posibilidades y se trata luego de justificar por razones diversas, de índole matemática o física; el porqué se han elegido unas y no otras. Este es el principal defecto de que adolescen la mayoría de las teorías del campo unificado y tal vez en ello radique la razón de su poco éxito.

En este trabajo vamos a considerar la última teoría de Einstein con sus modificaciones sucesivas desde 1950 a 1954. Queremos ver cómo habría que modificar sus ecuaciones del campo, o qué requisitos complementarios deberían cumplir, para que tuviesen el carácter de determinación obligada a partir de ciertos criterios naturales de simplicidad, tal como hemos visto ocurre en la relatividad general. Con estos agregados se obtienen sistemas *incompatibles*, lo que prueba que el ideal perseguido no es posible. Sin embargo, con estos sistemas, siempre tendremos una guía para elegir los sistemas parciales compatibles que parezcan más apropiados y tener en cuenta lo que falta para que la teoría fuera completamente satisfactoria desde este punto de vista.

Recordemos brevemente dicha teoría. Su postulado fundamental es que el espacio tiempo sigue siendo de cuatro dimensiones pero su estructura está ahora determinada por un tensor g_{ij} no necesariamente simétrico y una conexión afín $\Gamma^i{}_{hm}$ tampoco necesariamente simétrica. En vez del tensor g_{ij}, de determinante g, es cómodo introducir la densidad tensorial correspondiente, que en general utilizaremos en su forma contravariante

$$(1.3) \qquad G^{ij} = g^{ij}\sqrt{g}.$$

Con las notaciones usuales, que resumimos en el n. 2, las primeras ecuaciones del campo o *sistema fuerte* de Einstein, son

$$(1.4) \qquad G^{ij}{}_{|k} = 0, \quad E_{ij} = 0, \quad S_i = 0$$

y otras ecuaciones, dadas también por el mismo Einstein poco tiempo después, son las que constituyen el *sistema débil*, a saber

$$(1.5) \qquad \begin{aligned} &G^{ij}{}_{|k} = 0, \quad H^{ih}{}_{,h} = 0, \\ &R_{(ij)} = 0, \quad R_{[ij],k} + R_{[ki],j} + R_{[jk],i} = 0. \end{aligned}$$

Las ecuaciones (1.4) se eligen por ciertas razones de simetría (simetría hermitiana). Las ecuaciones (1.5) resultan de un principio variacional, con lo cual está asegurada su compatibilidad.

Distintamente de lo que ocurre en la teoría de la relatividad general, los sistemas (1.4) y (1,5), no quedan obligatoriamente determinados a partir de ciertas hipótesis de simplicidad. Con iguales fundamentos se pueden sustituir por otros sistemas análogos pero no equivalentes. Nuestro objeto, como ya hemos dicho, es mostrar esta indeterminación y ver qué ecuaciones deberían agregarse a estos sistemas para que desapareciera.

Como bibliografía fundamental para la teoría del campo unificado a que nos referimos están los libros de Einstein [1], Hlavatý [2], Lichnerowicz [3] y Tonnelat [4]. En los de Hlavatý y Tonnelat, más específicamente dedicados a la teoría del campo unificado, se encuentra abundante bibliografía.

2. *Notaciones y fórmulas utilizadas.* Vamos a recopilar las notaciones y algunas fórmulas que utilizaremos.

a) De la conexión fundamental $\Gamma^m{}_{ih}$ se deduce la conexión simétrica

$$(2.1) \qquad \Delta^m{}_{ih} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^m{}_{ih} + \Gamma^m{}_{hi}\right)$$

y el tensor de torsión

$$(2.2) \qquad S^m{}_{ih} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^m{}_{ih} - \Gamma^m{}_{hi}\right)$$

del cual, por contracción, se obtiene el vector

$$(2.3) \qquad S_i = S^m{}_{im}.$$

b) El tensor de Ricci

$$(2.4) \qquad R_{ih} = \Gamma^m{}_{ih,m} - \Gamma^m{}_{im,h} + \Gamma^m{}_{lm}\,\Gamma^l{}_{ih} - \Gamma^m{}_{lh}\,\Gamma^l{}_{im}$$

tiene por parte simétrica

$$(2.5) \qquad R_{(ih)} = \Delta^m{}_{ih,m} - \frac{1}{2}(\Delta^m{}_{im,h} + \Delta^m{}_{hm,i}) + \Delta^m{}_{lm}\,\Delta^l{}_{ih} - \Delta^m{}_{lh}\,\Delta^l{}_{im} - S^m{}_{lh}\,S^l{}_{im} - \frac{1}{2}(S_{i;h}(\Delta) + S_{h;i}(\Delta))$$

y por parte antisimétrica

$$(2.6) \qquad R_{[ih]} = \frac{1}{2}\left(\Delta^s{}_{hs,i} - \Delta^s{}_{is,h}\right) + S^m{}_{ih;m}(\Delta) - \frac{1}{2}\left(S_{i,h} - S_{h,i}\right) + S_l\,S^l{}_{ih}.$$

c) El tensor de Einstein E_{ih} que figura en (1.4) es

$$(2.7) \qquad E_{ih} = -\frac{1}{2}\left(\Delta^s{}_{is,h} + \Delta^s{}_{hs,i}\right) + \Gamma^s{}_{ih,s} + \Gamma^l{}_{ih}\,\Delta^s{}_{ls} - \Gamma^s{}_{il}\,\Gamma^l{}_{sh}$$

que puede también escribirse

$$(2.8) \qquad E_{ih} = R_{ih} + S_{i;h}(\Delta) - S_l\,S^l{}_{ih} + \frac{1}{2}\left(\Delta^s{}_{is,h} - \Delta^s{}_{hs,i}\right).$$

d) La coma indica siempre derivación parcial ordinaria. El punto y coma derivación covariante. Si no se indica la conexión, se entiende que se trata respecto de la conexión inicial Γ^m_{ih}. En caso contrario se indica la conexión entre paréntesis. Por ejemplo, en (2. 5) y (2. 6) las derivadas covariantes indicadas se refieren a la conexión simétrica (2. 1).

e) Con G^{ih} indicamos siempre una *densidad tensorial* contravariante. Su derivada polarizada o mixta, la indiraremos por la siguiente notación

$$G^{ih}{}_{|s} = G^{ih}{}_{,s} + \Gamma^i_{ms}\, G^{mh} + \Gamma^h_{sm}\, G^{im} - \Delta^m_{sm}\, G^{ih}. \tag{2. 9}$$

Llamando G al determinante de G_{ih}, una consecuencia importante de la ecuación $G^{ih}{}_{|s} = 0$ es (ver por ej. Tonnelat [4], pág. 39),

$$\Delta^m_{hm} = \frac{\partial}{\partial x^h} \log \sqrt{G}. \tag{2. 10}$$

Por comodidad descompondremos G^{ih} en su parte simétrica y antisimétrica

$$G^{ih} = H^{ih} + F^{ih} \tag{2. 11}$$

siendo

$$H^{ih} = \frac{1}{2}\,(G^{ih} + G^{hi}), \quad F^{ih} = \frac{1}{2}\,(G^{ih} - G^{hi}). \tag{2. 12}$$

Con estas notaciones, de (2. 10) se deduce la relación importante siguiente, válida para la parte simétrica de cualquier conexión respecto de la cual se cumpla $G^{ih}{}_{|s} = 0$,

$$\Delta^m_{hm,i} - \Delta^m_{im,h} = 0. \tag{2. 13}$$

f) Supondremos que los determinantes de H^{ih} y F^{ih} son siempre distintos de cero.

3. *Tensores de dos índices en un espacio de conexión afín.* Según el teorema general de equivalencia para un espacio de conexión afín no simétrica, los únicos tensores independientes que se pueden formar son el tensor de torsión S^m_{ih}, el de cur-

vatura $R^{m}{}_{ihs}$ y las contracciones y derivadas covariantes de ellos. (Ver, por ej. T. Y. Thomas, *The differential invariants of generalized spaces*, Cambridge University Press, 1934, págs. 204-205).

Las contracciones del tensor de curvatura son el tensor de Ricci (2.4) y el tensor

$$(3.1) \qquad R^{m}{}_{mih} = \Delta^{m}{}_{mi,h} - \Delta^{m}{}_{mh,i} + S_{i,h} - S_{h,i}.$$

En consecuencia, se puede enunciar:

En un espacio de conexión afín no simétrica

$$(3.2) \qquad \Gamma^{m}{}_{ih} = \Delta^{m}{}_{ih} + S^{m}{}_{ih}$$

los únicos tensores de dos índices cuyas componentes cumplen las condiciones

a) *Son funciones de la conexión y de sus derivadas parciales de primer orden;*

b) *Como funciones de la conexión son, a lo sumo, de segundo grado;*

son los ocho siguientes

$$(3.3) \qquad \begin{array}{l} R_{ih}, \quad \Delta^{m}{}_{im,h} - \Delta^{m}{}_{hm,i}, \quad S^{m}{}_{ih;m}, \quad S_{i;h}, \\ S_{h;i}, \quad S^{q}{}_{ir} S^{r}{}_{hq}, \quad S_i S_h, \quad S_m S^{m}{}_{ih}. \end{array}$$

Por tanto, el tensor más general que cumple las condiciones a), b) anteriores es

$$(3.4) \qquad \begin{aligned} T_{ih} = {} & \alpha R_{ih} + \beta (\Delta^{m}{}_{im,h} - \Delta^{m}{}_{hm,i}) + \gamma S^{m}{}_{ih;m} + \delta S^{q}{}_{ir} S^{r}{}_{hq} \\ & + \varepsilon S_{i;h} + \varphi S_{h;i} + \mu S_m S^{m}{}_{ih} + \nu S_i S_h, \end{aligned}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \nu$ son constantes arbitrarias.

Es decir, así como en un espacio de Riemann el tensor más simple de dos índices, después del fundamental, es el de Ricci, en espacios de conexión afín no simétrca tenemos el anterior T_{ih} combinación lineal de otros ocho tensores todos los cuales poseen las características de simplicidad a) y b).

Para eliminar tal arbitrariedad de elección, las ecuaciones del campo que sustituyeran a las $R_{ih}=0$ de la relatividad general (en el vacío) deberían ser las que anulasen a T_{ih} cualesquiera que fueran las constantes $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \nu$. Para ello se tiene el siguiente

Teorema 1. *Las condiciones necesarias y suficientes para que se anulen todos los tensores T_{ih} cualesquiera que sean las constantes $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \nu$ son*

$$(3.5) \qquad R_{ih}=0, \quad \Delta^m{}_{im,h}-\Delta^m{}_{hm,i}=0, \quad S_i=0, \quad S^q{}_{ir}S^r{}_{hq}=0.$$

En efecto, la única condición no evidente es la $S^m{}_{ih;m}=0$ la cual es una consecuencia del sistema (3. 5) como resulta teniendo en cuenta la expresión (2. 6) de la parte antisimétrica del tensor de Ricci y sabiendo que la anulación de un tensor exige la anulación de sus partes simétrica y antisimétrica.

Obsérvese, de paso, que las condiciones (3. 5) llevan consigo la anulación del tensor de Einstein E_{ih} (2. 8). Para más detalles, ver [5].

4. *Ecuaciones deducidas de un principio variacional.* En la teoría del campo unificado de Einstein, además de la conexión se tiene la *densidad tensorial* G^{ih}. Las ecuaciones del campo pueden deducirse del principio variacional

$$(4.1) \qquad \delta \int R_{ih}\, G^{ih}\, dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4 = 0$$

con la condición de que $\Gamma^m{}_{ih}$ y G^{ih} puedan variar independientemente, siendo su variación nula en el contorno del dominio cuadridimensional considerado. Ver Lichnerowicz [3] o Tonnelat [4].

La elección en (4. 1) del tensor de Ricci no está a priori justificada. Junto con él tenemos ahora los ocho tensores (3. 3). Unas ecuaciones del campo, más naturales, que eliminarían toda elección arbitraria, serían (caso de existir) unas ecuaciones que satisfacieran al principio variacional

$$(4.2) \qquad \delta \int T_{ih}\, G^{ih}\, dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4 = 0,$$

para valores cualesquiera de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \nu$.

La solución de (4. 2), aplicando el método clásico de Euler y tras un cálculo un poco largo que hemos desarrollado en otro trabajo (ver [6] salvo un cambio de notación), resulta ser el sistema

$$K^{qs}{}_r = 0, \quad T_{ih} = 0 \tag{4.3}$$

donde T_{ih} es el tensor (3. 4) y

$$\begin{aligned} K^{qs}{}_r = {} & \alpha\,(-G^{qs}{}_{|r} + G^{qs} S_r + \delta^s{}_r\,(G^{qt}{}_{|t} + G^{qi} S_i)) \\ & - \beta\,(F^{qt}{}_{,t}\,\delta^s{}_r + F^{st}{}_{,t}\,\delta^q{}_r) \\ & + \gamma\,(-F^{qs}{}_{|r} + F^{ih}\,S^q{}_{ih}\,\delta^s{}_r + F^{qs}\,S_r) \\ & + \delta\,(H^{qi}\,S^s{}_{ir} - H^{si}\,S^q{}_{ir}) \\ & + \varepsilon\,\Big(\frac{1}{2}\,(G^{qt}{}_{|t} + G^{qi}\,S_i)\,\delta^s{}_r + \\ & \qquad + \frac{1}{2}\,(G^{st}{}_{|t} + G^{si}\,S_i)\,\delta^q{}_r - G^{qs}\,S_r\Big) \\ & + \varphi\Big(\frac{1}{2}(-G^{tq}{}_{|t} + G^{iq}\,S_i)\,\delta^s{}_r + \\ & \qquad + \frac{1}{2}(G^{ts}{}_{|t} - G^{is}\,S_i)\,\delta^q{}_r - G^{sq}\,S_r\Big) \\ & + \mu\,\Big(\frac{1}{2}\,F^{ih}\,S^q{}_{ih}\,\delta^s{}_r - \frac{1}{2}\,F^{ih}\,S^s{}_{ih}\,\delta^q{}_r + F^{qs}\,S_r\Big) \\ & + \nu\,(H^{qi}\,S_i\,\delta^s{}_r - H^{si}\,S_i\,\delta^q{}_r). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Con esta expresión se verifica el siguiente

T e o r e m a 2. *Para que sea* $K^{qs}{}_r = 0$ *para valores cualesquiera de las constantes* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \nu$ *es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones*

$$G^{qs}{}_{|r} = 0, \quad S^q{}_{ir}\,G^{si} - S^s{}_{ir}\,G^{iq} = 0. \tag{4.5}$$

Demostración:

a) Por cálculo directo se obtiene fácilmente

$$[G^{qs}{}_{|r}] = F^{qs}{}_{|r} + S^q{}_{ir}\,G^{si} - S^s{}_{ir}\,G^{iq} \tag{4.6}$$

donde el primer miembro indica la parte antisimétrica respecto de los índices q, s. Por tanto, de (4. 5) se deduce también

$$F^{qs}{}_{|r} = 0 \tag{4.7}$$

y como

$$[F^{st}{}_{|t}] = F^{st}{}_{,t} \tag{4.8}$$

resulta

$$F^{st}{}_{,t} = 0. \tag{4.9}$$

b) Las segundas ecuaciones (4. 5), escribiendo que son nulas su parte simétrica y antisimétrica respecto de los índices q, s se desdoblan en

$$S^q{}_{ir} F^{si} + S^s{}_{ir} F^{qi} = 0 \tag{4.10}$$

$$S^q{}_{ir} H^{is} - S^s{}_{ir} H^{iq} = 0. \tag{4.11}$$

De (4. 11), haciendo $r = s$, resulta

$$S_i H^{iq} = 0 \tag{4.12}$$

y por tanto, habiendo supuesto no nulo el determinante de las H^{iq} resulta

$$S_i = 0. \tag{4.13}$$

c) De las segundas ecuaciones (4. 5), haciendo $s = r$ y sumando, teniendo en cuenta (4. 13) resulta

$$F^{ir} S^q{}_{ir} = 0. \tag{4.14}$$

d) Finalmente, la identidad (válida si se cumple (4. 13)),

$$G^{ts}{}_{,t} + G^{ih} \Gamma^s{}_{ih} = G^{ts}{}_{|t} - 2 F^{it} S^s{}_{it},$$

teniendo en cuenta (4. 14) nos dice que también es

$$G^{ts}{}_{,t} + G^{ih} \Gamma^s{}_{ih} = 0. \tag{4.15}$$

Con todas estas relaciones, es inmediato comprobar que el teorema es cierto.

Para que se cumpliera todo el sistema (4. 3) o sea, el principio variacional (4. 2), fuera satisfecho para valores cualesquiera de las constantes $\alpha, \beta, \ldots, \nu$, según los teoremas 1 y 2, teniendo en cuenta que como consecuencia de la primera condición (4.5), se cumple la (2.13), debería ser

$$
(4.16) \qquad
\begin{aligned}
&\text{a)} \quad G^{qs}{}_{|r} = 0 \\
&\text{b)} \quad S^q{}_{ir} G^{si} - S^s{}_{ir} G^{iq} = 0. \\
&\text{c)} \quad S^q{}_{ir} S^r{}_{hq} = 0 \\
&\text{d)} \quad R_{ih} = 0.
\end{aligned}
$$

Consecuencias importantes de este sistema son las ecuaciones (4.9), (4.13) y (4.14), a las cuales se puede agregar la ecuación

$$(4.17) \qquad G^{iq} S^s{}_{ir} S^r{}_{qs} = 0$$

que se obtiene de b) multiplicando por $S^r{}_{qs}$ y sumando.

El sistema a), b), c), d) es claramente *incompatible*, por tener más ecuaciones que incógnitas. Esto prueba que una teoría del campo unificado basada en los principios de la que estamos considerando, siempre tendrá cierto grado de arbitrariedad en la elección de sus ecuaciones del campo. Eligiendo entre las a), b), c), d) o entre ellas y las (4.9), (4,13), (4.14), (4.17) un sistema compatible cualquiera, se tendrá una posibilidad, a la cual siempre será posible buscar una justificación a posteriori si es que resulta útil a la física.

5. *Apéndice*. Las ecuaciones del campo para el principio variacional (4.2) son las (4.3). El primer grupo parece extraordinariamente complicado. Sin embargo, escribiendo las ecuaciones $K^{ts}{}_t = 0$, $K^{qt}{}_t = 0$, despejando de las primeras $H^{st}{}_{,t}$ y de las segundas $H^{qt}{}_{,t}$ y sustituyendo en (4.4) resultan unas ecuaciones que pueden condensarse en la forma relativamente simple siguiente

$$
(5.1) \qquad
\begin{aligned}
K^{qs}{}_r = &-(\alpha+\gamma) F^{qs}{}_{|r} (*L) - \alpha H^{qs}{}_{|r} (**L) \\
&+ \frac{1}{3}(\gamma + 2\beta)\, \delta^s{}_r F^{qt}{}_{,t} + \frac{1}{3}(-2\alpha + 2\beta - \gamma)\, \delta^q{}_r F^{st}{}_{,t} = 0
\end{aligned}
$$

siendo las conexiones respecto de las cuales están realizadas las derivadas covariantes poralizadas indicadas (recordar (2. 9)) las

$$(5.2)\quad \begin{aligned} {}^{*}Lq_{ir} &= \Gamma q_{ir} + \frac{1}{3}\left(2 - \frac{\varepsilon-\varphi-\mu}{\alpha+\gamma}\right)\delta q_i S_r - \frac{1}{3}\frac{\varepsilon-\varphi-\mu}{\alpha+\gamma}\delta q_r S_i \\ {}^{**}Lq_{ir} &= \Delta q_{ir} + \left(1 + \frac{\delta}{\alpha}\right) Sq_{ir} + \frac{1}{3}\left(2 + \frac{\delta-\varepsilon-\varphi}{\alpha}\right)\delta q_i S_r - \\ &\quad - \frac{1}{3}\left(\frac{\delta+\varepsilon+\varphi}{\alpha}\right)\delta q_r S_i, \end{aligned}$$

las cuales cumplen las condiciones de ser nulos los vectores contraídos de sus partes antisimétricas, o sea

$$^{*}S_i = 0, \quad ^{**}S_i = 0$$

siendo estos vectores los análogos a (2. 3) para las conexiones (5. 2).

Esta forma (5. 1) condensa resultados que obtuvimos en [6] y puede servir para interpretar las ecuaciones que se elijan dentro de las a), b), c), d) del número precedente como ecuaciones obtenidas en base a un principio variacional.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Einstein, *The Meaning of Relativity*, Apéndice II, 3ª y 4ª edición, 1950 y 1953, Princenton.

[2] V. Hlavaty, *Geometry of Einstein's unified field theory*, P. Noordhoff Ltd. Groningen, Holanda, 1958.

[3] A. Lichnerowicz, *Les théories relativistes de la gravitation et de l'electromagnetisme*, Masson, París 1955.

[4] M. A. Tonnelat, *La Théorie du champ unifié d'Einstein et quelques-uns de ses développements*, Gauthier-Villars, París, 1955.

[5] L. A. Santaló, *Sobre unos tensores análogos al de curvatura en espacios de conexión afín no simétrica*, Revista de Matemáticas y Física Teórica de la Univ. Nac. de Tucumán, vol. 10, 1954, pp. 19-26.

[6] L. A. Santaló, *Sobre las ecuaciones del campo unificado de Einstein*, Rev. de Mat. y Fis. Teór. de la Universidad N. de Tucumán, vol. 12, 1959, pp. 31-55.