SUR QUELQUES RESULTATS ET PROBLÉMES CONCERNANT LA CONVERGENCE ET LA SOMMABILITÉ DES SERIES ORTHOGONALES GÉNÉRALES

par GEORGES ALEXITS
(Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina)

Etant donné un système arbitraire $\{ \varphi_n(x) \}$ de fonctions orthogonales et normées, définies dans un intervalle fini (a, b), on peut envisager les problèmes de la convergence et de la sommabilité presque partout d'une série orthogonale générale

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n(x) \qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty \right) \qquad [1]$$

sous diverses aspects: 1.° D'abord, on peut chercher des conditions suffisantes portant uniquement sur l'ordre de grandeur des coefficients c_n. 2.° On peut restreindre la choix du systême en exigeant que les fonctions de Lebesgue appartenant à une méthode linéaire soient bornées. 3.° On peut exiger préalablement que le système $\{ \varphi_n(x) \}$ possède certaines propriètès d'approximation et d'en tirer les conséquences quant à la convergence presque partout.

Nous allons résumer quelques résultats récents et relever quelques problèmes importants, ouverts à présent, concernant ces recherches.

1.° Un problème connu, traité par Menchoff, Orlicz et, récemment, par moi-même est le suivant: sous quelles conditions est convergente presque partout la série [1], si on range ses termes d'une façon arbitraire. (Bien entendu, l'ensemble de mesure nulle où [1] est divergent peut varier avec l'ordre des termes.) Une condition assez faible, mais bien simple est due à Menchoff et Orlicz d'après lequel

$$\sum_{n=0}^{\infty} | C_n |^{2-\varepsilon} < \infty \qquad (\varepsilon > 0)$$

est suffisante. Or qu'est ce qu'il arrive, si le nombre fix $\varepsilon > 0$ varie avec n, c'est à dire que ce n'est que la condition

$$\sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^{2-\alpha_n} \qquad (\alpha_n \geqq \alpha_{n+1} > 0)$$

qui est remplie? Une réponse est contenu dans le théorème suivant que nous avons démontré en 1958:

Si l'on a, pour un $\varepsilon > 0$,

$$\alpha_n \geqq (4 + \varepsilon) \frac{\log \log n}{\log n},$$

la série [1] *converge presque partout en tout ordre de ses termes; mais si*

$$\alpha_n \leqq (4 - \varepsilon) \frac{\log \log n}{\log n},$$

il existe une série orthogonale partout divergente, malgré que ses coefficients satisfont à la condition $\sum |C_n|^{2-\alpha_n} < \infty$.

Ainsi, on est conduit au problème suivant: les nombres

$$\alpha_n = 4 \frac{\log \log n}{\log n}$$

forment-ils une suite qui engendre la convergence ou ce n'est pas le cas? Nous ne connaissons pas la réponse à cette question.

La situation devient encore plus compliquée, si on se demande: est ce que le terme $\log \log 1/C_n^2$ doit-il figurer nécessairement dans la condition

$$\sum_{n=N}^{\infty} C_n^2 (\log \log 1/C_n^2)^{1+\varepsilon} \log^2 1/C_n^2 < \infty$$

dont la suffisance pour la convergence presque partout de [1] en tout ordre de ses termes a été démontré, déjà en 1927, par Orlicz? On en connait encore moins la réponse. Moi-même, j'ai obtenu une réponse partielle bien faible: *si les coefficients* C_n *forment une suite positive et monotone tendant vers zéro, la condition*

$$\sum_{n=N}^{\infty} C_n^2 \log^2 1/C_n^2 < \infty \qquad [2]$$

suffit pour la convergence presque partout de la série [1] *et cette condition est même nécessaire, si les C_n forment une suite convexe.* La difficulté de résoudre le problème général consiste dans ce que l'on ne sait rien sur la nécessité de [2] dans le cas général.

Un autre problème de ce genre est soulevé par le théorème très important suivant, dû à Menchoff (1940):

Etant donné méthode permanante de sommation linéaire (T)

$$\sum_{n=N}^{\infty} \alpha_{nk}\, C_k\, \varphi_k(x) \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

dont la matrice $\| \alpha_{nk} \|$ *satisfait à la condition*

$$\lim_{n \to \infty} \max_{k} | \alpha_{nk} | = 0,$$

on peut ranger le système $\{ \varphi_n(x) \}$ *en un ordre* $\{ \varphi_{\nu_n}(x) \}$ *tel que la série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_{\nu_n}(x) \qquad [3]$$

soit presque partout sommable (T) *sous la seule condition* $\sum C_n^2 < \infty$

Tout système orthonormal possède donc un "bon ordre" quant à la sommation linéaire (T) donnée d'avance et cet ordre est indépendant de la choix des coefficients C_n, pourvu que $\sum C_n^2 < \infty$. Il est aisé à démontrer que l'on peut ranger le système $\{ \varphi_n(x) \}$ en un ordre tel que les sommes partielles $s_n(x)$ de la série [3] croissent plus lentement qu'une suite arbitraire préalablement donné

$$\{ \lambda_n \}, \quad \text{si} \quad \lambda_n \longrightarrow \infty.$$

Le problème non résolu est le suivant: peut-on ranger les termes de la série [1] dans un ordre *dépendant* de la choix des coefficients C_n ainsi que la série $\sum C_{\nu_n} \varphi_{\nu_n}(x)$ converge presque partout, pourvu que $\sum C_n^2 < \infty$? Si la réponse en était affirmative, l'existence d'une fonction $f \in L^2$ serait assurée telle que sa série de Fourier diverge presque partout en un certain ordre de ses termes, tandis que, dans un autre ordre, elle converge presque partout. En effet, Kolmogoroff a annoncé, en 1927, d'avoir construit une série de Fourier d'une fonction $f \in L^2$ divergente presque partout dans un certain arrangement de ses termes. Cet exemple n'était jamais publié, mais un jeune mathématicien polonais, Zahorski, a réussi, récemment, de construire un exemple semblable.

S'il s'agit de la sommation $(C, 1)$ de la série [1] sans changement de l'ordre des termes, on ne connaît que deux critères généraux portant uniquement sur l'ordre de grandeur des coefficients C_n:

A) *La condition*

$$\sum_{n=3}^{\infty} C_n^2 (\log \log n)^2 < \infty$$

entraîne la sommabilité $(C, 1)$ *presque partout de la série* [1] (Menchoff et Kaczmarz, 1927).

B) *Une autre condition de ce genre est*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{C_{2^n+1}^2 + C_{2^n+2}^2 + \ldots + C_{2^{n+1}}^2} < \infty$$

(Alexits, 1953).

On voit aisément que ces deux conditions sont indépendantes, c'est à dire qu'aucune n'entraîne pas l'autre. Ce qui est curieux, c'est qu'on a pu constater que toutes les deux conditions rendent plus qu'il ne faudrait. En effet, appelons la série [1] sommable $(C, 1)$ en sens très fort, s'il existe une fonction $f \in L^2$ telle que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} [f(x) - s_{\nu_k}(x)]^2 \longrightarrow 0$$

presque partout pour toute choix des indices $\nu_1 < \nu_2 < \ldots$. Tandori a démontré récemment que la condition A) entraîne la sommabilité presque partout même en sens très fort. En ce qui concerne la condition B), Tandori a démontré qu'elle est nécessaire et suffisante pour que la série orthogonale [1] soit absolument sommable $|C, 1|$ presque partout.

On en est donc conduit au problème suivant: trouver une condition de sommabilité presque partout $(C, 1)$ portant uniquement sur l'ordre de grandeur des coefficients C_n qui n'entraîne ni la sommabilité en sens très fort, ni la sommabilité absolue $|C, 1|$. Il n'est pas tout à fait exclu qu'une telle condition n'existe pas.

2.° Passons au problèmes dans lesquels l'ordre de grandeur des fonctions de Lebesgue jouent un rôle. Désignons par

$$K_n(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} \varphi_k(t) \varphi_k(x)$$

le noyau appartenant à une sommation linéaire (T) ayant la matrice $||\alpha_{nk}||$. On sait que, *s'il s'agit d'une sommation de Cesàro* (C, α) *dont les fonctions de Lebesgue*

$$L_n(x) = \int_a^b |K_n(t, x)| \, dt$$

satisfont à la condition $L_n(x) = 0(\lambda_n)$ *où* $0 < \lambda_n \leqq \lambda_{n+1} \rightarrow \infty$, *la série* [1] *est presque partout sommable* $(C, 1)$, *pourvu que* $\sum C_n^2 \lambda_n < < \infty$. Ce théorème démontré par Kaczmarz (1930) est bien applicable à la recherche de différentes séries orthogonales. Ainsi p. ex. Freud a démontré (1952) le théoréme suivant:

Si $\{ \varphi_n(x) \}$ *désigne le système complet des polynômes orthogonaux engendrés par une fonction de poids* $\rho(x) \geqq 0$ *ayant la propriété* $\rho(x) \geqq \rho_0 > 0$, *la série* [1] *est presque partout sommable* $(C, 1)$, *pourvu que* $\sum C_n^2 < \infty$.

Or on ne sait que très peu de ce qui se passe, lorsque les fonctions de Lebesgue appartenant à une sommation linéaire (T) quelconque restent bornées dans leur ensemble. Il nous semble que le théorème de Kaczmarz conserve sa validité même dans ce cas générale, mais ce problème n'est pas résolu. Ce n'est que la sommation logarithmique pour laquelle Meder a obtenu (1959) la réponse affirmative. Mais il existe un résultat de caractère négatif, mais bien important. C'est que *la condition* $\sum C_n^2 \lambda_n < \infty$ *figurant dans le théorème de Kaczmarz ne peut pas être améliorée, même s'il ne s'agit que de la sommation* (C, α) *d'un ordre quelconque.* (Tandori, 1959).

On peut démontrer aisément que même les fonctions de Lebesgue

$$L_n(x) = \int_a^b \left| \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(t) \, \varphi_k(x) \right| dt$$

peuvent élucider le problème de la sommation $(C, \alpha > 0)$. En effet, si seulement les $L_{2^n}(x)$ d'ordre 2^n sont bornés dans leur ensemble, la série [1] est presque partout sommable (C, α) pour tout α positif (Alexits, 1953). Ce lemme a des conséquences dont la connexion avec la théorie de la probabilité est évidente. Introduisons, à ce but, la notion du système multiplicativement orthogonal de la voie suivante: si $2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \ldots + 2^{\nu_m}$ est la représentation dyadique du nombre naturel n, posons

$$\Psi_0(x) = 1, \qquad \Psi_n(x) = \prod_{k=1}^{m} \varphi_{\nu_k+1}(x) \qquad (n \geqq 1),$$

et nous appelons $\{ \varphi_n(x) \}$ un *système multiplicativement orthogonal,* si ces $\Psi_n(x)$ forment un système orthogonal en sens commun. On démontre d'abord que, *si* $| \varphi_n(x) | \leqq 1$ *et les fonctions* $\Psi_n(x)$ *sont normées, la série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \Psi_n(x)$$

est presque partout sommable $(C, \alpha > 0)$, *pourvu que* $\sum C_n^2 < \infty$. On en tire bien de conséquences dont nous ne relevons que la suivante (Alexits et Tandori, 1960):

Si $\{ \varphi_n(x) \}$ *est un système de fonctions multiplicativement orthogonales, normées et bornées, la série* $\sum C_n \varphi_n(x)$ *est presque partout convergente, quelque soit l'ordre de ses termes, pourvu que* $\sum C_n^2 < \infty$.

C'est le meilleur résultat possible, parce que, d'après une généralisation immédiate d'un théorème de Zygmund (1930), la série $\sum C_n \varphi_n(x)$ n'est sommable par aucune méthode linéaire permanente, si $\sum C_n^2 = \infty$. Une conséquence intéressante de notre théorème est que *la série de Fourier lacunaire*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \nu_n x + b_n \sin \nu_n x) \qquad \left(\frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} \geqq q > 1\right)$$

est presque partout convergente en tout ordre de ses termes, si et seulement si $\sum (a_n^2 + b_n^2) < \infty$. C'est une généralisation du théorème connu concernant la convergence des séries trigonométriques lacunaires.

3.° Ce sont surtout les développements suivant des polynômes orthogonaux dont les propeiétés d'approximation donnent lieu à des conséquences concernant leur convergence ou sommabilité presque partout. Soit $\{ p_n(x) \}$ le système complet des polynômes orthogonaux et normés engendrés par une distribution non-négative $d\mu(x)$ et désignons par

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_n p_n(x) \tag{3}$$

le développement de la fonction $f(x)$ suivant les polynômes $p_n(x)$. Quant à la convergence presque partout de [3], on connaît les résultats suivants:

Soit $\omega(f, \delta)$ *le module de continuité de* $f(x)$ *et* $\Phi(x) > 0$ *une fonction croissante définie pour* $x > 1$ *telle que*

$$\omega(f, \delta) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi(1/\delta)}}\right).$$

Le développement [3] *converge presque partout, si*

$$\int_1^\infty \frac{\log x}{x\,\Phi(x-1)}\,dx < \infty \quad \text{(Kolmogoroff, 1934)}$$

ou, si $\{p_n(x)\}$ *est borné, il suffit déjà que*

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\,\Phi(x-1)} < \infty \quad \text{(Alexits-Králik, 1957).}$$

Le développement [3] *converge presque partout en tout ordre de ses termes, si*

$$\int_2^\infty \frac{(\log\log x)^{1+\varepsilon}\log x}{x\,\Phi(x-1)}\,dx < \infty \quad \text{(Ulianov, 1956).}$$

Si l'on a

$$\int_2^\infty \frac{\log\log x}{\Phi(x-1)\,x\log x}\,dx < \infty,$$

le développement [3] *est presque partout sommable* (C, α) *pour tout* $\alpha > 0$.

Il serait bien important de savoir, si ces critères de convergence portant sur la structure de la fonction continue $f(x)$ peuvent être améliorés et jusqu'à quel degré. En premier lieu, on demande, évidemment, s'il existe un système $\{p_n(x)\}$ tel que le développement [3] d'une fonction continue peut diverger sur un ensemble de mesure positive. Malhereusement, ce problème prête des difficultés aussi grandes que la question analogue posée pour les séries de Fourier des fonctions continues. Ainsi, on a peu d'espérance de le résoudre en toute généralité. Mais, même des solutions particulières auraient un certain intéret.