CONTROL ÓPTIMO DE ECUACIONES DIFERENCIALES NO-LINEALES

por EMILIO O. ROXIN

(Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires)

Sea la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x, t) + b \cdot u(t) \quad (1)$$

donde t es una variable real $0 \leq t < \infty$, $x(t)$, $f(x, t)$, b son n -vectores del espacio X n -dimensional euclideo; $f(x, t)$ es una función definida en una región del espacio (X, t) , lipschitziana con respecto a x , integrable con respecto a t (para cada valor de x), mayorada por una función integrable $M(t) > |f(x, t)|$; b es un vector constante; $u(t)$ es la "función de control" supuesta integrable y sujeta a la restricción $|u(t)| \leq 1$ (toda función de control que cumpla estas condiciones se dirá también "admisible").

Se supone que mientras $f(x, t)$, b son datos de un cierto problema la función $u(t)$ es arbitraria, considerándose la totalidad de soluciones $x(t)$ de (1) cuando $u(t)$ recorre todas las funciones admisibles.

Como condiciones iniciales fijamos

$$x(0) = 0, \quad (2)$$

siendo obvia la posible generalización para condiciones iniciales distintas. En esta forma, el (1) es un sistema de Caratheodory, estando asegurada la existencia y unicidad de las soluciones, así como la dependencia continua de estas de las condiciones iniciales. La solución de la (1), (para determinada función de control $u(t)$), se designara por

$$x(t) = F(t, x_0, t_0).$$

Definición 1: Dada la ecuación diferencial (1) (vale decir dados $f(x, t)$, b) con las condiciones iniciales (2), diremos que $\xi \in X$ es un punto alcanzable en el instante t_0 (desde el origen), cuando

existe una $u(t)$ admisible tal que la correspondiente solución de (1), (2) verifica

$$x(t_0) = F(t_0, 0, 0) = \xi.$$

Definición 2: En las condiciones anteriores, se llama zona alcanzable en el instante t_0 , al conjunto de puntos alcanzables en el instante t_0 . Será designada por $R(t_0)$.

Definición 3: Se dice que el punto $\xi \in X$ es alcanzable en el intervalo $(0, t_0)$ (desde el origen), cuando es alcanzable en un cierto instante t_1 , siendo $0 \leq t_1 \leq t_0$.

Definición 4: Se llama zona alcanzable en el intervalo $(0, t_0)$, al conjunto de puntos alcanzables en dicho intervalo. Designándola por $R^*(t_0)$ es, evidentemente

$$R^*(t_0) = \bigcup_{0 \leq t \leq t_0} R(t).$$

Nota: $R^*(t)$ es una función de t (un conjunto de puntos) que no decrece con t . $R(t)$ en cambio, no necesariamente posee tal propiedad.

Lema 1: $R(t)$ posee las dos siguientes propiedades:

a) Si la distancia de un punto x_0 al conjunto $R(t_0)$ es positiva

$$d(x_0, R(t_0)) = a > 0,$$

existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $t_0 < t_1 < t_0 + \varepsilon$ es $x_0 \notin R(t_1)$.

Efectivamente, para toda $u(t)$ admisible se verifica

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^{t_1} \dot{x} dt \right| &= \left| \int_{t_0}^{t_1} (f(x, t) + b \cdot u) dt \right| \leq \int_{t_0}^{t_1} |f(x, t) + b \cdot u| dt \leq \\ &\leq \int_{t_0}^{t_1} (M(t) + |b|) dt = \Phi(t_1 - t_0). \end{aligned}$$

La $\Phi(t)$ es continua, luego puede darse un ε tal que

$$\Phi(t_1 - t_0) \leq \frac{a}{2}$$

para $t_1 - t_0 \leq \varepsilon$. Como Φ es independiente de $u(t)$, suponiendo que $x_0 \in R(t_1)$, sería

$$a \leq \left| \int_{t_0}^{t_1} \dot{x} dt \right| \leq \Phi(t_1 - t_0) \leq \frac{a}{2}$$

lo que es absurdo.

b) Si $d(x_0, \overline{R(t_0)}) = a > 0$ (donde $\overline{R}$ es el conjunto complementario de R), existe un $\varepsilon > 0$ tal que para $t_0 < t_1 < t_0 + \varepsilon$, es $x_0 \in R(t_1)$.

En efecto, dada una $u(t)$ admisible arbitraria, por ejemplo $u(t) = 0$ para $t > t_0$, la transformación

$$T(x) = F(t, x, t_0) = x'$$

es un homeomorfismo para cada $t \geq 0$, continua en t , de manera que existe un ε tal que para $0 \leq t_1 - t_0 < \varepsilon$, el conjunto transformado del $R(t_0)$ contiene a x_0 como punto interior:

$$x_0 \in T(R(t_0)) = \cup \{F(t_1, x, t_0); x \in R(t_0)\}$$

para

$$0 \leq t_1 - t_0 < \varepsilon.$$

Pero evidentemente

$$R(t_1) \supset T(R(t_0))$$

con lo que queda demostrada esta propiedad.

Lema 2: Dadas la ecuación (1) con las condiciones (2), y un valor $t_0 > 0$, el conjunto $R(t_0)$ es compacto.

En virtud de las condiciones generales impuestas a la (1), $R(t_0)$ es acotado. Consideremos ahora una sucesión de puntos de $R(t_0)$: $\xi_i \in R(t_0)$ ($i = 1, 2, \dots$) y demostraremos que si $\xi_0 = \lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i$, también $\xi_0 \in R(t_0)$.

Para cada ξ_i existe una correspondiente función de control $u_i(t)$ tal que la solución de (1) verifica:

$$x_i(t_0) = \int_0^{t_0} f(x_i(t), t) dt + b \int_0^{t_0} u_i(t) dt = \xi_i. \quad (3)$$

Las $x_i(t)$ son equicontinuas, por ser integrales de funciones que admiten una mayorante: $|x_i| \leq \int K(t) dt$. Las funciones $f(x_i(t), t)$ también son equicontinuas, por ser lipschitzianas con respecto a las x_i . Existe entonces, por el teorema de Arzela, una subsucesión en la que convergen todas estas funciones:

$$x_0(t) = \lim x_{i_n}(t); f(x_0, t) = \lim f(x_{i_n}, t)$$

donde para la segunda igualdad se ha tenido en cuenta la continuidad de la función $f(x, t)$ en x .

Siendo las funciones $f(x_i, t)$ mayoradas por una función integrable, podemos pasar al límite bajo el signo integral, obteniendo para $0 \leq t \leq t_0$

$$x_0(t) = \int_0^t f(x_0(t), t) dt + \lim b \int_0^t u_{i_n}(t) dt.$$

Siendo las $|u_{i_n}(t)| \leq 1$, existe una subsucesión que converge débilmente a cierta función $u_0(t)$:

$$\lim \int_0^t u_{i_n}(t) dt = \int_0^t u_0(t) dt.$$

Evidentemente $|u_0(t)| \leq 1$, siendo por lo tanto admisible; como de

$$x_0(t) = \int_0^t \{f(x_0(t), t) + b \cdot u_0(t)\} dt \quad (4)$$

resulta que $x_0(t)$ es solución de (1), (2), y siendo por otra parte $x_0(t_0) = \xi_0$, resulta finalmente que

$$\xi_0 \in R(t_0).$$

Ecuaciones lineales. En el caso de ser $f(x, t)$ lineal en x :

$$\dot{x} = A(t)x + b \cdot u(t) \quad (5)$$

con la condición inicial

$$x(0) = 0, \quad (6)$$

la solución se puede expresar por

$$x(t) = \varphi_i(t) \int_0^t \psi_i(s) \cdot b \cdot u(s) ds, \quad (7)$$

donde las funciones $\varphi_i(t)$ forman la matriz solución elemental de la ecuación homogénea $\dot{x} = A(t)x$, y las funciones (vectoriales) $\psi_i(t)$ forman la matriz inversa de la anterior.

Lema 3: Para sistemas lineales, el conjunto $R(t)$ es convexo. En efecto, si $u_1(t)$, $u_2(t)$ son dos funciones admisibles y $x_1(t)$, $x_2(t)$ las correspondientes soluciones de (5), será

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = \varphi_i(t) \int_0^t \psi_i(s) \cdot b \cdot (c_1 u_1 + c_2 u_2) ds.$$

Si $c_1 + c_2 = 1$; $c_1, c_2 \geq 0$, también $c_1 u_1 + c_2 u_2$ será una función de control admisible: $|c_1 u_1 + c_2 u_2| \leq 1$, quedando demostrado el lema.

Lema 4: Si para la ecuación (5), x_0 es alcanzable en t_0 pero no en $t_0 - \varepsilon$, con ε arbitrariamente pequeño:

$$x_0 \in R(t_0) ; x_0 \notin R(t) \quad \text{para } t_0 - \varepsilon < t < t_0,$$

entonces x_0 pertenece al contorno de $R(t_0)$.

Para demostrar que en toda esfera de centro x_0 y radio arbitrariamente pequeño hay puntos que no pertenecen a $R(t_0)$, tomemos τ que cumpla

$$\int_{t_0 - \tau}^{t_0} \{M(t) + |b|\} dt < r,$$

donde $M(t)$ es la mayorante de $|f(x, t)| = \|A(t)\| \cdot |x|$, para valores de x de una adecuada región acotada. $R(t_0 - \tau)$ es una región convexa compacta que no contiene x_0 . Puede, pues, trazarse un plano de separación P tal que $R(t_0 - \tau)$ esté totalmente en un semiespacio y x_0 en el otro. En la esfera de radio r hay puntos que distan de $R(t_0 - \tau)$ y con el razonamiento del lema 1, parte (a), se ve que no son alcanzables desde $R(t_0 - \tau)$ en el intervalo de tiempo $(t_0 - \tau, t_0)$.

Variación de la función de control. Consideremos la función de control $u(t)$ y la correspondiente trayectoria dada por la fórmula (7). Consideremos, además, una función de control "variada" $u + \delta x$. Expresando esta última en forma análoga a la (7) y restando ambas, se obtiene

$$\delta x(t) = \varphi_i(t) \int_0^t \psi_i(s) \cdot b \cdot \delta u(s) ds. \quad (8)$$

Como el conjunto $R(t_0)$, para un cierto $t_0 > 0$, es convexo, existe en todo punto ξ de su contorno un plano de soporte; llamaremos X al vector normal a este último plano, dirigido hacia el lado opuesto a $R(t_0)$. Si $\delta u(t)$ es una "variación admisible" (vale decir que la función $u + \delta u$ también es admisible) entonces las correspondientes variaciones $\delta \xi$ serán todos los vectores que van del punto ξ a puntos de $R(t_0)$, o sea que el producto escalar por X será no-posi-

tivo: Por lo tanto:

$$\begin{aligned} X \cdot \delta x(t_0) &= X \cdot \varphi_i(t_0) \int_0^{t_0} \psi_i(s) \cdot b \cdot \delta u(s) ds = \\ &= \int_0^{t_0} c_i(t_0) \cdot h_i(s) \cdot u(s) ds \leq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Aquí $c_i(t_0) = X \cdot \varphi_i(t_0)$; $h_i(s) = b \cdot \psi_i(s)$.

Las constantes c_i no pueden ser todas nulas, por ser las $\varphi_i(t)$ un sistema completo de soluciones de la ecuación lineal homogénea. La suma $c_i \psi_i(s)$ representa, pues, una solución bien determinada de la ecuación adjunta, y $c_i h_i(s)$ la proyección de ésta sobre el vector b . Cuando existan soluciones de la ecuación adjunta contenidas en un hiperplano normal al vector b , diremos que el problema es “degenerado”. En el caso contrario, la combinación lineal $c_i h_i(s)$ solo se anula para un número finito de valores de s (en todo intervalo finito). Tenemos así los elementos necesarios para enunciar el

Teorema 1: Si para la ecuación (5) con la condición (6), el punto ξ es alcanzable en el instante t_0 mediante la función de control $u(t)$, (pero no para tiempos menores), y además se supone que el problema no es degenerado, entonces la correspondiente función $u(t)$ es del tipo “bang-bang”, o sea que solo toma los valores ± 1 .

Para la demostración basta observar que la fórmula (9) vale para toda variación admisible $\delta u(t)$. Por lo tanto, para aquellos puntos en que $c_i(t_0) h_i(s)$ toma valores positivos, solo son admisibles para $\delta u(s)$ valores negativos, y esto sólo puede ser el caso cuando para tal valor de s , la $u(s)$ vale $+1$. En aquellos puntos en que $c_i(t_0) h_i(s)$ es negativa, solo valores positivos para la $\delta u(s)$ son admisibles, o sea que la $u(s)$ vale -1 . En los puntos en que $c_i(t_0) h_i(s)$ es cero y cambia de signo, la $u(s)$ salta de $+1$ a -1 o viceversa.

Teorema 2: Si para la ecuación (1) con la condición (2), el punto ξ pertenece al contorno de $R(t_0)$, y existe un vector X tal que para toda dirección dirigida desde el punto ξ hacia el interior de $R(t_0)$ vale

$$X \cdot (x - \xi) \leq 0,$$

y además la ecuación en variaciones correspondiente no es degenerada.

rada, entonces la correspondiente función de control $u(t)$ que lleva al punto ξ , es del tipo "bang-bang".

Partiendo de la $u(t)$ podemos escribir la ecuación en variaciones

$$x(t, \varepsilon) = \int_0^t \{f(x, s) + b \cdot (u + \varepsilon \cdot \delta u)\} ds.$$

Resulta, pues,

$$\left[\frac{\partial x(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = \delta x = \int_0^t \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\varepsilon=0} \delta x + b \cdot \delta u \right\} ds$$

o sea

$$(\delta \dot{x}) = \delta \dot{x} = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\varepsilon=0} \delta x + b \cdot \delta u = A(t) \delta x + b \cdot \delta u$$

cuya solución es

$$\delta x = \varphi_i(t) \int_0^t \psi_i(s) \cdot b \cdot \delta u(s) ds$$

análoga a la (8). El resto de la demostración es semejante al caso anterior, teniendo en cuenta que cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, se verifica que $x(t_0, \varepsilon) \rightarrow \xi$ a lo largo de alguna curva para la cual

$$X \cdot \left[\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} \leq 0,$$

por ser esto válido para cualquier curva, por hipótesis.

BIBLIOGRAFIA

El presente trabajo se basa fundamentalmente en el de

GAMKRELIDZE, R. V., *The theory of optimum-regarding quick-response processes in linear systems*, Izvestia Akad. Nauk SSSR, Serie Mat., 1958.

Posteriormente a su exposición, el autor se ha enterado de que los teoremas 1 y 2 del presente trabajo pueden ser obtenidos mas fácilmente a partir del "Principio del máximo" de PONTYAGIN, expuesto en

BOLTYANSKII, V. G., *The maximum principle in the theory of optimal processes*, Dokladi AN. SSSR, Vol. 119, 1958.

y en

PONTYAGIN, L. S., GAMKRELIDZE, R. V., BOLTYANSKII, V. G., *The theory of optimal processes - The maximum principle*, Izvestiya Akad. Nauk. SSSR, Seriya Mat. 24 (1960).