

América Latina como frutos ya logrados y por las perspectivas de éxito que el futuro ha de depararles.”

Terminó al Acto Inaugural con la conferencia del profesor Solomón Lefschetz, de la Universidad de México, sobre el tema “Algunas consideraciones sobre las matemáticas modernas”, que se publica a continuación.

ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LAS MATEMÁTICAS MODERNAS

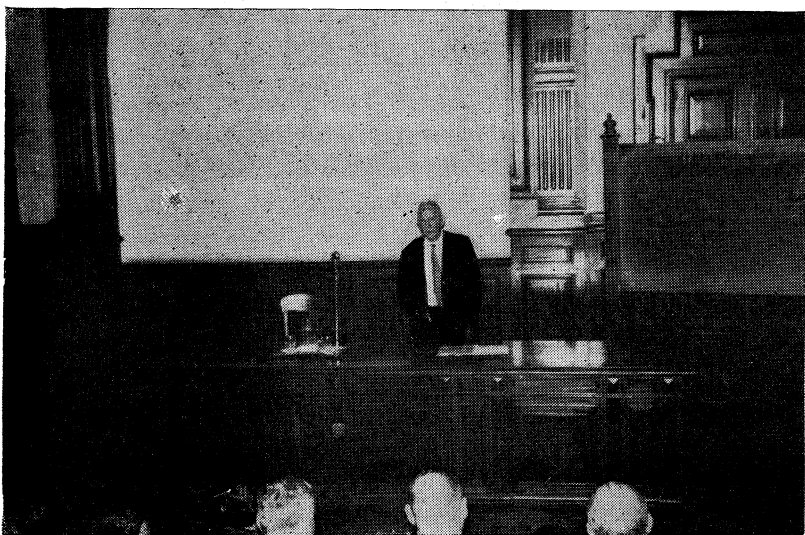
Por SOLOMON LEFSCHETZ

Los matemáticos modernos se pueden clasificar en *activos* y *contemplativos*. Si uno piensa en las matemáticas modernas como en un edificio, algunos colegas afirman que su fundamento no es cien por ciento seguro. Los matemáticos contemplativos son aquellos que se preocupan por ese fundamento, terreno no muy firme que recuerda el subsuelo lodoso de la ciudad de México. Los activos, en cambio, son los que miran arriba, siempre arriba. Me clasifico, francamente entre los activos y hablaré a ustedes desde este punto de vista; creo que es éste el estado de ánimo de los “creadores”, al menos cuando están creando. Eran, por cierto, activos, Gauss, cuando clasificaba las formas cuadráticas binarias; Poincaré, luchando con la clasificación de las variedades tridimensionales; Hilbert, resolviendo el problema de los invariantes algebraicos o el problema de Waring. Una misma persona puede pertenecer a ambos grupos, como Brouwer y Hermann Weyl, o el mismo Hilbert al fin de su vida. Pero generalmente son personalidades distintas. En su ánimo profundo, el activista está convencido de que el edificio de las matemáticas, del que metafóricamente hablamos, se mantiene vertical, a igual que el edificio más alto de la América Latina, la “Torre Latinoamericana” en la ciudad de México, a pesar de la poca consistencia del subsuelo.

Me pongo, entonces, en el punto de mira del activista. Ahora bien, en presencia de la acumulación de teorías matemáticas que se ha producido en los últimos ciento cincuenta años, el edificio de las matemáticas se ha transformado en un verdadero laberinto, resultando muy aconsejable que el activista que desea penetrar en él, busque alguna guía. La contribución que haré en tal sentido, con-

siste en señalar que hay dos teorías, más o menos ajenas, pero básicas, de las cuales están compuestas las demás ramas de nuestra ciencia: el *álgebra* y la *topología*.

Lo que me propongo hacer es describir someramente estas dos teorías, ilustrar algunos de sus rasgos principales y, finalmente, justificar mi afirmación precedente. Repito que mi punto de vista es totalmente personal, al respecto. No espero, por cierto, el acuerdo de todos los colegas. Pero todos estamos de acuerdo que estamos en presencia de una verdadera jungla y necesitamos un guía. Si no se acepta mi punto de vista, que se proponga otro.



El Profesor Lefschetz pronunciando su conferencia en el acto inaugural.

Charlemos entonces del álgebra. En matemática generalmente estamos en presencia de una variedad de "cosas" o "elementos" $a, b, c, \dots$, que constituyen un conjunto A . Por otro lado se presentan muchas relaciones $\rho, \sigma, \dots$, que constituyen otro conjunto R . La forma de relacionarse es generalmente del siguiente tipo: dados un par cualquiera de elementos de A , por ejemplo a, b , se puede deducir otro por medio de una relación de R : $a \rho b$; $a \sigma b$; etc.

Una variante puede ser la siguiente: se tienen 3 conjuntos A, B, C cuyos elementos son $a, a', a'', \dots$; $b, b', b'', \dots$; $c, c', c'', \dots$; respectivamente, tales que de cualquier par a de A, b de B , se deduce mediante las relaciones de R elementos de C : $a \rho b = c$, $a \sigma b = c', \dots$

Ahora bien, si en ningún lugar de A , R o bien A , B , C , R aparecen propiedades de medida o de cercanía de los elementos, estamos en presencia de un sistema algebraico, o bien un álgebra. Lo característico del álgebra es que en él rige un individualismo completo, mientras que en la topología, por el contrario, se siente la comunidad. Esta aserción es por cierto vaga, pero creo que se entiende. La aclararemos con algunos ejemplos.

El primer ejemplo, es la noción de *grupo*, de importancia capital en las matemáticas modernas. Tómese un solo conjunto A de elementos a , b , c , ..., y una sola relación u *operación* R . El símbolo adoptado poco importa, y por lo tanto, de acuerdo con la costumbre, representaremos la única operación por " $\times$ " o simplemente por un punto. De modo que de a y b se deduce $c = a \times b$, que es también un A . Hasta ahora la generalidad es completa, y si no imponemos ciertas restricciones (axiomas) nada de interés se obtiene.

El "grupo" se caracteriza por las siguientes propiedades:

- I. *Asociatividad*: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.
- II. *Unidad*: Existe un elemento e , la "unidad", tal que $a \times e = e \times a = a$ para cualquier a de A .
- III. *Inverso*: Para cualquier a existe otro elemento, que se escribe a^{-1} , tal que $a \times a^{-1} = e$ (De aquí resulta que también $a^{-1} \times a = e$).

Frecuentemente se escribe ab en lugar de $a \times b$, y 1 en lugar de e ; con tal notación, por ejemplo, se escribirá: $a a^{-1} = 1$.

Cuando el grupo es *conmutativo*, es decir cuando $ab = ba$, la operación se indica frecuentemente con el signo $+$, en lugar de e se escribe 0, y el a^{-1} se sustituye por $(-a)$. De $a a^{-1} = e$ resulta, entonces: $a + (-a) = 0$.

Cuando la operación se escribe por el signo " $\times$ ", el grupo se dice "multiplicativo", en cambio cuando se usa el " $+$ ", se dice que es un grupo "aditivo".

Formalmente, un grupo multiplicativo se comporta como el conjunto de los números racionales con la operación de multiplicación; un grupo aditivo, como los enteros con la adición.

Examinemos algunos ejemplos:

Grupos finitos. Son aquellos en los que el conjunto de elementos a , b , c , ... es finito. Los movimientos de un polígono regular en su plano, que no cambian su aspecto, constituyen un grupo finito.

Es el grupo más simple, que se puede imaginar engendrado por un solo movimiento a con la única relación $a^n = 1$ (donde $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$). Otro ejemplo lo constituyen los grupos de permutaciones. Dados n elementos, que designaremos convenientemente por cifras: $1, 2, \dots, n$, la operación típica se simboliza por

$$a = \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \end{pmatrix}$$

cuyo significado es el siguiente: sustitúyase 1 por α_1 , 2 por α_2 , ..., n por α_n . Se verifica fácilmente que tales operaciones dan lugar a un grupo, el *grupo de sustituciones de n elementos*.

Para otro ejemplo, identifíquense todos los enteros positivos no múltiplos de p (siendo p un número primo mayor que 1), con sus respectivos restos de división por p . Si r y s son dos restos, rs será el resto de la división del producto por p . De esta manera los residuos (módulo p) originan un grupo de orden $p - 1$ (es decir con $p - 1$ elementos): $1, 2, \dots, p - 1$.

Este grupo es evidentemente conmutativo.

Por otro lado, háganse las sumas $r + s$, sólo que ahora deben incluirse los múltiplos de p . Resulta así un grupo aditivo de p elementos.

Grupos infinitos. El grupo aditivo de los enteros, o bien el grupo multiplicativo de los racionales positivos, son ejemplos de grupos infinitos. Otros ejemplo de grupo infinito, es el engendrado por las rotaciones de una esfera (de centro fijo).

Anillos. Tomemos ahora un sistema A de elementos con *dos* operaciones, que designaremos por " $\times$ " y "+". Los axiomas que se imponen generalmente son los siguientes:

- I. Bajo la operación de suma (signo +) los elementos de A constituyen un grupo conmutativo, cuya unidad se designa por 0.
- II. La operación producto (signo $\times$) es asociativa.
- III. La ley distributiva relaciona ambas operaciones:
 $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.
- IV. $0 \times a = a \times 0 = 0$.

El signo $\times$ suele omitirse, escribiendo ab por $a \times b$.

El comportamiento general de tales sistemas es análogo al de los enteros bajo las operaciones vulgares de suma y producto.

Ejemplos.

El sistema de los números enteros.

El sistema de los siguientes números: $0, \pm p, \pm 2p, \pm 3p, \dots$, donde p es un entero fijo.

El sistema de los polinomios en una variable (o en dos, o en tres, etc., variables) con coeficientes enteros, también constituye un anillo.

Sea, de nuevo, p un número primo. El conjunto de los residuos (modulo p) con las operaciones de suma y producto, es un anillo de p elementos: $0, 1, 2, \dots, p-1$, que llamaremos A_p .

Campos. Sea A un anillo y supongamos que posee un elemento unidad e , tal que $ae \times ea = a$ para cualquier a de A . Dado un par de elementos a, b , siendo $b \neq 0$, se pueden definir de la misma manera que para los números enteros, las fracciones $\frac{a}{b}$. La totalidad de estos nuevos elementos constituyen un *campo*.

El comportamiento es similar al de los números racionales.

Ejemplos. La totalidad de los números racionales constituye un campo. También lo constituyen los siguientes:

- El anillo A_p , vale decir los residuos módulo p (p primo). El anillo A_2 es especialmente notable.
- La totalidad de los números de la forma $p + q\sqrt{d}$, siendo p, q números racionales, d un número entero sin factor cuadrático.
- La totalidad de los cocientes de polinomios con coeficientes en un campo numérico.
- Sea $f(x, y)$ un polinomio irreducible con coeficientes racionales

Se identifican dos cocientes $\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \frac{R(x, y)}{S(x, y)}$ del mismo tipo

que f cuando y sólo cuando $PS - QR$ es divisible por $f(x, y)$.

Los elementos que resultan constituyen un campo: el campo de las funciones racionales sobre la curva $f(x, y) = 0$.

Espacios vectoriales. Estas estructuras son de gran importancia en geometría, física, etc. Un espacio vectorial V es un grupo aditivo de elementos $a, b, c, \dots$ llamados vectores, con un campo asociado

F de elementos $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ siempre que las expresiones del tipo $\alpha a + \beta b + \dots + \gamma c$ bajo las reglas obvias, representen también vectores. Si $\alpha a + \beta b + \dots + \gamma c = 0$, se dice que $a, b, \dots, c$ son *dependientes*, si no existe tal relación, ellos son *independientes*. El número máximo de elementos independientes se llama *dimensión* del espacio vectorial.

Ejemplos. Tómense n números reales $x_1, x_2, \dots, x_n$ que serán las componentes de un vector x . Si α es un número real, defínase el vector αx como el vector de componentes αx_i . Si x' con componentes x'_i es otro vector y α' otro número real, defínase el vector $\alpha x + \alpha' x'$ como el vector de componentes $\alpha x_i + \alpha' x'_i$. Estos vectores originan un espacio vectorial sobre el campo real, cuya dimensión es precisamente n .

Para completar lo dicho con respecto al álgebra, haría falta mucho más tiempo y lugar, razón por la cual me detengo aquí. Quiero recordar, en cambio, que el conjunto de ideas aquí esbozado ocupa una posición preponderante en la matemática moderna. Hace un siglo y cuarto por ejemplo, en base a las nociones de grupo y campo, Ruffini, Abel y Galois, demostraron que para las ecuaciones de grado superior al cuarto no existen soluciones por fórmulas algebraicas (que utilicen sólo las cuatro operaciones racionales y la extracción de raíces, un número finito de veces).

Pasamos ahora a la *topología*, nuestra teoría básica opuesta al álgebra. Cuando introducimos nociones de medida o de vecindad, estamos haciendo topología. El conjunto de nuestros elementos se llama entonces un *espacio* y sus elementos son los *puntos*. La manera más fácil de introducir aquellas nociones es por medio de una “distancia” entre los puntos del conjunto. Aceptamos esta noción intuitivamente y sólo observamos que no siempre es posible definir una distancia entre los puntos de un espacio. Si lo es, el espacio se llama *métrico*. El espacio métrico más simple es el espacio euclidiano, siendo métricos también sus subconjuntos.

Sea entonces A un espacio métrico. De la manera usual se define la noción de convergencia de una sucesión de puntos $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ de A así como su límite a . Considérese una transformación del espacio A en el espacio B , o sea una función T definida sobre A , con valores en B . Se dice que T es *continua* si a cualquier sucesión convergente $a_1, a_2, \dots$ con límite a_0 en A , corresponde una sucesión $Ta_1, Ta_2, \dots$ que también es convergente y cuyo límite es Ta_0 .

Sea T una relación biunívoca (a cada a de A corresponde un y sólo un $b = Ta$ de B , y cada b de B es un Ta). La transformación que a cada b le hace corresponder el a tal que $Ta = b$, define la transformación inversa T^{-1} de T .

Ahora bien, si entre A y B existe una transformación biunívoca tal que tanto T como T^{-1} son continuas, T se llama *transformación topológica* de A en B , y se dice que A y B son *topológicamente equivalentes u homeomorfos*.

Ejemplos. La proyección ortogonal π de un plano euclideo P sobre una recta R de P es continua pero no topológica.

Sea S una esfera de dimensión 2, y F la superficie de un cubo concéntrico con S . Entonces, la proyección radial de S en F es *topológica* o sea, es un *homeomorfismo*.

Son topológicamente equivalentes los siguientes pares de espacios:

El interior de la n -esfera y el interior del n -cubo; estos espacios se llaman *n -celdas*; la 1-celda es un arco.

La n -esfera y la frontera del n -cubo; estos espacios se llaman *n -esferas topológicas*.

La 2-esfera euclidea, de dimensión 2, y cualquier superficie cerrada convexa.

Tómese la superficie de un disco con $p > 0$ agujeros, es ésta una superficie F_p , no equivalente a la esfera. Esto se comprende de la siguiente manera: en la esfera, cada camino cerrado la divide en dos conjuntos *ajenos* (este es el famoso teorema de Jordán), y esta propiedad, que es topológica o sea invariante en las transformaciones topológicas, no es cierta para F_p . En general, si $p \neq q$, entonces F_p y F_q no son equivalentes.

Observemos aquí que el problema fundamental de la topología es reconocer si dos espacios dados son topológicamente equivalentes o no. Vale decir, definir las clases de espacios topológicamente equivalentes. Expresando el problema en esta forma tan general, estamos actualmente bien lejos de haberlo resuelto. La solución es bien conocida para el círculo (caso trivial), para las superficies y para las n -esferas con $n \geq 5$ (resultado muy reciente del joven matemático americano Stallings para $n \geq 7$, y de Stallings-Adams, inglés este último, para $n = 5, 6$).

La topología en su forma descripta hasta aquí, o sea la topología pura, se llama *topología de conjuntos*. Ha tenido un papel muy importante en la aclaración de muchos conceptos geométricos. Me refiero

especialmente a la noción de dimensión, cuya idea general, bastante vaga, ha sido elucidada por completo siguiendo un método iniciado por Poincaré. Menger y Urysohn crearon toda una teoría de la dimensión; mediante esta teoría ha sido posible, por ejemplo, aclarar de manera definitiva la noción de curva.

Regresamos a la afirmación de que todas las teorías matemáticas son combinaciones, por partes, de álgebra y de topología. Observemos las dos ramas fundamentales: el análisis y la geometría.

Está claro que en una teoría analítica cualquiera, con variables reales o complejas, ecuaciones diferenciales, etc., se utilizan las operaciones algebraicas comunes, de modo que la existencia de una componente algebraica de toda la teoría es obvia. Por otra parte se introduce continuamente la noción de límite, ya sea como series o con las definiciones de derivada e integral; aquí está, pues la "componente topológica". Es probablemente mucho más evidente la incidencia de razonamientos topológicos, con la introducción de las superficies de Riemann y sus generalizaciones, o con la teoría, tan en boga actualmente, de los espacios de Banach. Hay un signo evidente: hace relativamente poco, los "analistas" no conocían la mayor parte de la topología, o, al menos, parafraseando a Mr. Jourdain, de Moliere, hacían topología sin saberlo. Todo esto ha pasado, y actualmente no existe analista activo que no utilice abiertamente una gran cantidad de nociones topológicas.

En el dominio geométrico, la parte topológica salta mucho más a la vista que la parte algebraica. Teorías como la geometría diferencial o la topología en sentido estricto, tienen evidentemente una fuerte componente topológica. Veamos un poco más de cerca lo que pasa, por ejemplo, con la geometría euclidiana.

Se puede decir que la geometría euclidiana de dimensión n consiste fundamentalmente en el estudio de colecciones de n coordenadas reales $x_1, \dots, x_n$ llamadas puntos, o también vectores x de componentes x_i , sujetos a transformaciones del tipo

$$(1) \quad y = P x + a$$

donde P es una matriz $n \times n$, con la propiedad

$$(2) \quad P P' = E_n$$

siendo P' la traspuesta de P , mientras E_n es la matriz unidad de $n \times n$.

Visto en esta forma, la componente algebraica aparece claramente. Pero la condición (2) es equivalente a esta otra: que la distancia $\sqrt{\|x - x^*\|}$ entre los puntos x, x^* sea invariante a través de las transformaciones (1). Es el estudio de las propiedades que mantienen "rígido" a un cuerpo: rotaciones y traslaciones. Aquí es la parte topológica la que aparece con claridad.

Nótese que las transformaciones definidas por (1) constituyen un grupo: el grupo de los desplazamientos en el espacio n -dimensional.

Algunas teorías geométricas son de naturaleza puramente algebraica. Consideremos, por ejemplo, un espacio A con las mismas coordenadas n -dimensionales, pero sujeto a transformaciones del tipo (1) donde los elementos de la matriz P pertenecen a un campo cualquiera F , con la única condición de que el determinante $|P| \neq 0$. Esto origina la *geometría afín sobre el campo F* , cuya naturaleza es puramente algebraica.

Mencionemos aquí el desarrollo, durante este siglo y principalmente por los esfuerzos de Zariski, de la geometría algebraica en sentido estricto, como un capítulo del álgebra moderna. Existe, al lado de ésta, también la geometría algebraica como capítulo del análisis, con métodos bien distintos y sobre todo con una mezcla de topología y álgebra.

Posiblemente el hecho más sobresaliente sea, que el progreso de la topología haya necesitado de la ayuda muy intensa del álgebra, habiéndose desarrollado de este modo una *topología algebraica*. Finalmente, durante este siglo se usan cada vez más nociones topológicas en el álgebra, habiéndose desarrollado recientemente, nada menos que una teoría de *álgebra topológica*.

Regresemos a la topología algebraica para describir, de la manera más breve, como penetró el álgebra en el santuario de la topología. Como "culpable" de ello debe mencionarse a Poincaré.

Para simplificar, consideremos un poliedro π de dimensión dos, constituido por un número finito de triángulos $t_1, \dots, t_a$, de lados $l_1, \dots, l_a$ y de vértices $v_1, \dots, v_j$. Escribamos, con Poincaré, las "relaciones de frontera"

$$(3) \quad \partial l_i = \sum p_{ij} v_j$$

donde p_{ij} vale 1 si el vértice v_j pertenece al lado l_i , 0 en caso contrario. De modo que entre los números $p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{ia}$ sólo dos son iguales a 1, siendo los restantes 0.

Análogamente, escribamos

$$(4) \quad \partial t_k = \sum q_{mk} l_m$$

con tres de los q_{km} iguales a 1 y los demás a 0. De esta manera los coeficientes p_{ij} , q_{km} pertenecen al campo F de dos elementos 0, 1.

Tenemos entonces: las combinaciones lineales de la forma $\sum x_i l_i$, donde x_i pertenece a F , son los elementos para los cuales se puede escribir

$$(5) \quad \partial \sum x_i l_i = \sum x_i p_{ik} v_k.$$

De los elementos así obtenidos, los más notables son los llamados *ciclos*, que son aquellos $\gamma = \sum x_i l_i$, cuya frontera $\partial \gamma = 0$. Análogamente, para las caras del poliedro, escribamos

$$(6) \quad \partial \sum y_k t_k = \sum y_k q_{kn} l_n = \delta.$$

Se demuestra que si δ es de esta forma (vale decir es la frontera de algún complejo), entonces su propia frontera es nula, o sea es un ciclo. Más general, se dice que δ es equivalente a cero si es frontera de algún complejo.

Vemos que, en sentido algebraico, los complejos γ forman un campo vectorial sobre F , llamado grupo de homología unidimensional $H^1(\pi, F)$ de π sobre F . Su dimensión es el llamado número de Betti $R^1(\pi, F)$ de dimensión 1, de π sobre F . Se definen así varios grupos de homología, relativos a varios F , con números de Betti asociados. La propiedad fundamental, demostrada por primera vez por J. W. Alexander, es que los números de Betti son invariantes topológicos. Para la superficie del doble disco con p agujeros, $R^1 = p$, y en particular para la esfera es $R^1 = 0$. El papel que aquí juega el álgebra es evidente.