EL PROBLEMA DE UNICIDAD EN LA TEORÍA DE SERIES DIVERGENTES EN SUS DOS ASPECTOS, ARITMÉTICO Y FUNCIONAL

por RICARDO SAN-JUAN LLOSÁ

1. *Sumación de series potenciales.*

"La observación de numerosos hechos analíticos naturales, decía Le Roy (A. T. 2 Se, 2, 1900, 413), enseña que una función determinada $f(z)$ con exclusión de todas las demás debe considerarse como definida por una serie potencial $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de radio de convergencia nulo".

Estos hechos pueden resumirse así: un cálculo formal efectuado con la serie, en particular, la verificación de una ecuación diferencial, resulta válido para la función; o mas brevemente: $f(z)$ satisface las leyes formales del cálculo.

Parece, pues, natural plantear el problema de la sumación de series potenciales divergentes así:

Sea $\mathbf{S}_0$ el conjunto de las series potenciales

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{con} \quad \overline{\lim_{n \to \infty}} \, | a_n |^{1/n} < \infty$$

y $\mathbf{h}$ el conjunto de todas las funciones holomorfas en el origen O. Sea σ_0 el isomorfismo existente entre $\mathbf{S}_0$ y $\mathbf{h}$ respecto de las leyes del cálculo empleadas en la teoría elemental de las funciones analíticas. Sea, por otra parte, $\mathbf{G}$ una familia de recintos abiertos G simplemente conexos con el punto de adherencia O, convexos en O (es decir, el segmento abierto $Oz \subset G$ si $z \in G$) y que se acumulan en O (esto es, todo círculo $|z| < r$ contiene algún $G \in \mathbf{G}$).

Problema C. Prolongar el isomorfismo σ_0 mediante otro isomorfismo σ respecto de ciertas leyes formales, por ejemplo, las a, b, c, d, e y f siguientes (elegidas para la aplicación a las ecuaciones diferenciales) entre un conjunto de series potenciales $S_\sigma \supset \mathbf{S}_0$ y un conjunto $\mathbf{A} \supset \mathbf{h}$ de funciones $f(z)$ cada una de las cuales sea analítica, al menos, en un recinto $G_a \varepsilon \mathbf{G}$.

La función $f(z) \varepsilon \mathbf{A}$ homologa de

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \varepsilon \mathbf{S}_\sigma$$

se designará por

$$\sigma \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

es decir,

$$f(z) = \sigma \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Leyes formales:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon \mathbf{S}_\sigma$ y es $\displaystyle\sigma \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = f(z) - a_0$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} \varepsilon \mathbf{S}_\sigma$ y es $\displaystyle\sigma \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} = z f(z)$

c) $f(z)$ es acotada en un recinto $G_c \subset G_a$ con el punto de adherencia O y convexo en O.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1} \varepsilon \mathbf{S}_\sigma$ y $\displaystyle\sigma \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$ es acotada en el mismo recinto G_c que $f(z)$.

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n z^{n-1} \varepsilon \mathbf{S}_\sigma$ y es $\displaystyle\sigma \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n z^{n-1} = f'(z)$.

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} \varepsilon \mathbf{S}_\sigma$ y es $\displaystyle\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = \int_0^z f(t)\, dt$ sobre cada segmento $O z \varepsilon G_a$.

De las leyes a, b, c y d se deduce inmediatamente que

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{para} \quad z \to 0 \text{ en } G_c$$

La aproximación asintótica es, pues, una condición necesaria para las soluciones del problema C. Pero no es suficiente, porque no determina la función.

Son conocidas las condiciones suficientes dadas por N. Watson y F. Nevanlinna y las necesarias y suficientes de Carleman y Ostrowski para que la función $f(z)$ quede determinada por su serie asintótica *junto con* la sucesión $\{m_n\}$ de cotas:

$$m_n = \sup_{z \in G_e} \left| \frac{f(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu}{z^n} \right| \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Pero así no queda resuelto el problema de unicidad, porque hay funciones distintas con el mismo desarrollo asintótico y sendas sucesiones de cotas que verifican separadamente la condición de Carleman-Ostrowski.

De este hecho se deduce con razonamientos adecuados que no existe una solución máxima del problema C, es decir, no hay un isomorfismo que sea prolongación de todos los demás, cuando la familia **G** de recintos contiene todos los homotéticos directos respecto del origen de un recinto $\{ | z^{1/\alpha} - 1 | < 1 \}$ donde $0 < \alpha < 2$ o más general de un recinto G_h que verifique ciertas hipótesis, no muy exigentes, pero que sería entretenido detallar (Funciones semianalíticas en regiones convexas, Revista de la Universidad de Cuyo, en prensa).

La condición necesaria y suficiente para que coincidan todas las aproximaciones asintóticas de una misma serie con cotas que cumplan las condiciones de unicidad de Carleman-Ostrowski en el recinto es que exista entre ellas una *aproximación asintótica óptima*, es decir, cuyas cotas de su desarrollo asintótico sean ordenadamente menores que las homólogas de cualquier otra, salvo un factor exponencial $\{k^n\}$ con k independiente de n y z si dicha condición es invariante en la sustitución de $\{m_n\}$ por $\{k^n m_n\}$ (El problema de Watson y las clases semianalíticas. Publicaciones del C.S.I.C. (Madrid, 1955, 14-15).

Llamamos clase de aproximaciones asintóticas con cotas $\{m_n\}$ en un recinto abierto G con el punto de adherencia 0 al conjunto de todas las funciones holomorfas en G que tienen en G desarrollo asintótico con cotas $\{k^n m_n\}$, siendo k una constante independiente de z y de n, pero que puede depender de la función.

Con esta nomenclatura se puede enunciar la conclusión siguiente, de complicada demostración:

La clase más amplia formada exclusivamente por aproximaciones asintóticas óptimas tiene por cotas una sucesión $\{ W_n \}$ dependiente del tipo del recinto y que para los ángulos de amplitud $\alpha\,\pi$ o para los recintos $\{ | z^{1/\alpha} - 1 | < 1 \}$ con $0 < \alpha < 2$ es la $\{ \Gamma(\alpha n + 1) \}$.

Como además se comprueban las leyes formales, incluso la e de derivación, se tiene así una solución natural del problema C, de adecuada aplicación a las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes polinomios (C.R. 234, 1952, 1338) para cuya integración, precisamente, dio Poincaré la noción de desarrollos asintóticos.

Tal vez si Poincaré hubiese demostrado entonces la determinación de la función por su desarrollo asintótico y la ley de derivación término a término, en vez de declararlas inservibles mediante contraejemplos válidos solamente en el campo real, hubiese sido probablemente la convergencia asintótica y no la noción de Cauchy la que hubiese prevalecido en el Análisis Matemático.

2. *Sumación de series numéricas.*

Paralelamente, el problema de unicidad en la teoría de series numéricas parece natural plantearlo así:

Sea $\mathbf{S}_1$ el conjunto de las series numéricas convergentes y τ_1 el isomorfismo existente entre $\mathbf{S}_1$ y el plano complejo $\mathbf{C} \equiv \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, respecto de las leyes formales del cálculo empleadas en la teórica elemental de series convergentes.

Problema K. Prolongar el homomorfismo τ_1 mediante otro isomorfismo τ entre un conjunto de series numéricas $\mathbf{S}_\tau \supset \mathbf{S}_1$ y el mismo plano complejo $\mathbf{C}$ respecto de ciertas leyes formales, por ejemplo, las siguientes, que enunciamos en la forma débil que serán aplicadas.

El número $s \in \mathbf{C}$ homólogo de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \in \mathbf{S}_\tau$ en el homomorfismo τ se designará por $\tau \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, es decir:

$$s = \tau \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Se dice que una solución τ es más débil (estrictamente) que otra τ' o que τ' es más fuerte (estrictamente) que τ cuando es $\mathbf{S}_\tau \subset \mathbf{S}_{\tau'}$. (y además $S_\tau \not\equiv S_{\tau'}$); y que τ' comprende a τ cuando el homomorfismo τ' es prolongación del τ.

Leyes formales:

a′) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon \mathbf{S}_\tau$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \varepsilon \mathbf{S}_\tau$ también $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) \varepsilon S_\tau$ y es

$$\tau \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \tau \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \tau \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

b′) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon \mathbf{S}_\tau$ y $\sum_{n=0}^{\infty} c a_n \varepsilon \mathbf{S}_\tau$, es $\tau \sum_{n=0}^{\infty} c a_n = c \, . \, \tau \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ cualquiera que sea la constante c.

c′) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon \mathbf{S}_\tau$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon \mathbf{S}_\tau$, es $\tau \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

d′) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon \mathbf{S}_\tau$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \varepsilon \mathbf{S}_\tau$ y $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n * b_n) \varepsilon \mathbf{S}_\tau$, es

$$\tau \sum_{n=0}^{\infty} (a_n * b_n) = \left(\tau \sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) . \left(\tau \sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

d_1') Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon \mathbf{S}_\tau$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \varepsilon S_\tau$ y $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varepsilon \mathbf{S}_\tau$ con $c_0 = 0$ y $c_{n+1} = a_n * b_n$

para $n = 1, 2, \ldots$ es $\tau \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\tau \sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) . \left(\tau \sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$

e) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon S_\tau$, también $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \varepsilon \mathbf{S}_\tau$ para todo $x \varepsilon \,]\, 0{,}1 \,[$

y es $\lim_{x \to 1} \tau \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \tau \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

f) $\tau \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es un funcional continuo en $\mathbf{S}_\tau$ provisto de una topología.

Sea μ un algoritmo lineal cuyos factores de sumación

$$\mu_{tn} \text{ para } t = 0, 1, 2, \ldots \mid \mu_n(t) \text{ para } 0 \leq t < +\infty$$

y $n = 0, 1, 2, \ldots$, además de las clásicas condiciones necesarias y suficientes de permanencia, verifica el principio de identidad análogo a una definición de Banach (Theorie des Opérations linéaires, Varsovia, 1952, 90) que puede ser enunciado así: La única serie $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ que verifica todas las condiciones

$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_{tn}\, \alpha_n = 0$ para $t = 0, 1, 2, \ldots$	$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(t)\, \alpha_n = 0$ para $0 \leq t < +\infty$

es la idénticamente nula $\alpha_n = 0$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$

En el conjunto $\mathbf{S}_\mu$ de las series sumables μ se puede definir entonces una métrica (*) adoptando como norma de cada serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon S_\mu$ la

de sucesión trasformada $\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{tn}\, a_n \right\}$	función trasformada $\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(t)\, a_n$

en el espacio vectorial

$\mathbf{c}_1$	$\mathbf{C}_1$

de estas trasformadas que es, por la existencia de la suma

$$\mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{t \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{tn}\, a_n\,, \tag{1}$$

$$\mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{t \to +\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(t)\, a_n\,, \tag{1'}$$

un subespacio vectorial del espacio métrico:

$\mathbf{c}$ de las sucesiones convergentes	$C\,[0, +\infty]$ de las funciones continuas en el semieje compacto $[0, +\infty]$ si además de existir la suma (1′), la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(t)\, a_n$ define una función continua en el intervalo $[0, +\infty[$.

Los algoritmos de momentos sumatorios quedan incluidos siempre entre los lineales y también los de momentos integrales si la asociada

(*) En otra ocasión analizaremos las relaciones de esta métrica con la definida en un espacio de clases de series (para eludir el principio de identidad) por P. Erdös and G. Piromian: The topologization of a sequence by Toeplitz matrices. Michigan Math. J. 5 1958, 139 148.

es una función entera; pero aun en el caso más general de que esta asociada se defina por prolongación analítica de la serie, la integral en $[0, t]$ cuyo límite para $t \longrightarrow +\infty$ da la suma, es una función continua en el semieje compacto $[0, +\infty]$ y evidentemente se verifica el principio de identidad. Subsiste, pues, la definición anterior con la cual resultan isométricos el espacio $\mathbf{S}_\mu$ de las series sumables y el subespacio vectorial

$$\mathbf{c}_1 \subset \mathbf{c} \qquad | \qquad \mathbf{C}_1 \subset \mathbf{C}$$

Denominaremos a la topología definida mediante esta métrica *específica* del algoritmo μ y se comprueba muy fácilmente que la suma μ verifica la ley de continuidad con esta topología. Como evidentemente se cumplen las leyes a' y b', la suma μ es un funcional lineal, es decir, distributivo y continuo en $\mathbf{S}_\mu$.

En el Memorial des Sciences mathematiques formuló Kogbetliant, en 1931, la pregunta de si las leyes a′, b′, c′ y d′ determinarían el homomorfismo σ; lo cual daría una solución satisfactoria al problema de unicidad que Borel y Kogbetliant calificaron como el punto más sugestivo y delicado de la teoría.

Desgraciadamente la respuesta a la pregunta de Kogbetliant ha sido negativa, aun exigiendo las leyes c′ y d′ en su forma restringida, que aseguran respectivamente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,\varepsilon\, \mathbf{S}_\tau \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n * b_n) \,\varepsilon\, \mathbf{S}_\tau \quad \text{(C. R. 242, 1956, 1838).}$$

Descartada la aspiración de la solución máxima mediante estas cuatro leyes ineludibles, sólo cabe la posibilidad de lograrla mediante otras más exigentes que caractericen los algoritmos conocidos como soluciones máximas de cada problema K, obteniéndose así soluciones parciales del problema de unicidad. La más eficaz para este objeto es la f′ de continuidad eligiendo la topología.

Se puede demostrar, por ejemplo, que si una solución τ de K, más débil que el algoritmo de P de Euler o que el B de Borel, satisface las leyes a′, b′ y c′ o bien en lugar de la c′ la d′ o la d'_1, respectivamente, además la c′ de Abel y la f′ de continuidad con la topología específica del algoritmo E o B, respectivamente, da la misma suma que este algoritmo; y lo mismo acontece, sin hipótesis alguna sobre leyes formales, para cualquier algoritmo lineal permanente que siendo equivalente a un algoritmo de convergencia (lo cual no acontece siempre según demostró Rey Pastor, Rend. Sem. Milano 7, 1933, 139-197) sea más fuerte que el algoritmo de Euler o que la reunión de todos los *algoritmos subordinados* al de Borel mediante sucesiones $\{ r_n \}$ con límite $+ \infty$, es decir, los algoritmos deducidos del B sustituyendo el límite funcional que define la integral impropia con el límite superior $t \longrightarrow + \infty$ por el límite aritmético para $n \longrightarrow \infty$ obtenido poniendo $t = r_n$.

La primera conclusión se deduce de las caracterizaciones de la trasformación de Laplace mediante las leyes de derivación o de composición (Portugaliae. Math. 11, 1952, 105) y de sus correlativas para series de potencias. La segunda es una aplicación de un teorema de Banach (Loc. cit. Teor. 12, 95), cuya generalización para algoritmos con parámetro continuo hubiera permitido prescindir de los algoritmos subordinados, pero no parece fácil sin la ampliación previa de otro teorema anterior (Loc. cit. Teor. 10, 47) sobre sistemas de infinitas ecuaciones lineales.

Los resultados precedentes explican el papel central que ha desempeñado el algoritmo de Borel y su correlativo de Euler en la sumación de series divergentes. La ley f′ de continuidad es de difícil comprobación y requiere un estudio especial de cada algoritmo.

Pero sobre todo queda en pie el problema de la unicidad para las series que, no siendo sumables E o B, lo sean, sin embargo, con algoritmos más fuertes. Es el mismo que surgió al pasar de las series convergentes, para las que coinciden las sumas con cualquier algoritmo permanente, a las sumables. La convergencia ordinaria ha sido sustituida ahora por la sumación E o B, mucho más amplia, como núcleo para la coincidencia de las sumas con otros algoritmos. Incluso se podrían ensayar en lugar de los E o B métodos de sumación más fuertes, que también sean perfectos como el E en el sentido de Banach (Loc. cit. 90).

Aunque no lo hemos demostrado aun, creemos que el algoritmo de Stieltjes podrá ser caracterizado incluyendo como ley formal la trasformación de la serie, mediante operaciones algebraicas, en la fracción continua convergente.

3. *Relaciones entre los problemas* C *y* K.

La relación entre los dos problemas C y K se establece mediante la ley de sumación puntual, es decir, la suma de la serie potencial en un punto z coincide con el valor de la función suma en este punto.

Tal vez no sea inoportuno insistir en que esta propiedad es una ley formal que como cualquier otra, puede subsistir sólo en parte al trasponer la convergencia; a pesar de que la aritmetización del Análisis la haya elevado a la categoría de definición general de suma para cualquier serie funcional.

La definición es ciertamente sugestiva por su sencillez y generalidad, pero acarrea no pocas dificultades incluso para las convergentes: la teoría de series trigonométricas cuajada de excepciones y prolijos teoremas, sólo se torna armónica y sencilla cuando la convergencia puntual se sustituye por la convergencia en media cuadrática o mediante la distancia en el espacio de Hilbert. Esta es indudablemente la definición de suma más apropiada para las series ortogonales.

Parece como si cada tipo de serie funcional tuviese una noción natural de convergencia. Para series de Dirichlet podría deducirse tal vez de la adherencia con una precisión logarítmica de las definidas por Mandelbrojt, pero restringiendo este concepto para lograr la determinación de la función. Análogamente para las series de facultades y para los desarrollos asintóticos generales en series de funciones que verifiquen las condiciones estudiadas por H. Schmidt (M. A. 113, 1937, 627).

Pero no tenemos ninguna indicación sobre la noción natural de convergencia en series de polinomios no ortogonales y menos aun para las series de fracciones simples sin campo de convergencia ordinaria.

4. *El problema C para otras series funcionales.*

Para cada tipo de serie funcional $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(z)$ se plantea un problema análogo al C.

En todos figura la familia de recintos como concepto extraño a la serie; pero tal vez inherente a la noción de suma de una serie funcional ya que esta suma se obtiene como en el caso de las asintóticas, adherentes, ortogonales, etc., con la intervención simultánea de todos los valores de la función y es inevitable que aparezca el campo donde son adquiridos estos valores.

Cuando una serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ se presenta en una cuestión como serie de coeficientes de una serie potencial $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con círculo de convergencia o más general sumable σ, la ley de Abel constituye la interpretación rigurosa de la definición euleriana según Rey Pastor (Teoría de algoritmos de convergencia y sumación. Buenos Aires, 1933, pág. 12).

Pero si la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ procediese de otra serie funcional $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(z)$ de funciones $\{f_n(z)\}$ distintas de las $\{z^n\}$, aunque también con $\lim_{z \to 0} f_n(z) = 1$ para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$ habría que adoptar, de acuerdo también con la definición euleriana, el valor para $z = 1$ o el límite para $z \to 1$, dentro del campo de sumación σ, de la suma $\sigma \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(z)$ obtenido como solución del problema C para estas series, y siempre, por consiguiente, que se cumpliese el principio de permanencia o consistencia.

Tal acontece, en particular, si la sucesión $\{f_n(z)\}$ verifica como la $\{z^n\}$ las clásicas condiciones necesarias y suficientes de permanencia. Pero aun en el caso de ser $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(z)$ convergente y no solamente sumable σ en un semientorno de 1^-, la existencia y la igualdad de las distintas sumas procedentes de series funcionales diferentes, constituye un difícil problema que requiere imponer nuevas restricciones a las $\{f_n(z)\}$ e incluso a las $\{a_n\}$, como se hace en los teoremas tauberianos.