SOBRE LA SERIE DE FOURIER DE LA DISTRIBUCIÓN $vp\,\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}x$

por R. SCARFIELLO
(Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires)

1. Designaremos con D_Γ el espacio de las funciones indefinidamente diferenciables en la circunferencia unidad Γ. Diremos que una sucesión $\varphi_j(s)$ de funciones $\varphi_j \in D_\Gamma$ converge a cero para $j \to \infty$ si las derivadas de todo orden de las funciones φ_j convergen a cero uniformemente para $j \to \infty$.

Las distribuciones T en Γ son las funcionales lineales y continuas sobre el espacio D_Γ. El espacio de las distribuciones en Γ lo designaremos con D_Γ'. El producto escalar de una distribución T por una función φ lo indicaremos con $< T, \varphi >$.

Consideremos la siguiente función definida en Γ

$$\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}s = \frac{i}{2}\,\frac{e^{is}+1}{e^{is}-1}\,.$$

Ella no define ninguna distribución pues, como se ve inmediatamente, no es sumable en el origen $s = 0$.

Consideremos en cambio la expresión

$$\left\langle v\,p\,\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}s,\ \varphi(s)\right\rangle =$$

$$= v\,p\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}s\,\varphi(s)\,ds = \tag{1}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\pi}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}s\,\varphi(s)\,ds\right].$$

Demostremos que de esta manera queda definida una distribución. Basta ver que la expresión (1) define una funcional lineal y contínua en D_Γ.

Veamos primero que es lineal. En efecto, sean α_1, α_2 números complejos, se tiene

$$\left\langle v\, p\, \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\, s,\ (\alpha_1\, \varphi_1 + \alpha_2\, \varphi_2) \right\rangle =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-\pi}^{-\varepsilon} + \int_{-\pi}^{-\varepsilon} \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\, s\ (\alpha_1\, \varphi_1(s) + \alpha_2\, \varphi_2(s))\, ds \right] =$$

$$= \alpha_1 \lim_{\sigma \to 0} \left[\int_{-\pi}^{-\varepsilon} + \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\, s\ \varphi_1(s)\, ds \right] +$$

$$+ \alpha_2 \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-\pi}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\, s\ \varphi_2(s)\, ds \right] =$$

$$= \alpha_1 \left\langle \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\, s,\ \varphi_1(s) \right\rangle = \alpha_2 \left\langle \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\, s,\ \varphi_2(s) \right\rangle .$$

Veamos que es contínua en la topología introducida en D_Γ. En efecto, consideremos una sucesión $\varphi_j(s) \longrightarrow 0$ para $j \longrightarrow \infty$, en D_Γ y pongamos:

$$\left\langle v\, p\, \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\, s,\ \varphi_j(s) \right\rangle = v\, p \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\, s\ \varphi_j(s)\ \mathrm{ds} =$$

$$= v\, p \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\, s\ (\varphi_j(s) - \varphi_j(0) + \varphi_j(0))\, ds =$$

$$= \varphi_j(0)\ v\, p \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\, s\, ds + \tag{2}$$

$$+ v\, p \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\, s\ (\varphi_j(s) - \varphi_j(0))\, ds.$$

La primera integral del último miembro es nula pues

$$\frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\, s$$

es una función impar. En la segunda se puede suprimir el signo $v\, p$ pues el integrando es ahora sumable en el origen $s = 0$. Además por el teorema del valor medio podemos poner:

$$\varphi_j(s) - \varphi_j(0) = s\, \varphi_j'(\xi) \quad , \quad 0 < \xi < 1.$$

Se tiene entonces:

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} s \,(\varphi_j(s) - \varphi_j(0))\, ds \right| <$$

$$< \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \frac{1}{\left| \operatorname{sen} \frac{1}{2} s \right|} \, |s| \, |\varphi_j'(\xi)| \, ds <$$

$$< \text{máx} \, |\varphi_j'(s)| \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\frac{1}{2} s}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} s} \right| ds .$$

Llamando A al valor de la integral que aparece en este último miembro, la expresión (2) puede acotarse de la siguiente manera:

$$\left\langle v\,p \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} s,\ \varphi_j(s) \right\rangle \Big| < A \text{ máx } |\varphi_j(s)| ,$$

que tiende a cero para $j \longrightarrow \infty$.

2. Consideremos ahora la serie de Fourier de la distribución así definida.

De acuerdo con [2] escribiremos los coeficientes de Fourier de una distribución T en Γ de la siguiente manera

$$C_k(T) = \frac{1}{2\pi} \left\langle T, e^{-iks} \right\rangle,$$

donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Calculemos las diferencias

$$\Delta\, C_k = C_k - C_{k-1} = \frac{1}{2\pi} \left\langle T,\ (e^{-iks} - e^{-i(k-1)s}) \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\langle T,\ e^{-iks}(1 - e^{is}) \right\rangle = \tag{3}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\langle (1 - e^{is})\, T,\ e^{-iks} \right\rangle = C_k((1 - e^{is})\, T) .$$

Para el caso de la distribución $v\,p\,\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\,s$, los coeficientes de Fourier serán:

$$C_k\left(v\,p\,\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\,s\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\langle v\,p\,\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\,s,\; e^{-iks}\right\rangle = \tag{4}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,v\,p\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\,s\,e^{-iks}\,ds\,,$$

y las diferencias serán

$$\Delta\,C_k = \frac{1}{2\pi}\,v\,p\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\,s\,(1 - e^{is})\,e^{-iks}\,ds =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\,\frac{i}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1 + e^{is})\;e^{-iks}\,ds = \tag{5}$$

$$= -\,\frac{i}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-iks}\,ds + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\,(k-1)\,s}\,ds\right) =$$

$$= -\,\frac{i}{2}\,(\delta_{0,k} + \delta_{0,k-1})\,,$$

donde se han indicado con $\delta_{0,k}$ y $\delta_{0,k-1}$ los valores de la delta de Krönecker $\delta_{\mu,\nu}$ para $\mu = 0$, $\nu = k$ y $\mu = 0$, $\nu = k - 1$ respectivamente.

Hemos obtenido así para los coeficientes C_k una ecuación en diferencias finitas

$$\Delta\,C_k = -\,\frac{i}{2}\,(\delta_{0,k} + \delta_{0,k-1})\,.$$

Se tendrá entonces

$$C_k = \Sigma - \frac{i}{2}\,(\delta_{0,k} + \delta_{0,k-1}) = -\,\frac{i}{2}\,s\,g\,k + C, \tag{6}$$

siendo $s\,g\,k$ la sucesión

$$s\,g\,k = \begin{cases} 1 & \text{para } k > 0 \\ 0 & \text{» } k = 0 \\ -1 & \text{» } k < 0 \end{cases}$$

y C una constante a determinar.

Indiquemos con el símbolo $\vee$ sobrepuesto, la operación de simetría. Se tiene:

para una función de D_Γ: $\check{\varphi}(s) = \varphi(-s)$

» » sucesión: $\check{C}_k = C_{-k}$

» » distribución de D_Γ: $<\check{T}, \varphi> = <T, \check{\varphi}>$

o bien $<\check{T}, \check{\varphi}> = <T, \varphi>$.

Diremos que una función, sucesión o distribución es par si es igual a su simétrica e impar si es igual a su simétrica cambiada de signo.

Pero para una función $\varphi \in D_\Gamma$ se tiene

$$\check{C}_k(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(s)\, e^{iks}\, ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(-s)\, e^{-iks}\, ds = C_k(\check{\varphi}),$$

y para una distribución $T \in D'_\Gamma$

$$\check{C}_k(T) = <T, e^{iks}> = <\check{T}, e^{-iks}> = C_k(\check{T}).$$

Por otra parte, si T es impar será $\check{T} = -T$ y la última expresión nos dará

$$\check{C}_k(T) = C_k(\check{T}) = C_k(-T) = -C_k(T), \tag{7}$$

es decir

$$C_k = -\check{C}_k\,;$$

en otros términos, la sucesión C_k de una distribución impar es impar.

Para el caso de la distribución

$$v\,p\,\frac{1}{2}\cot g\,\frac{1}{2}\,s$$

se verifica que

$$\left\langle v\,p\,\frac{1}{2}\,\overset{\vee}{\operatorname{cotg}}\,\frac{1}{2}\,s,\ \varphi(s)\right\rangle =$$

$$= \left\langle v\,p\,\frac{1}{2}\,\operatorname{cotg}\,\frac{1}{2}\,s,\ \varphi(-s)\right\rangle =$$

$$= \left\langle -v\,p\,\frac{1}{2}\,\operatorname{cotg}\,\frac{1}{2}\,s,\ \varphi(s)\right\rangle ,$$

como se ve reemplazando el primer miembro de esta igualdad por la expresión (1) y cambiando variable en las integrales. Ello significa que la distribución

$$v\,p\,\frac{1}{2}\,\operatorname{cotg}\,\frac{1}{2}\,s$$

es impar; por otra parte, teniendo en cuenta (7) resulta que sus coeficientes de Fourier forman una sucesión impar.

Volviendo a (6) se deduce entonces que la constante C debe ser nula, dado que la sucesión $s\,g\,k$ es impar.

Obtenemos en definitiva:

$$C_k\left(v\,p\,\frac{1}{2}\,\operatorname{cotg}\,\frac{1}{2}\,s\right) = -\,\frac{i}{2}\,s\,g\,k\,. \tag{8}$$

3. Consideremos ahora las distribuciones

$$\overset{\circ}{\delta}_+ = \frac{1}{2}\,\overset{\circ}{\delta} - \frac{1}{2\pi i}\,v\,p\,\frac{1}{2}\,\operatorname{cotg}\,\frac{1}{2}\,s \tag{9}$$

$$\overset{\circ}{\delta}_- = \frac{1}{2}\,\overset{\circ}{\delta} + \frac{1}{2\pi i}\,v\,p\,\frac{1}{2}\,\operatorname{cotg}\,\frac{1}{2}\,s \tag{10}$$

donde el pequeño círculo sobrepuesto a las letras indica que son distribuciones definidas en Γ. Se tiene para $\varphi(s) \in D_\Gamma$

$$\left\langle \overset{\circ}{\delta}_+,\ \varphi(s)\right\rangle = \frac{1}{2}\,\varphi(0) - \frac{1}{2\pi i}\,v\,p\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\,\operatorname{cotg}\,\frac{1}{2}\,s\,\varphi(s)\,ds$$

$$\left\langle \overset{\circ}{\delta}_-,\ \varphi(s)\right\rangle = \frac{1}{2}\,\varphi(0) + \frac{1}{2\pi i}\,v\,p\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\,\operatorname{cotg}\,\frac{1}{2}\,s\,\varphi(s)\,ds.$$

4. Indiquemos con las variables complejas $\omega = r\,e^{is}$ y $\omega^* = r^{-1}\,e^{is}$, $0 \leq r < 1$ los puntos interiores y exteriores a Γ y consideremos las siguientes funciones:

$$F(\omega) = -\frac{1}{2\pi i}\,\frac{i}{2}\,\frac{\omega+1}{\omega-1}\,, \tag{11}$$

$$G(\omega^*) = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{i}{2}\,\frac{\omega^*+1}{\omega^*-1}. \tag{12}$$

Ambas definen sendas distribuciones que dependen de r pues para $\varphi(s) \in D_\Gamma$ se tiene

$$\left\langle F(\omega),\ \varphi(s)\right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)\,\varphi(s)\,ds = \\ = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{i}{2}\,\frac{r\,e^{is}+1}{r\,e^{is}-1}\,\varphi(s)\,ds \tag{13}$$

$$\left\langle G(\omega^*),\ \varphi(s)\right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} G(\omega^*)\,\varphi(s)\,ds = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{i}{2}\,\frac{r^{-1}\,e^{is}+1}{r^{-1}\,e^{is}-1}\,\varphi(s)\,ds. \tag{14}$$

Podemos poner (cf [3])

$$-\frac{1}{2\pi i}\,\frac{i}{2}\,\frac{\omega+1}{\omega-1} = \frac{1}{2\pi}\,P(r,s) - \frac{1}{2\pi i}\,Q(r,s)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{i}{2}\,\frac{\omega^*+1}{\omega^*-1} = \frac{1}{2\pi}\,P(r,s) + \frac{1}{2\pi i}\,Q(r,s),$$

donde $P(r, s)$ y $Q(r, s)$ indican el núcleo de Poisson y su conjugado

$$P(r,s) = \frac{1}{2}\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos s + r^2}$$

$$Q(r,s) = \frac{r \operatorname{sen} s}{1-2r\cos s + r^2}$$

Las expresiones (13) y (14) se podrán escribir de la siguiente manera

$$\left\langle F(\omega),\ \varphi(s)\right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,s)\ \varphi(s)\ ds -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} Q(r,s)\ \varphi(s)\ ds; \qquad (15)$$

$$\left\langle G(\omega^*),\ \varphi(s)\right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,s)\ \varphi(s)\ ds +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} Q(r,s)\ \varphi(s)\ ds. \qquad (16)$$

Si se toma límites para $r \to 1$ en éstas últimas se obtiene, como es sabido, (cf. [3]):

$$\lim_{r\to 1}\left\langle F(\omega),\ \varphi(s)\right\rangle =$$

$$= \frac{\varphi(0)}{2} - \frac{1}{2\pi i}\, v\, p\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\, s\ \varphi(s)\ ds, \qquad (17)$$

$$\lim_{r\to 1}\left\langle G(\omega^*),\ \varphi(s)\right\rangle =$$

$$= \frac{\varphi(0)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\, v\, p\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\, s\ \varphi(s)\ ds. \qquad (18)$$

Es decir, las funciones $F(\omega)$ y $G(\omega^*)$ tienden, en el sentido de las distribuciones a las distribuciones $\overset{\circ}{\delta}_{+}$ y $\overset{\circ}{\delta}_{-}$ respectivamente.

Las fórmulas (17) y (18) son las análogas, para el caso del círculo unidad, a las fórmulas obtenidas en [4] para el caso del semiplano.

Si se hace una representación conforme del plano $z = x + i\,y$ en el plano $\omega = r\,e^{is}$ por medio de la relación

$$\omega = -\frac{z - 2\,i}{z + 2\,i}\,, \qquad (19)$$

que transforma el semiplano $y > 0$ en el círculo $r < 1$, y el semiplano $y < 0$ en la región $r > 1$, y se reemplaza en (11) y (12) el valor de ω por la expresión (19), se obtiene:

$$F(\omega) \to f(z) = -\frac{1}{2\pi\, i}\,\frac{1}{z}$$

$$G(\omega^*) \longrightarrow g(\bar{z}) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\bar{z}},$$

que coinciden con las funciones de variable compleja utilizadas en [4] para obtener por un pasaje al límite para $y \longrightarrow 0$, las expresiones de δ_+ y δ_- en el eje real.

5. Escribamos, por último, las series de Fourier de las distribuciones $\mathring{\delta}_+$ y $\mathring{\delta}_-$. Para ello recordemos que (cf [2]):

$$C_k(\mathring{\delta}) = \frac{1}{2\pi} \left\langle \mathring{\delta}, e^{-iks} \right\rangle = \frac{1}{2\pi}.$$

Teniendo en cuenta el resultado obtenido en (8) podemos poner:

$$C_k(\mathring{\delta}_+) = C_k\left(\frac{\mathring{\delta}}{2}\right) - C_k\left(\frac{1}{2\pi i}\, v\, p\, \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\, s\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{i}{2}\, s\, g\, k =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, s\, g\, k\right) = \frac{1}{2\pi}\, Y(k),$$

$$C_k(\mathring{\delta}_-) = C_k\left(\frac{\mathring{\delta}}{2}\right) + C_k\left(\frac{1}{2\pi i}\, v\, p\, \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\, s\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi i}\, \frac{i}{2}\, s\, g\, k =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, s\, g\, k\right) = \frac{1}{2\pi}\, Y(-k),$$

donde se ha indicado con $Y(k)$ la sucesión de Heaviside

$$Y(k) = \begin{cases} 1 & \text{para } k > 0 \\ 0 & \text{» } k \leq 0. \end{cases}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] L. Schwartz, *Théorie des distributions. I, II.*
[2] — — *Methodes Mathématiques de la Physique.*
[3] A. Zygmund, *Trigonometrical Series, I.*
[4] A. Gonzalez Domínguez. *Symposium de UNESCO.* Punta del Este, 1951.