RESULTADOS NUEVOS SOBRE CASOS CRITICOS EN ECUACIONES DIFERENCIALES

por SOLOMON LEFSCHETZ
(Universidad Nacional de México)

1. Considérese un sistema analítico real

$$\dot{x} = X(x) \quad , \quad X(0) = 0 \qquad [1]$$

donde x, X son n-vectores ($n > 1$), siendo las componentes de X funciones holomorfas de las de x. Se tratará el problema de la estabilidad o inestabilidad del orígen, es decir de la solución "trivial" $x = 0$ (como la llaman los autores rusos).

Sea A la matriz $n \times n$ de los coeficientes de los términos de primer grado de $X(x)$. Cuando ninguna de las raíces características de esta matriz tiene parte real nula, la solución del problema es bien conocida: si p es el número de raíces cuya parte real es negativa, y $q = n - p$ el número de raíces de parte real positiva, entonces en el caso $p = n$ el orígen es asintóticamente estable, siendo en cambio inestable si $p < n$. El caso de raíces con parte real cero se destaca, por lo tanto, como caso especial, y se lo llama caso crítico. Liapunov, en su memoria clásica [1], trató completamente el caso: a) de una raíz nula; b) de dos raíces imaginarias puras ($\pm \alpha i$). Existen también contribuciones importantes de Malkin [2] para varias raíces nulas o pares de raíces imaginarias puras conjugadas, con tratamiento bastante completo del caso de dos raíces nulas.

En este trabajo nos proponemos presentar una contribución al caso de un número cualquiera de raíces nulas, específicamente cuando la matriz A es de la forma

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

donde los ceros representan matrices nulas, siendo B una matriz no singular, real, cuadrada, de orden $q \times q$. Presentaremos dos teoremas generales, el uno para la estabilidad asintótica y el otro para la inestabilidad. El método empleado está en estrecha relación con el de Liapunov referente a una raíz nula.

2. Se pueden elegir las coordenadas, que llamaremos $y_1, \ldots, y_p$, $z_1, \ldots, z_q$ de tal forma que el sistema inicial resulte

$$\dot{y} = Y(y\,;z) \quad , \quad \dot{z} = Bz + Z(y\,;z) \qquad [2.1]$$

donde

$$Y = [y, z]_2 \quad , \quad Z = [y]_1 + [z]_2 + y\,[z]_1 + y^2\,[z]_1 + \ldots$$

Aquí $[x]_r$ representa un vector cuyas componentes son series de potencias con términos de grado no menor que r. B es una matriz constante no-singular cuyas raíces características son las de A con parte real no nula. Por ser el determinante de B diferente de cero, el sistema

$$Bu + Z(y\,;u) = 0$$

tiene una solución única $u(y)$ con $u(0) = 0$, holomorfa en el punto $y = 0$.

La transformación, debida a Liapunov,

$$y \longrightarrow y \quad , \quad z \longrightarrow z + u,$$

(posiblemente aplicada dos veces), transforma [2.1] en un sistema de la forma especial

$$\begin{cases} \dot{y} = G(y) + \varphi_0(z) + \varphi_1(z)\,y + \varphi_2(z)\,y^2 + \ldots \\ \dot{z} = Bz + Z(y\,;z) \end{cases} \qquad [2.2]$$

donde

$$G(y) = [y]_N,\ N > 1 \ ;\ \varphi_0 = [z]_2 \ ;\ \varphi_i = [z]_1\ (i > 0);$$
$$Z(y\,;z) = [y\,;z]_2 \ ,\ Z(y\,;0) = [y]_{N+1}.$$

Supongamos que

$$G(y) = g_N(y) + g_{N+1}(y) + \ldots,$$

donde $g_k(y)$ es un p-vector cuyas componentes son formas de grado k en las de y. Tómese el sistema reducido (real)

$$\dot{y} = g_N(y). \qquad [2.3]$$

Entonces

TEOREMA 1. *Si el origen $y = 0$ es asintóticamente estable para el sistema [2.3] (lo que implica N impar) entonces el origen $y = 0$, $z = 0$ lo es también para el sistema inicial.*

TEOREMA 2. *Sea N par. Si existe un vector real γ tal que el producto interior $(\gamma, g_N(y))$ es una forma definida positiva, entonces el origen es inestable para el sistema inicial.*

Las demostraciones de estos teoremas se hacen a base de transformaciones regulares sobre el vector y sólo.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. M. LIAPUNOV, *Probleme général de la stabilité du mouvement*, foto-reproducción en Annals of Math. Studies N.º 17, de la traducción francesa (1937), del trabajo original ruso fechado en 1892.

[2] I. G. MALKIN, *Theory of the stability of motion*, 1952. Traducción en inglés del original ruso, por la U. S. Atomic Energy Comission.

[3] Debo mencionar una contribución, muy reciente, sobre la estabilidad de sistemas del tipo (2.3) para p = 3:
COURTNER COLEMAN, *Asymptotic stability in 3-space*, Contributions to the theory of non-linear oscillations, Annals of Math. Studies, V, pp. 257-268 (1960).