RESULTADOS VIEJOS Y NUEVOS EN LA TEORIA DE LAS PARTICIONES

por E. GROSSWALD

1. La teoría de las particiones es ya bastante vieja, ya que los matemáticos han considerado tales problemas desde hace más de dos siglos. A pesar de eso, durante los últimos años, se hicieron importantes progresos y tuvo lugar un nuevo florecimiento de esa teoría. Nos ocuparemos en primer lugar de estos adelantos recientes; pero, para su mejor comprensión, es conveniente hacer por lo menos una breve mención de métodos y resultados clásicos.

2. Sea $A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \}$ un conjunto cualquiera, finito o infinito de números enteros. Se llama partición de un entero n en elementos de A, cualquier suma $a_1 + a_2 + \ldots + a_r = n$, $a_j \varepsilon A$. Dos particiones que difieren solamente en el orden de los sumandos, no se consideran distintas; si hacemos distinciones según el orden, hablamos de "representaciones" más bien que de particiones. Se sigue que podemos escribir una partición también cómo $k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_ra_r = n$, con k_j enteros naturales o cero. Formalmente definimos el número de particiones de n en elementos de A, por $p_A(n) = \sum\limits_{k_1 a_1 + \ldots + k_r a_r = n} 1$.

Sea $d = (a_1, a_2, \ldots)$ el máximo común divisor de los elementos de A. Si $d > 1$ está claro que $p_A(n) = 0$ para cualquier $n \not\equiv 0 \pmod{d}$, por grande que fuera n. Pero, si $d = 1$, existe un $N = N(A)$ tal que para $n \geqq N$, $p_A(n) > 0$ (véase [1]). Si $A = I$, el conjunto de todos los números naturales, escribimos $p(n)$ en vez de $p_I(n)$. Así, por ejemplo, observando que $5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, resulta que $p(5) = 7$. Además de estas particiones ordinarias, pueden definirse particiones que satisfagan condiciones adicionales, cómo, por ejemplo, cotas para el número, o el tamaño de los sumandos, o para las diferencias de los sumandos, etc. Así, puede pedirse, que los sumandos sean distintos —en símbolos, $| a_j - a_i | \geqq 1$ para $j \neq i$—; o que el tamaño de los sumandos sea $\leqq n^{1/2}$, etc. Estas condiciones no son todas independientes; de hecho, a cualquier partición corresponde una partición "conjugada" en la cual el número de los sumandos y el tamaño de la parte mayor se hallan intercambiados. Así las particiones $3 + 2$ y $2 + 2 + 1$ son conjugadas; también $4 + 1$ y $2 + 1 + 1 + 1$, cómo resulta de los esquemas

$$\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & 3 \\ & & & + \\ \cdot & \cdot & & 2 \\ \\ & 2+2+1 & & \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4 \\ & & & & + \\ \cdot & & & & 1 \\ \\ & 2+1+1+1 & & & \end{array}$$

3. Cabe preguntarnos por qué matemáticos célebres han estudiado tan afanosamente la teoría de las particiones, puesto que su utilidad en las ciencias aplicadas y aún en otras ramas de las matemáticas es más bien escasa. Quizás el interés de los matemáticos se explique más bien por el hecho de que, por un lado los problemas son muy difíciles, constituyendo un verdadero reto a la ingeniosidad humana, mientras que, por el otro lado, no son inabordables.

Del hecho que los problemas de particiones no sean triviales nos convencemos inmediatamente si intentamos calcular directamente $p\,(100)$, por ejemplo, aunque $n = 100$ es todavía un número relativamente pequeño. Si estamos en condiciones de atacar con éxito estos problemas, eso se debe al descubrimiento por Euler de un método idóneo. Este consiste en la observación de que $p\,(n)$ tiene una función generadora muy sencilla, a saber

$$F\,(x) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m)^{-1} = \prod_{m=1}^{\infty} (1 + x^m + x^{2m} + \ldots + x^{km} + \\ + \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k_1.1 k_2.2 + \ldots = n} 1 = \sum_{n=0}^{\infty} p\,(n)\, x^n.$$

(con $p\,(0) = 1$, por definición).

También el recíproco de $F\,(x)$, o sea $\phi\,(x) = F\,(x)^{-1}$, tiene algunas propriedades interesantes. Así, escribiendo $\phi\,(x) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m)$ $= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, para $n = \frac{1}{2} (3\,\lambda - 1)\,\lambda$, es $b_n = (-1)^\lambda$, mientras que $b_n = 0$ para los demás n. Este es el contenido del famoso teorema de los números pentagonales. $\phi(x)$ es una función "theta" (el exponente de x es un polinomio de segundo grado), mientras que, poniendo $x = e^{2\pi i \tau}$, $F(x) = F(e^{2\pi i \tau}) = f(\tau)$ es una función "modular", reducible (véase [7]) a la función $\eta(\tau)$ de Dedekind.

Funciones, y más generalmente formas modulares $g(\tau)$, se caracterizan por la propiedad de que si se opera la substitución

$$\tau \longrightarrow \tau' = (a\tau + b)/(c\tau + d), \ ad - bc = 1, \tag{1}$$

entonces $g(\tau') = (c\tau + d)^r \, \varepsilon(a, b, c, d) \, g(\tau)$, con $|\varepsilon(a, b, c, d)| = 1$. Aquí $-r$ se llama la dimensión y, si $r = 0$ hablamos de funciones, si $r \neq 0$ de formas modulares. Las transformaciones [1] forman un grupo Γ (operación : composición) isomórfico al grupo de las matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad - bc = 1$ (operación: multiplicación matricial), considerando módulo el subgrupo normal $(E, -E)$, con $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ese grupo Γ se llama el grupo modular inhomogéneo y desempeña un importante papel, tanto en la teoría de las particiones, cómo también en varias otras ramas de las matemáticas.

Cronológicamente, el estudio de las particiones puede dividirse en varios períodos, a saber:

a) período clásico: Euler, Jacobi;
b) período intermedio: Laguerre, Sylvester, Cayley, Glaisher, MacMahon, Franklin;
c) apogeo: Hardy, Ramanujan, Rademacher, Knopp (Hecke);
d) período contemporáneo.

4. Sin usar el aparato poderoso de la teoría de las funciones de variable compleja, matemáticos desde Euler hasta Hardy han logrado obtener fórmulas de una elegancia increíble, por métodos elementales.

He aquí unos ejemplos. Identificando coeficientes en la multiplicación formal $F(x) \cdot \phi(x) = \sum_n p(n) x^n \cdot \sum_m b_m x^m = 1$, se obtiene la relación de recurrencia

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + \dots$$

(aquí 1, 2, 5, 7, ... son los números pentagonales).

De la relación $F'(x) = (1/\phi(x))' = -(\phi'/\phi) F$ se obtiene de la misma manera:

$$n\, p(n) = p(0)\, \sigma_1(n) + p(1)\, \sigma_1(n-1) + \ldots + p(n-1)\, \sigma_1(1),$$

en donde $\sigma_1(m)$ es la suma de los divisores de m. Denotando por $p_r(n)$ el número de las particiones tales que la parte mayor no exceda r, es fácil ver que $p_r(n) = p_{r-1}(n) + p_r(n-r)$ y, por inducción en n,

$$p_r(n) = p_{r-1}(n) + p_{r-1}(n-r) + p_{r-1}(n-2r) + \ldots \qquad [2]$$

También, para $r = 1$, $p_1(n) = 1 = \{ r n^{r-1}/(r!)^2 \}_{r=1}$, de modo que

$$p_r(n) \geqq n^{r-1}/r!\,(r-1)! \qquad [3]$$

vale para $r = 1$. Usando [2] puede completarse la prueba por inducción de que [3] vale para todo r. También es claro que $p(n) \geqq \geqq p_r(n)$ para cualquier r, de modo que $p(n) \geqq \max\limits_{r} p_r(n) \geqq \max\limits_{r}$ $n^{r-1}/r!\,(r-1)! > \max\limits_{r} n^{r-1}(r!)^{-2} \geqq \{n^{r-1}(r!)^{-2}\}_{r=n^{1/2}} \simeq e^{2\sqrt{n}}/2\pi\, n^{3/2}$, en donde hemos hecho uso de la fórmula de Stirling para los factoriales. Conviene observar que esta cota inferior (que aún puede mejorarse sin dificultad) está bastante cerca del resultado exacto. Eso se debe a que $n^{r-1}/r!\,(r-1)!$ aproxima muy bien a $p_r(n)$, aunque lo hemos obtenido antes solamente como su cota inferior. Para comprobarlo, basta observar con Laguerre [13], que $F_r(x) = \prod\limits_{m=1}^{r} (1-x^m)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_r(n)\, x^n$, la función generadora de las $p_r(n)$, es una función racional. Su descomposición en fracciones parciales es

$$F_r(x) = \frac{A_r}{(1-x)^r} + \frac{A_{r-1}}{(1-x)^{r-1}} + \ldots + \frac{A_1}{1-x} + $$
$$+ \sum_i \sum_j \alpha_i^{(j)} (1-\zeta_i x)^{-j}, \qquad [4]$$

con $i \leqq r$, $j \leqq r/2$ y en donde ζ_i es una raíz de orden i de la unidad.

Desarrollando los binomios, resulta que el coeficiente de x^n es $p_r(n) = \{ A_r n^{r-1}/(r-1)! \}\,(1 + 0\,(n^{-1}))$ y observando que $A_r = = 1/r!$ se completa la prueba de que

$$p_r(n) = \frac{n^{r-1}}{r!\,(r-1)!}\,(1 + 0\,(n^{-1})),$$

que es lo que queríamos demostrar.

Este mismo método da resultados para cualquier conjunto finito $A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_r \}$ a condición que $(a_1, a_2, \ldots, a_r) = d = 1$. Si $d > 1$, varias raíces del denominador de $F(x)$ tienen la misma multiplicidad y el método fracasa, lo que no es sorprendente, puesto que ya sabemos que en este caso $p_A(n) = 0$ para $n \not\equiv 0 \pmod{d}$.

Pero, si $d = 1$, obtenemos

$$p_A(n) = \frac{n^{r-1}}{(r-1)!\, a_1 a_2 \ldots a_r} (1 + 0\,(n^{-1})). \qquad [5]$$

5. Nuevos adelantos en la teoría de las particiones fueron logrados con el empleo, por Hardy y Ramanujan de métodos de variables complejas. En 1917 ellos demostraron [6] un importante teorema Tauberiano, que les permitió mostrar que $\log p(n) \sim 2\pi \sqrt{n/6}$. Del mismo modo, si $A = P$, el conjunto de los números primos, resulta que $\log p_P(n) \sim 2\pi \sqrt{n/\log n^3}$. Pero, no es fácil pasar del logaritmo a $p(n)$, o a $p_P(n)$ mismo. Si $\log p(n) = 2\pi\sqrt{n/6} + o\,(n^{1/2})$, se sigue solamente que $p(n) = e^{2\pi\sqrt{n/6}} \,.\, e^{o\,(\sqrt{n})}$ y el exponente $o\,(\sqrt{n})$ puede ser muy grande, positivo o negativo. En efecto, Hardy y Ramanujan mismos lograron obtener la fórmula asintótica

$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}\, n}\, e^{2\pi\sqrt{n/6}}. \qquad [6]$$

Cabe comparar el valor exacto de

$$\log p(n) = (2\pi/\sqrt{6} + o\,(1))\, n^{1/2} \cong 2.56 \ldots n^{1/2},$$

obtenido por sofisticados métodos Tauberianos, con la cota inferior, $\log p(n) > 2\, n^{1/2}$, obtenida antes por razonamientos sencillísimos.

Para $p_P(n)$ no se conoce ninguna fórmula análoga a [6] y, por razones que veremos, hay dudas legítimas de que tal fórmula pueda existir.

Para lograr resultados como [6] y otros, aún mucho mas exactos, la idea fundamental es sencilla. Como $F(x) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m)^{-1}$ converge al interior de $C_0(\,|x| = 1)$, tómese una curva C_r sencillamente cerrada, al interior de C_0; por el teorema de Cauchy,

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(x)}{x^{n+1}}\, dx.$$

Pero el procedimiento es difícil, porque $F(x)$ es una función complicada, muy difícil de calcular para $x \neq 0$ y que tiene una infinidad de polos, que forman un conjunto denso sobre C_0. Mas observamos que estos polos forman un conjunto numerable y que $\lim_{|x| \to 1} F(x) = 0$ en la mayor parte de la periferia de C_0. Por eso puede tratarse de calcular la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(x)}{x^{n+1}}\, dx$$

sucesivamente, sobre curvas C_n que se acercan más y más a C_0. Cuando esas curvas se acercan a los polos de $F(x)$, hacemos deformaciones locales suficientes, para tener el integrando razonablemente pequeño. Así se obtiene una suma de términos, siendo cada uno el límite de las integrales tomadas sobre las deformaciones locales cuando hacemos $C_n \to C_0$. Esa suma tiene el carácter de una serie asintótica. Por eso fué una sorpresa, cuando Hardy y Ramanujan descubrieron que la serie podía representar $p(n)$ con un error $0(n^{-1/4})$, o sea, para n suficientemente grande, exactamente, puesto que $p(n)$ es un entero. El misterio fué aclarado por los trabajos de Rademacher [21] en 1937, quien, modificando ligeramente el método, logró obtener una representación de $p(n)$ por medio de una serie convergente.

La serie original de Hardy y Ramanujan pudo demostrarse que era efectivamente divergente. La fórmula de Rademacher es

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\, k^{1/2} \frac{d}{dn} \left\{ \frac{s h \frac{\pi}{k} \sqrt{\frac{2}{3}(n - 1/24)}}{\sqrt{n - 1/24}} \right\},$$

con

$$A_k(n) = \sum_{h \,(\mathrm{mod}\, k)} \exp\left\{\pi i \left(s(h, k) - 2\frac{h}{k} n\right)\right\},$$

en donde

$$s(h, k) = \sum_{\mu=1}^{k-1} \left(\left(\frac{h\mu}{k}\right)\right) \left(\left(\frac{\mu}{k}\right)\right).$$

Aquí se usa la función $((x))$ definida por

$$((x)) = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2} & \text{para } x \text{ no entero} \\ 0 & \text{para } x \text{ entero.} \end{cases}$$

Quizás no estaría de más añadir aquí que en 1937, cuando el trabajo de Rademacher apareció, el entonces muy joven matemático noruego Atle Selberg, había ya obtenido el mismo resultado. El trabajo de Selberg nunca fué publicado. Pero se sabe que allí los coeficientes $A_k(n)$ están definidos por una fórmula distinta de la de Rademacher. La demostración que las dos expresiones representan la misma función (una es el desarrollo en serie de Fourier finita de la otra) se debe a A. Whiteman [23].

El resultado de Rademacher resuelve en modo completo y muy satisfactorio un importante problema clásico, planteado por Euler, y puede decirse que eso pone fin a un capítulo.

6. Lo que sigue se refiere a desarrollos contemporáneos. El método de Hardy-Ramanujan-Rademacher (que llamaremos por brevedad "método del círculo") da resultado porque la función generadora $F(x)$ es modular con respecto al grupo Γ y porque es posible hacer uso de esta modularidad para demostrar, mediante las "divisiones de Farey", que $F(x)$ es "pequeño" cuando $|x| \longrightarrow 1$, para casi todos los argumentos.

Pero esas condiciones están satisfechas por las funciones generadoras de particiones mucho más generales que las consideradas hasta ahora, aunque esas funciones, en general, quedan (relativamente) invariantes solamente con respecto a ciertos subgrupos G de Γ. En general, los G son "subrupos de congruencias" de Γ y es un hecho bien conocido que el índice Γ/G es finito. Esas ideas han sido usadas por Lehner [14], para obtener representaciones de $p_A(n)$, por medio de series convergentes (del tipo de las de Rademacher) en los dos casos:

$$a \in A_1 \longleftrightarrow a \equiv 1{,}4 \pmod 5 \quad \text{y} \quad a \in A_2 \longleftrightarrow a \equiv 2{,}3 \pmod 5).$$

Se observa que en ambos conjuntos A_1 y A_2, si a es un elemento, también 5-a lo es; llamaremos *simetricos* a los conjuntos que tienen esta propiedad.

Observamos también que los conjuntos A_1 y A_2 se pueden caracterizar por el carácter cuadrático de sus elementos, a saber

$$a \in A_1 \longleftrightarrow \left(\frac{a}{5}\right) = 1 \quad \text{y} \quad a \in A_2 \longleftrightarrow \left(\frac{a}{5}\right) = -1.$$

Livingood [15] generaliza el resultado de Lehner para conjuntos A, cuyos elementos son congruentes con los de $A' = \{a, p - a\}$, módulo cualquier numero primo $p > 3$. Hagis [5], en 1958, generaliza el resultado de Livingood para conjuntos A, cuyos elementos son congruentes con los de unos conjuntos finitos $A' = \{ a_1, a_2, \ldots, a_r \}$, con cualquier número r de elementos, pero simétricos módulo un número primo $p \geqq 3$ (es decir $a_i \varepsilon A' \longleftrightarrow p - a_i \varepsilon A'$). Iseki [10] generaliza en 1959 el resultado de Livingood para $A' = \{ a, n - a \}$ módulo n cualquiera (no necesariamente primo).

Mientras tanto Petersson (véanse [19] y [20]) había logrado obtener resultados muy generales que incluyen como casos particulares casi todos los resultados anteriormente logrados por el método del círculo. Su método es completamente distinto y muy poderoso. No es posible explicarlo aquí en detalle; basta decir que además de usar la teoría de las funciones, tiene también carácter algebraico y usa desarrollos de Fourier generalizados, pero no integración compleja, ni divisiones de Farey. El método de Petersson da resultados en los casos mas complicados, siempre que las particiones consideradas tengan cómo función generadora una función modular. Tal es el caso, cuando se trata de un conjunto definido por congruencias *simetricas* módulo un número primo q, es decir si $a \varepsilon A \longleftrightarrow a \equiv \pm a_1, \pm a_2, \ldots, \pm a_s \pmod q$. Ejemplos de tales conjuntos son los resíduos cuadráticos (y los no-resíduos) si, y solamente si $q = 1 \pmod 4$. Vale observar que todos los conjuntos anteriormente mencionados son precisamente de este tipo. Además de series convergentes y fórmulas asintóticas muy exactas para $p_A(n)$, Petersson obtiene como corolarios algunos resultados como los siguientes:

Pongamos

$$p_q^+(n) = p_{A_1}(n) \quad \text{para} \quad a \varepsilon A_1 \longleftrightarrow \left(\frac{a}{q}\right) = 1;$$

$$p_q^-(n) = p_{A_2}(n) \quad \text{para} \quad a \varepsilon A_2 \longleftrightarrow \left(\frac{a}{q}\right) = -1.$$

Entonces

$$\frac{p_q^+(n)}{p_q^-(n)} = \varepsilon^h \left\{ 1 - \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{3(q-1)}{9}}\, c\, \alpha_5(q)\, n^{-1/2} + O(n^{-1}) \right\},$$

adonde ε, h son la unidad fundamental y el número de clases de los ideales del campo

$$R(\sqrt{q})\ ;\ c = \begin{cases} 1/240 \text{ si } q \equiv 1 \pmod 8; \\ 1/560 \text{ si } q \equiv 5 \pmod 8), \text{ y} \end{cases}$$

$\alpha_5(q) = \sum_{t_1^2+\ldots+t_5^2=q} 1$, es decir, el número de representaciones de q como suma de cinco cuadrados.

Añadiendo la condición de que ningún sumando pueda repetirse más de f veces y notando las particiones respectivas por

$$p_q^+(n, f) \quad \text{y} \quad p_q^-(n, f),$$

se tiene:

$$\frac{p_q^+(n,f)}{p_q^-(n,f)} = 1 + \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{3(q-1)}{9}}\sqrt{\frac{f}{f+1}} \cdot f\, c\, \alpha_5(q)\, n^{-1/2} + O(n^{-1}).$$

Petersson plantea el problema de explicar la ocurrencia de los parámetros aritméticos ε, h, $\alpha_5(q)$, etc., en esas fórmulas.

7. Los adelantos logrados por el uso del método de Petersson son muy importantes, pero, para tener resultados, siempre es preciso operar solamente con conjuntos simétricos. En el caso de conjuntos A asimétricos, el primer éxito lo tuvo Meinardus [16], el cual pudo obtener fórmulas asintóticas, mediante el método del "punto de ensilladura". Para obtener alguna idea de como se pudiera proceder en el caso general, conviene considerar una vez mas el trabajo de Lehner. El logró sus resultados, a pesar del hecho de que su $f(\tau)$ era invariante solamente con respecto a G, mientras que hubo que usar todas las transformaciones $T \in \Gamma$. Esto se explica por lo siguiente: si $T \in \Gamma$, $T \notin G$, entonces $f(T\tau) \longrightarrow h(\tau)$, con h algo distinto, pero no "muy distinto" de f. Esto permite obtener la información necesaria sobre $F(x)$, cuando $|x| \longrightarrow 1$. Eso sugiere el razonamiento siguiente: puesto que el problema pudo ser manejado aún en el caso $T \notin G$, ¿no sería posible tomar subgrupos más y más pequeños en Γ? El índice Γ/G naturalmente aumentará. Nos preguntamos: ¿sería posible manejar el problema aún si el índice llega a ser infinito? ¿O aún si G estuviera reducido a la identidad? Claro está que algunas restricciones sobre $F(x) = f(\tau)$ serán necesarias para garantizar que $h(\tau)$ se comporta como lo deseamos. Este razonamiento no es muy preciso, pero sugirió un procedimiento que tuvo éxito (véase [3]). Dicho procedimiento está basado en un Lema Fundamental, la idea del cual se encuentra ya en Hayman [9] (véase también M. Wyman [15]) y que puede enunciarse cómo sigue:

Lema Fundamental. Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ regular en $|x| < 1$ y (para simplificar) real para x real. Definimos

$$a(r) = \frac{d}{d \log r} \log f(r) \quad , \quad b(r) = \frac{d}{d \log r} a(r);$$

y sea $\rho = \rho(n)$ la raíz (la única que se acerca a $r = 1$, para $n \longrightarrow \infty$) de la ecuación $a(\rho) = n$. Postulamos también que existe un $\alpha > 0$ y dos funciones $\delta = \delta(r)$ y $u = u(r)$, definidas por lo menos para $(0 \leqq) r_0 < r < 1$ y tales que

1) $\delta^2(\rho)\, b(\rho) > 2\,\alpha \log n;$

2) $\displaystyle\int_{|\theta| > \delta} |f(\rho e^{i\theta})|\, d\theta = 0\,(n^{-\alpha} f(\rho)\, b(\rho)^{-1/2});$

3) $\displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} D(\rho, \theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta = \sqrt{2\pi} f(\rho)\, b(\rho)^{-1/2} (u(\rho) + 0\,(n^{-\alpha})),$

en donde

$$D(\rho, \theta) = f(\rho e^{i\theta}) - f(\rho) \exp\left(i\,\theta\, a(\rho) - \frac{1}{2}\theta^2 b(\rho)\right).$$

Entonces

$$a_n = \frac{f(\rho)}{\rho^n \sqrt{2\pi\, b(\rho)}} \left\{ 1 + u(\rho) + 0\,(n^{-\alpha}) \right\}.$$

Usando el Lema Fundamental logra obtenerse expresiones asintóticas para $p_A(n)$, en donde ahora A puede ser un conjunto definido por congruencias (mod q), completamente arbitrarias, no solamente simétricas.

Cómo casos particulares se obtienen muchos de los resultados anteriores de Petersson, en algunos casos con un error mayor que en las fórmulas de Petersson. Las fórmulas de las razones

$$\frac{p_q^+(n)}{p_q^-(n)} \quad \text{y} \quad \frac{p_q^+(n, f)}{p_q^-(n, f)}$$

se obtienen en su forma original y además se obtienen los resultados correspondientes para el caso $q \equiv 3 \pmod 4$, a saber

$$\frac{p_q^+(n)}{p_q^-(n)} = \prod_{(a \bmod q)} \left\{ \left(\Gamma \left(\frac{a}{q} \right) \right)^{\left(\frac{a}{q}\right)} \right\} \left(\frac{12\, n}{\pi^2\, q\, (q-1)} \right)^{\frac{h}{w}} \left\{ 1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{6\, q}{q-1}}\, \frac{h}{w}\, n^{-1/2} + O\,(n^{-1}) \right\},$$

$$\frac{p_q^+(n,\, f)}{p_q^-(n,\, f)} = (f+1)^h\, (1 + O\,(n^{-1}))\,.$$

con h y w el número de clases y el de las raíces de la unidad en $R\,(\sqrt{-q})$, respectivamente; $\left(\frac{\alpha}{q}\right)$ en el exponente es un símbolo de Legendre.

8. Aúnque el carácter "casi modular" de las funciones generadoras nos había guiado en esas investigaciones, acabamos por comprender que la modularidad (que ya no existe...) desempeña un papel menor en este método. Las propiedades casi modulares de $F\,(x) = f\,(\tau)$ se usan, cuando existen, solamente para demostrar que $f\,(\tau)$ satisface la segunda condición del Lema Fundamental. Pero lo único que importa es que el Lema sea aplicable. Habiendo comprendido esto, es posible acercarse a ciertos problemas de particiones, que hasta ahora no fueron resueltos, precisamente porque sus funciones generadoras no eran modulares. Entre estos problemas, ocupa un lugar destacado el de las particiones en números primos y, más generalmente, en potencias de números primos. La función generadora es $F_P\,(x) = \prod_p (1 - x^p)^{-1}$ que no es modular; además, mientras que hasta ahora había que usar la función $\zeta\,(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ de Riemann, ahora uno se encuentra frente a $\sum_p p^{-s}$, la cual no puede continuarse en el semi-plano izquierdo, y la integración a lo largo de C_0 es imposible. Afortunadamente, si $n = p_1^k + p_2^k + \ldots + p_r^k$, entonces $p_j^k \leqq n$; se sigue que si se considera no $F_P\,(x)$, sino

$$F_{P,m}\,(x) = \prod_{p \leqq m} (1 - x^p)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{P,m}\,(n)\, x^n,$$

se da que $p_P\,(n) = p_{P,m}\,(n)$ para $m \geqq n^{1/k}$, ¡y la función $F_{P,m}\,(x)$ es racional!

En 1959 el estado de ese problema era el siguiente:

a) Hardy y Ramanujan habían obtenido en 1917,

$$\log p_P(n) \sim 2\pi \sqrt{\frac{n}{3 \log n}}$$

(véase [6];

b) Haselgrove y Temperley [8] habían estudiado $p_A(n)$ para una clase $\mathscr{A}$ de conjuntos A, bastante general; ¡pero $P \notin \mathscr{A}$! Usando argumentos especiales (solamente esbozados en su trabajo publicado) Haselgrove y Temperley concluyen que su fórmula general vale también para $A = P$. Ellos no pretenden probarlo para $A = P^k$ (conjunto de las potencias k (fijo) de números primos), ni llegan a establecer una fórmula asintótica para $p_P(n)$, sino solamente para $\log p_P(n)$, obteniendo otra vez el resultado de Hardy y Ramanujan.

c) En 1957, Mitsui [17] establece formulas para $p_{P^k}(n)$, las cuales, en el caso $k = 1$, coinciden con las de Haselgrove y Temperley. El trabajo de Mitsui parece ser la primera demostración completa, publicada, de la fórmula de Haselgrove y Temperley, en su aplicación a los números primos.

Aún los resultados de Mitsui no son completamente satisfactorios. En efecto, si n, m (y, naturalmente, k) se nos dan, queremos poder calcular una función razonablemente sencilla $\phi_k(n, m)$, tal que

$$p_{P^k,m}(n) - \phi_k(n, m) \longrightarrow 0,$$

o, por lo menos, tal que la razón

$$\frac{p_{P^k,m}(n)}{\phi_k(n, m)} \longrightarrow 1.$$

Pero, tanto Haselgrove y Temperley, cómo también Mitsui, definen una función $\psi = \psi(\alpha, A_1, A_2)$ en donde los parámetros α, A_1, A_2 dependen en modo trascendente (no algebráico) de k, n y m, y tal que $\psi / p_{P^k,m} \longrightarrow 1$. Pero, si sustituimos $\alpha = \alpha_k(n, m))$; $A_1 = A_1(k, n, m)$ y $A_2 = A_2(k, n, m)$ en ψ, obtenemos $\psi = \phi_k(n, m)\, e^g$, con $g = g(k, n, m) = o(\log \phi_k)$, pero siempre $g \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Por lo tanto, el progreso práctico, mas allá de Hardy y Ramanujan es más bien escaso. Haciendo uso de una modificación del Lema enunciado, es posible mostrar (véase [4]) lo siguiente:

a) Si la desigualdad evidente $p \leqq m \leqq n^{1/k}$ está reforzada hasta $p \leqq m \leqq n^{1/(k+3/2)} (\log m)^{1/(k+1)}$, entonces

$$p_{P^k, m}(n) = \frac{n^{\pi(m)-1}}{(\pi(m)-1)!} e^{-k\theta(m)} \{ 1 + o(1) \}$$

en donde

$$\pi(m) = \sum_{p \leqq m} 1 \quad \text{y} \quad \theta(m) = \sum_{p \leqq m} \log p$$

son las clásicas funciones de la teoría de los números. Poniendo $\pi(m) = r$, eso puede escribirse también como

$$p(n) = \frac{n^{r-1}}{(r-1)!\, 2^k 3^k \ldots p_r^k} (1 + o(1)),$$

con r definida por $p_r \leqq m < p_{r+1}$. Reconocimos aquí la fórmula [5], ya vista, y que fué establecida hace mucho tiempo ya para conjuntos A mucho más generales que P^k — pero entonces solamente si el número r de sus elementos era finito. Veamos ahora que la fórmula permanece válida aún si $r \longrightarrow \infty$ a condición de que el tamaño del sumando mayor no aumente demasiado rápidamente con respecto a n.

b) Si m no está sujeto a esa restricción (cómo, por ejemplo, si estamos interesados propiamente en $p_{P^k}(n)$) en las particiones de n ocurren algunas partes p^k, cuyo tamaño es del mismo orden que n y la distribución efectiva de los números primos empieza a tener importancia, mientras que antes, solamente su distribución estadística, más bien regular, debía considerarse. Por eso no debe sorprender, que parámetros de naturaleza trascendente aparezcan en las fórmulas. En este caso, con la excepción de la mayor precisión alcanzada por la consideración de $u(\rho)$, el nuevo método no mejora los resultados precedentes de Mitsui. Y mientras que es fácil poner

$$F = F_{P^k} = \prod_{p \leqq n^{1/k}} (1 - x^p)^{-1}, \quad A_1 = \log F(\rho), \quad b(\rho) =$$

$$= A_2 = \left\{ \frac{d^2}{d(\log x)^2} \log F(x) \right\}_{x=\rho},$$

la determinación de ρ mediante la ecuación

$$\frac{d}{d(\log x)} \log F(x) = n$$

parece ser una tarea formidable. Aunque, quizás, para n muy grande, eso no sería tan dificil cómo la enumeración explícita de las particiones, parece siempre más bien impracticable. De todas maneras, esta solución del problema es mucho menos satisfactoria, que, por ejemplo, el resultado de Rademacher para $p(n)$.

9. Siguiendo el mismo trámite, un discípulo nuestro está trabajando en el problema de obtener $p_A(n)$ si $A = P_k$ es el conjunto de todos los números divisibles por un solo número primo ($a \varepsilon A \longleftrightarrow \longleftrightarrow a = p^k$, $p = 2, 3, 5, \ldots$; $k = 1, 2, 3, \ldots$). Parece cierto que la fórmula de Haselgrove y Temperley siempre tiene validez y que no puede esperarse obtener fórmula asintótica alguna, a menos de aceptar ciertas restricciones sobre el tamaño de las partes, o, alternativamente, parámetros trascendentes.

El paso siguiente sería el estudio de $p_A(n)$, para conjuntos A arbitrarios. Cómo ya sabemos, Haselgrove y Temperley obtuvieron resultados para una clase $\mathcal{A}$ de conjuntos, bastante extensa. Ahora podríamos estudiar conjuntos $A \varepsilon \mathcal{A}$ y las particiones correspondientes $p_A(n)$; los ejemplos de $A = P$, $A = P^k$ y, quizás el de $A = P_k$, muestran que hay conjuntos $A \not\varepsilon \mathcal{A}$ tales que podemos todavía obtener fórmulas asintóticas razonables para $p_A(n)$. Pero ese camino no nos lleva muy lejos. En primer lugar, es fácil construir conjuntos A con la siguiente propiedad: Existe una sucesión infinita de intervalos (n_{a_i}, n_{b_i}), tales que para $n_{a_i} \leqq n < n_{b_i}$, $p_A(n) \sim C e^{\alpha \sqrt{n}}$, mientras que, sobre los intervalos complementarios, $p_A(n) \sim C n^\beta$ (con el mismo α en todos los intervalos pertinentes, mientras que β y los coeficientes C dependen de los intervalos). Por lo tanto, no podemos esperar una fórmula asintótica sencilla, válida para todo n bastante grande. Además Kohlbecker [12] mostró lo siguiente: si $(a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots) = d = 1$ y $\log P_A(n) \sim n^\gamma L^*(n)$, en donde $P_A(n) = \sum_{\nu \leqq n} p_A(\nu)$ y $L^*(n)$ es una función a oscilación lenta en el sentido de Karamata, entonces el conjunto A tiene una "densidad", es decir $N(n) = \sum_{\substack{a_i \leqq n \\ a_i \varepsilon A}} 1 \sim n^\beta L(n)$ (con $\beta = \dfrac{\gamma}{1-\gamma}$ y con $L(n)$ a oscilación lenta, sencillamente relacionada con $L^*(n)$). Se observa que la hipótesis del teorema de Kohlbecker es muy debil, puesto que la primera condición se necesita ya para garantizar que $p_A(n)$ no sea nulo para n suficientemente grande, y la segunda condición siempre se satisface, cuando

$p_A(n)$ admite una fórmula asintótica del tipo usual (pero no solamente en este caso); por cuanto a la conclusión del teorema, esta es casi idéntica a una condición suficiente para la validez de la fórmula de Haselgrove y Temperley. Por lo tanto, la brecha entre la condición suficiente de Haselgrove y Temperley y la condición necesaria de Kohlbecker (ambas relativas a la validez de una formula asintótica del tipo conocido para $p_A(n)$) es más bien estrecha y hacer esfuerzos para extender la validez de dicha fórmula (de Haselgrove y Temperley) más allá de los casos ya considerados hasta ahora no parece ser una ocupación demasiado provechosa.

Se llega a conclusiones muy parecidas también haciendo uso del Lema Fundamental. Recordamos que (véase [1]) Bateman y Erdös han hallado la condición necesaria y suficiente para que $p_A(n)$ aumente monotónicamente para $n \geqq N(A)$. Tal condición es que

$$d^* = 1 \qquad [a']$$

en donde $d^* = (a_1, a_2, \ldots, a^*, \ldots)$ es el máximo común divisor de los elementos de A, después de la cancelación de cualquier $a^* \varepsilon A$.

Postulemos que vale [a′] y que, además,

$$N(n) \sim Kn^{\beta}(1 + o(1)). \qquad [b']$$

En estas condiciones, el Lema Fundamental conduce a una fórmula muy parecida a la de Haselgrove y Temperley. Si añadimos también alguna restricción sobre el tamaño de los sumandos, para eliminar los parámetros trascendentes, se obtiene

$$p_{A,m}(n) = \frac{n^{r-1}}{(r-1)!\, a_1 a_2 \ldots a_r} \exp \frac{K^{2\beta}}{2(\beta+1)} \frac{m^{2\beta+1}}{n} \cdot$$
$$\cdot (1 + o(1)), \qquad [7]$$

$(a_r \leqq m < a_{r+1})$. Las condiciones satisfechas por m hacen que en [7] el paréntesis tienda a cero y volvamos a obtener [5].

Resulta, cómo conclusión, que problemas de esta clase pueden considerarse como más o menos acabados.

10. Sin embargo, la teoría de las particiones misma está lejos de ser acabada. Mientras que unos problemas han sido resueltos, o han perdido interés, otros problemas han surgido y terminaremos por hacer mención de algunos de estos nuevos problemas.

(I). Quizás el más importante de esos problemas es la generalización de la definición clásica de las particiones. Esa se debe a Petersson [19] y es bastante técnica. Los casos en los cuales la función generadora es modular han sido resueltos por Petersson —en los demás, nada parece ser conocido.

(II). La aparición de parámetros aritméticos en las fórmulas precedentes no está satisfactoriamente explicada. Para encontrar una explicación, podemos intentar el siguiente razonamiento: si

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_A(n)}{p_B(n)} = \lambda$$

existe, es fácil ver que también

$$\lim_{x \to 1} \frac{F_A(x)}{F_B(x)} = L$$

existe y que $\lambda = L$. Pero, $L = \lim\limits_{x \to 1} \prod\limits_{b \varepsilon B} (1 - x^b) \cdot \prod\limits_{a \varepsilon A} (1 - x^a)^{-1}$

y teoremas clásicos nos permiten calcular L (numéricamente, o mediante una fórmula asintótica). Ahora, varios de los parámetros aritméticos en consideración están relacionados precisamente con productos de esta naturaleza y la parte más difícil de la interpretación buscada parece ser el establecimiento de un teorema Tauberiano que nos permita concluir directamente (es decir sin conocer $p_A(n)$ y $p_B(n)$) de la existencia de L a la de λ. Un reciente teorema de Ostrowski [18] parece proporcionar el instrumento idóneo para esta tarea.

(III). Por último, cabe hacer mención de recientes resultados de N. Fine [2], quien ha estudiado funciones definidas sobre el conjunto de todas las particiones de un entero n. Cómo una partición π de n está perfectamente definida si se dan los coeficientes $k_1, k_2, \ldots$ en $n = k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + \ldots + k_r \cdot r$, resulta que una función $f(\pi)$ no es otra cosa que $f(k_1, k_2, \ldots)$, una función de una infinidad de variables independientes, pero que no ha de ser definida más que para valores enteros de esas variables. Así, por ejemplo, tenemos $k(\pi) = k_1 + k_2 + \ldots + k_r$, el número total de los sumandos en la partición π considerada; o $q(\pi) = \sum\limits_{k_j \neq 0} 1$, el número de sumandos distintos en π, etc. El método de Fine hace uso de funciones generadoras, es más bien elemental y algunos de sus resultados pueden ser comparados, por su elegancia, con los de los algebristas del siglo 19. He aquí algunas de las identidades obtenidas:

(i) $\sum_{\pi(n)} q(\pi) = \sum_{\pi(n)} k_1$. Es decir: el número total de sumandos distintos en todas las particiones es igual a la suma de las frecuencias de aparición del sumando $a = 1$. Ilustración para $n = 5$:

$$1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 0 + 1 + 0 + 2 + 1 + 3 + 5$$

(ii) $\sum_{\pi(n)} \sum_{\substack{j \geq 1 \\ k_j \geq i}} 1 = \sum_{\pi(n)} k_i$. En palabras, la suma de las frecuencias no menores de i es igual al número total de veces que $a = i$ aparece cómo sumando. Para $n = 5$, $i = 3$, $\sum_{\pi} \sum_{\substack{j \geq 1 \\ k_j \geq 3}} 1 = 1 + 1 = 2$, mientras que $\sum_{\pi} k_3 = 1 + 1 = 2$ también.

(iii) Sea λ una función cualquiera, que no ha de ser definida más que para argumentos enteros no negativos. Para cualquier j y m enteros hay $\sum_{\pi(n)} \lambda \left(\left[\frac{k_j}{m} \right] \right) = \sum_{\pi(n)} \lambda (k_{jm})$.

(iv) Sea $L(\pi) = L(k_1, k_2, \ldots)$ multilineal en sus argumentos; entonces

$$\sum_{n} x^n \sum_{\pi(n)} L(\pi) = F(x) \, . \, L \left(\frac{x}{1 - x}, \frac{x^2}{1 - x^2}, \ldots \right).$$

La enumeración de tales relaciones está lejos de ser acabada.

Resumiendo, vemos que el descubrimiento por Rademacher en 1937 de lo que puede considerarse la solución completa del problema original de las particiones ordinarias, planteado por Euler, lejos de poner fin a las investigaciones de las particiones, ha tenido más bien el efecto de abrir el camino para nuevas y profundas investigaciones. Y podemos esperar que los bellos resultados obtenidos en los últimos cinco años, estimularán a muchos jovenes matemáticos talentosos para dirigir sus esfuerzos en esta dirección.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. T. Bateman y P. Erdös, *Mathematika* v. 3 (1956), pp. 1-14.

[2] N. Fine, *Report of the Institute in the Theory of Numbers*. Univ. of Colorado, Boulder (Colo), (1959) pp. 86-94.

[3] E. Grosswald, *Trans.* AMS v. 89 (1958), pp. 113-128 y v. 95 (1960), p. 190.

[4] — — *Michigan Math., J.* (en prensa).

[5] P. HAGIS, *Notices* AMS v. 7 (1960), pp. 501-502 (también *Trans.* AMS, en prensa).
[6] G. H. HARDY y S. RAMANUJAN, *Proc. London Math. Soc.* v. 16 (1917), pp. 112-132.
[7] — — *Proc. London Math. Soc.* v. 17 (1918), pp. 75-115.
[8] C. B. HASELGROVE y H. N. V. TEMPERLEY, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* v. 50 (1954), pp. 225-241.
[9] W. K. HAYMAN, *J. reine u. angw. Math.* v. 196 (1956), pp. 67-95.
[10] S. ISEKI, *Amer. J. Math.* v. 81 (1959), pp. 939-961.
[11] K. KNOPP, *Schriften der Königsberger gelehrten Ges.* (Natw. Kl.), v. 2 (1925), pp. 45-74.
[12] E. E. KOHLBECKER, *Trans. Am. Math. Soc.* v. 88 (1958), pp. 346-365.
[13] E. LAGUERRE, *Bull. Soc. Math. France* v. 5 (1877), pp. 76-78.
[14] J. LEHNER, *Duke Math. J.* v. 8 (1941), pp. 631-655.
[15] J. LIVINGOOD, *Amer. J. Math.* v. 67 (1945), pp. 194-208.
[16] G. MEINARDUS, *Math. Zeitschrift*, v. 59 (1954), pp. 388-398.
[17] T. MITSUI, *J. of the Math. Soc. of Japan* v. 9 (1957), pp. 428-447.
[18] A. OSTROWSKI, *Compositio Mathem.* v. 14 (1959), pp. 41-49.
[19] H. PETERSSON, *Abh. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, Nat. Kl.* (1954), N.º 2.
[20] — — *Acta Math.* v. 95 (1956), pp. 57-110.
[21] H. RADEMACHER, *Proc. London Math. Soc.* (2) v. 43 (1937), pp. 241-254.
[22] M. WYMAN, *Journal of the* SIAM, v. 7 (1959), pp. 325-342.
[23] A. WHITEMAN, *Pacific J. of Math.* v. 6 (1956), pp. 159-176.