BIBLIOGRAFIA

TIBERIU MIHAILESCU, *Geometrie Differentiala Proiectiva,* Editura Academiei Republicii Populare Romine, 1958 (en rumano), 494 págs.

La geometría proyectiva diferencial se inició a fines del siglo pasado con trabajos aislados, en general enfocados desde puntos de vista diferentes, debidos principalmente a Halphen, Sophus Lie y Corrado Segre, entre otros. A principios del siglo actual empezó a sistematizarse, contribuyendo a ello de manera importante la obra de E. J. Wilczynski, *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces* (Leipzig, 1906). Sigue luego el libro de G. T. Tzitzeica, *Géométrie differentielle projective des réseaux* (Bucarest, 1923) y poco después la obra en dos volúmenes de G. Fubini y E. Cech, *Geometria proiettiva differenziale* (Bolonia, 1926-27). Esta obra, más que un tratado sistemático, parecía una reunión de memorias sueltas, con mucho y valioso contenido, pero de escasa atracción para los principiantes. De aquí que pocos años después los mismos autores captaran la necesidad y tuvieran el acierto de publicar su muy conocida *Introduction à la géométrie projective differentielle des surfaces* (Paris, 1931), resumen de la anterior, obra excelente en todos sentidos, que ha servido de punto de referencia para muchos trabajos posteriores. Al final de esta obra figura un capítulo sobre la "application des méthodes de E. Cartan a la theorie projective des surfaces", métodos que en la geometría proyectiva, como en todas las otras ramas de la geometría ya empezaba entonces a revelarse de gran interés, el cual ha ido desde entonces en continuo aumento.

En una dirección distinta, de corte clásico, aparece en 1932 el libro de E. P. Lane, *Projective Differential Geometry of Curves and Surfaces* (Chicago 1932), obra que aparece completamente rehecha en 1941 bajo el título de *A treatise on Projective Differential Geometry* (Chicago, 1941). En ella el método general es el de los desarrollos en serie alrededor de cada punto, método útil en ciertos aspectos, pero penoso o impracticable en otros.

En 1937 aparecen las *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective* de E. Cartan, con varios capítulos sobre la teoría de curvas y superficies del espacio tridimensional, pero todo desde un punto de vista elevado, como aplicación del método del triedro móvil y del cálculo diferencial exterior. Citaremos, finalmente, la obra de G. Bol, *Projektive Differentialgeometrie* (Göttingen, vol. I (1950), vol. II (1954), con muchos aspectos nuevos e interesantes, abundante bibliografía y en la cual se aplican con frecuencia los métodos de E. Cartan pero no de manera sistemática.

Tal es el panorama de la literatura principal, en libros, sobre geometría diferencial proyectiva hasta que aparece el libro de Mihailescu que vamos a reseñar. La idea esencial del libro es la de aplicar sistemáticamente los métodos de E. Cartan. Es decir, desarrollar de manera natural las ideas esbozadas en los últimos capítulos de la "Introduction" de Fubini-Cech o en las "Leçons" de Cartan hasta obtener todos los principales resultados de los tratados clásicos, más nuevas contribuciones del autor. La idea es excelente, pues con ella se tienen varias ventajas, a saber: a) El lector se familiariza con el uso de los métodos del triedro móvil y del cálculo diferencial exterior, métodos que luego han de servirle para cualquier otra rama de la geometría que quiera estudiar; b) Se adquiere un método con el cual los diferentes temas de la geometría diferencial proyectiva aparecen sistematizados y muchas cuestiones dispersas, unificadas; c) Se abren nuevos campos de investigación que en el tratamiento clásico serían mucho más difíciles de descubrir.

En el Cap. I se define el espacio proyectivo y se establecen las nociones generales acerca del método del triedro móvil en el mismo. El Cap. II trata de las curvas planas (dualidad, arco proyectivo, curvas *W*, evolutas y envolventes proyectivas). El Cap. III está dedicado a las curvas del espacio (invariantes, arco proyectivo, fórmulas de Frenet, curvas osculatrices, superficies desarrollables unidas proyectivamente a una curva del espacio, etc.). En ambos capítulos se tratan también los sistemas de referencia duales, los que dan lugar a invariantes y características duales de los obtenidos en el caso puntual.

El Cap. IV se refiere a las superficies en general y en particular a las regladas. Se establecen las fórmulas de Frenet para distintos sistemas de referencia asintóticos. Al buscar los sistemas de referencia de los diferentes órdenes aparecen naturalmente los elementos clásicos de la geometría proyectiva diferencial local de superficies: tangentes de Darboux, rectas de Sullivan, aristas de Green, cuádrica de Wilczinski, etc. Las superficies regladas exigen un estudio especial. Se estudian también en detalle las cuádricas y las superficies desarrollables. Hay que señalar también el estudio de ciertas curvas que aparecen como extremales de invariantes proyectivos y el estudio, por dualidad, del caso tangencial. El Cap. V trata primeramente de las curvas sobre una superficie no reglada y los elementos proyectivamente invariantes con ellas relacionadas. Por ejemplo, la gran variedad de cuádricas asociados a cada punto (Darboux, Moutard, Bompiani, Gambier, Bogdan, Davis,...). Luego estudia ciertas superficies especiales (isotermo-asintóticas, de Cĕch, superficies tales que las tangentes a las asintóticas forman un complejo lineal, de Demoulin-Godeaux, de Tzitzeica, etc.). El Cap. VI se refiere a los reticulados conjugados y a las figuras con ellos relacionadas: reticulados isotermo-conjugados, congruencias asociadas, transformaciones de Laplace, reticulados de Tzitzeica, de Terracini-Pantazi, de Darboux-Segre, de coincidencia, etc. Finalmente, el Cap. VII se refiere a las variedades no holónomas del espacio de tres dimensiones, con sus invariantes, elementos asociados y varias superficies especiales; contiene resultados interesantes no fáciles de encontrar en la literatura corriente. En los dos últimos capítulos los resultados originales del autor son abundantes.

La obra termina con una bibliografía dedicada especialmente a los trabajos publicados entre 1949 y 1956, con la idea de completar al casi exhaustiva de Bol en el primer volumen de la obra citada.

Este rápido resumen servirá para dar una idea global del contenido, pero no de los detalles, muchos de ellos interesantes, tanto desde el punto de vista expositivo como del conceptual.

Creemos que la obra es una útil e interesante contribución a la literatura sobre geometría diferencial proyectiva.

L. A. Santaló

Opera Matematica a lui Alexandru Pantazi, Editura Academiei Republicii Populare Romine, 1956, 496 páginas.

Se trata de las obras completas del matemático rumano A. Pantazi (1896 - 1948). Como es sabido la especialidad de Pantazi fue la geometría proyectiva diferencial, en la cual dejó interesante huella, principalmente en problemas de aplicabilidad y deformación proyectiva de superficies.

El volumen empieza con una reseña biográfica sobre "La vida y la obra de A. Pantazi", escrita en rumano y francés por G. Vranceanu y T. Mihailescu, en la cual se hace un detallado análisis de ambos aspectos. Contiene 39 notas y memorias publicadas entre 1914 y 1947 en distintas revistes, reproducidas en el idioma en que fueron publicadas, muchas de ellas en francés. Al final (págs. 389-494) se reproduce un curso sobre geometría proyectiva diferencial de curvas y superficies, en rumano, publicado por Pantazi en 1942, de carácter relativamente elemental pero interesante por su claridad y seleccionado contenido.

El volumen ha de contribuir a dar a conocer la obra de Pantazi, prematuramente desaparecido a los 52 años.

L. A. Santaló

MARIO A. BUNGE, *Cinemática del electrón relativista*, Publicaciones del Instituto de Física de la Universidad Nacional de Tucumán. Facultad de Ciencias Exactas y Tecnológicas. Tucumán. 1960.

Es un hecho aceptado que la teoría del electrón de Dirac constituye la forma más perfecta conocida actualmente sobre la dinámica endulatoria del electrón; de ella surge el electrón como corpúsculo electrizado giratorio y magnético — que fuera la fecunda hipótesis de Uhlenbeck y Goudsmit; por ella se concilian las ideas relativistas y las concepciones cuánticas y se explican hechos experimentales tan importantes como la estructura fina de los espectros y los efectos Zeeman anómalos.

Permanecen, sin embargo, todavía sin aclarar discrepancias entre la teoría y las experiencias: se sabe que de los tres niveles, $2s^{1}/_{2}$, $2p_{1}$, $2p^{3}/_{2}$ que en la aproximación no relativista son coincidentes, dos de ellos, el $2s^{1}/_{2}$ y el $2p^{1}/_{2}$, siguen siendo coincidentes según la teoría de Dirac, y es necesario recurrir al efecto Lamb, que representa la conexión radiativa, para tratar con más rigor la interacción entre el electrón, el protón y el campo electromagnético cuantificado y explicar las separaciones entre los niveles $2s^{1}/_{2} — 2p^{1}/_{2}$; $2p^{3}/_{2} — 2p^{1}/_{2}$. Además, la interpretación física de los resultados cuando se pasa al límite no relativista, presenta al electrón no como una carga puntual sino como una distribución de carga y de corriente extendidas a un dominio de dimensión $\frac{h}{mc}$.

Frente a las discrepancias entre teoría y experiencias, Mario Bunge, autor de la tesis que comentamos, y consecuente con su actitud filosófica frente a los fenómenos naturales, cree conveniente modificar la interpretación de las teorías sobre las partículas sin cambiar la formulación ni las representaciones habituales (actitud modesta dictada por la dificultad de substituir la teoría conocida por otra más ajustada), para:

a) mejorar la correspondencia con la teoría clásica;
b) lograr una imagen física de lo que para Bunge es sólo una "maraña matemática".

Concretamente, en la Cinemática del electrón relativista, Bunge realiza este programa investigando el comportamiento de la velocidad del electrón en la teoría cuántica relativista.

Es sabido que las cinemáticas utilizadas por la mecánica clásica, la teoría de la relatividad y la mecánica cuántica se explican mediante leyes de transformación de las coordenadas y las velocidades en sistemas de referencia espacio temporal y que en las tres teorías, se establece una relación unívoca entre la velocidad y el impulso de una partícula:

$$\vec{p} = \frac{mc\,\frac{\vec{v}}{c}}{\sqrt{1-\frac{c^2}{v^2}}} \qquad \begin{array}{l} \vec{p} = m\,\vec{v} \\ v << c \end{array}$$

A su vez, la teoría de Dirac introduce las coordenadas, los impulsos y las velocidades de manera independiente de donde resulta que es preciso establecer la nueva relación que existe entre el impulso y la velocidad.

Bunge considera el caso del operador de la velocidad cuyo cálculo en coordenadas esféricas es el objetivo de la tesis. Utiliza como solución de la ecuación de Dirac, la representación hipercompleja —matrices de cuatro columnas y cuatro filas—, que fuera introducida por Beck, para lograr la interpretación física de una transición entre dos estados cuánticos. Dieciséis son las transiciones posibles entre estados de diferente "carácter" del electrón (dos signos de energía, dos estados posibles del "spin"), transiciones que corresponden a 16 elementos de la matriz, y que pueden ser clasificados en elementos de primera clase y elementos de segunda clase. A los primeros se adjudican físicamente las transiciones idénticas (respecto del carácter) y a transiciones entre estados de diferente orientación del spin; a los segundos, las transiciones entre estados de diferentes signo de carga, que conducen a fluctuaciones, o sea a procesos de aniquilamiento y producción de pares.

El cálculo de los elementos de matriz del operador velocidad, correspondientes a una transición, muestra que los elementos diagonales representan la velocidad macroscópica del electrón, en tanto que los elementos no diagonales corresponden a fluctuaciones de la velocidad en torno a su valor medio v entre sus valores propios $+c$ y $-c$ ("movimiento de temblor"). Es, precisamente, a los valores medios que está ligado el impulso mediante la relación entre $\vec{p}$ y $\vec{v}$ escrita más arriba.

Los casos tratados analíticamente por ser de mayor interés físico son: el movimiento del electrón libre y el movimiento del electrón en el campo central, utilizando el formalismo hipercomplejo. Para un electrón en un campo coulombiano obtiene la siguiente interpretación: algunos de los términos de la parte de primera clase constituyen un promedio ponderado sobre los estados libres, otros dan la parte fluctuante del electrón libre, vale decir, dan la contribución observable de las fluctuaciones del electrón libre. La teoría de Dirac añade así un fenómeno nuevo que puede atribuirse a la modificación de las propiedades físicas del vacío por acción de la carga Ze y la consiguiente influencia del "vacío polarizado" sobre el movimiento mecánico del electrón.

A la parte de segunda clase contribuyen no solamente las fluctuaciones del electrón libre, sino también la parte de primera clase, prueba de la íntima unión entre las propiedades mecánicas del electrón con las variables de "carácter".

La tesis está dividida en tres partes. En la primera, a lo largo de tres capítulos, se estudian: Las soluciones de la ecuación de Dirac en coordenadas cartesianas. La ecuación de onda y sus soluciones generales en coordenadas esféricas. Las soluciones radiales del electrón libre, en un campo coulombiano y del átomo de hidrógeno. Los operadores de la velocidad y La velocidad del electrón no relativista.

En la segunda parte, capítulos IV al VI se calculan los elementos de matriz de los componentes de la velocidad en coordenadas polares, en el caso del electrón libre, y los espectros contínuo y discreto del campo coulombiano.

La tercera parte es un Apéndice matemático donde se resuelven las integrales que fueron necesarias a lo largo de la exposición de los temas. Se calculan integrales angulares e integrales radiales en teoría de Schrödinger, e integrales radiales en la teoría de Dirac.

Cinemática del electrón relativista, tesis redactada en 1952, aparece ahora publicada, en un cuidadoso volumen, por la Universidad Nacional de Tucumán.

Cecilia Mossin Kotin

MARTÍN BARNER, *Differential- und Integralrechnung; I: Grenzwertbegriff, Differentialrechnung,* Sammlung Göschen, Walter de Gruyter & Co., Band 86/86a, Berlín, 1961.

Este pequeño tratado, de ningún modo enciclopédico, trata de enfocar el tema de una manera a la vez elemental y rigurosa. En particular, se ocupa de fijar bien las nociones de topología de la recta que permitan introducir correctamente los conceptos usuales del cálculo infinitesimal. La dificultad que esto supondría para los lectores no habituados al tema está evitada con una gran variedad de ejemplos críticos aclaratorios.

También aquí se presenta pues la tendencia cada vez más pronunciada en los modernos textos de análisis de fundamentar más rigurosamente los conceptos sin elevar el nivel necesariamente. Este propósito se logra conservándose el carácter de "manual" que posee el libro, pues no profundiza excesivamente los conceptos ni aumenta demasiado el contenido, sacrificando a veces el tratamiento exhaustivo de los temas. Todo esto lo hace muy recomendable para principiantes. En cambio, no se ocupa mayormente de las aplicaciones geométricas y físicas, perdiendo así una herramienta útil para aclarar ideas. De todas maneras el saldo es incuestionablemente positivo. Es digno de mencionarse también que contiene una detallada definición de las funciones trascendentes elementales, cosa que generalmente sólo se encuentra en textos de nivel superior al de éste.

Este primer tomo —de los cuatro que constituirán la obra— trata solamente de la primera mitad de lo que habitualmente constituye el primer curso de análisis en las universidades argentinas, es decir, límite y cálculo diferencial. La enunciación de los títulos de cada capítulo podrá dar una idea más exacta de su contenido: I. Propiedades de los números reales; II. Conjuntos de números reales; III. Funciones reales; IV. Sucesiones de números reales; V. Funciones continuas; VI. Funciones logarítmica y exponencial; VII. Funciones diferenciables; VIII. Funciones circulares.

El ejemplar es de tamaño de bolsillo, consta de unas 180 páginas, y es de perfecta presentación.

Juan Carlos Merlo

COMBINATORIAL ANALYSIS, *Proceedings of the tenth symposium in Applied Mathematics of the American Mathematical Society, held at Columbia University,* Abril 24-26. American Mathematical Society, Providence, 1960, 311 páginas.

El título de Análisis Combinatorio abarca un extenso campo debido a las múltiples aplicaciones del clásico concepto de las combinaciones que pueden formarse con un número finito de elementos. Dentro de la matemática pura, el campo comprende a las llamadas geometrías finitas, que es una forma geométrica de enunciar propiedades típicas de la teoría de números o de la teoría de los grupos finitos. En la matemática aplicada, tienen carácter combinatorio muchos problemas de comunicaciones o de transporte en redes finitas. Cualquier problema con un número finito de incógnitas, ligadas por ciertas igualdades o desigualdades, entra en el campo combinatorio. Para números grandes, al computación efectiva de los casos posibles, requiere muchas veces el uso de las modernas calculadoras electrónicas.

Estos Proceedings contienen los 24 trabajos que fueron presentados en el décimo simposio sobre Matemática Aplicada organizado por la American Mathematical Society y celebrado en la Universidad de Columbia durante los días 24 a 26 de abril de 1958. El interés de cada trabajo dependerá de la especialidad y gusto del lector, pues la variedad es bien notoria; desde la matemática mas abstracta hasta los aspectos más numéricos y aplicados de la misma. No deja ello de tener interés, como nueva prueba de la unidad de la matemática, al poner de manifiesto como los procedimientos de cálculo numérico pueden servir para aclarar problemas abstractos de la teoría de números, al igual que, en compensación, el razonamiento abstracto puede ser de gran ayuda en la conducción de un problema numérico práctico.

El índice de los trabajos es el siguiente:

L. A. Santaló