TEORÍA DE LA DIFERENCIAL, EN EL SENTIDO DE HADAMARD-FRÉCHET, PARA APLICACIONES ENTRE ESPACIOS VECTORIALES TOPOLÓGICOS. I (*)

por MANUEL BALANZAT
(Escuela de Física y Matemática de la Universidad Central de Venezuela).

1. *Introducción.*

El estudio de la diferenciabilidad de las aplicaciones entre espacios abstractos fue iniciado hace 50 años por Fréchet y continuado, para casos particulares, por Gateaux y otros matemáticos.

El primer estudio sistemático fue hecho por Fréchet [2] (**) en 1925 para las aplicaciones generales entre dos espacios normados. Este estudio fue proseguido por otros muchos matemáticos y creemos puede afirmarse que la teoría de la diferencial para aplicaciones entre espacios normados ha adquirido, actualmente, su forma definitiva. Michal en su libro [1] ha dado una exposición clara y accesible de esta teoría que también está expuesta en libros recientes como el de Mme. Lelong [1] y el de Dieudonné [1] destinados a la enseñanza universitaria de nivel relativamente elemental.

Para el caso general de espacios vectoriales topológicos, la teoría está mucho menos desarrollada. Se han hecho generalizaciones por Michal [2] y [3] y por Fréchet [4] para grupos topológicos abelianos, por Hyers [1] para espacios vectoriales topológicos, y más recientemente Sebastião e Silva [1] y [2] ha desarrollado la teoría para espacios vectoriales localmente convexos.

En todas esas generalizaciones se parte de la llamada definición de Stolz-Fréchet, que es muy adecuada para el caso de los espacios normados, pero que si se aplica fuera de este dominio complica

(*) En una nota de los "Comptes Rendues" (Balanzat [2]) hemos publicado resúmen de los resultados de este trabajo.

(**) Los números entre corchetes se refieren a la bibliografía indicada al final de la memoria.

bastante la teoría, necesita la introducción de conceptos delicados e impone restricciones a los espacios que se consideran.

En este trabajo nosotros hemos partido de otra definición, la denominada de Hadamard-Fréchet; esta definición fue introducida por Hadamard [1] en el análisis clásico con finalidad exclusivamente pedagógica. En una memoria del año 1937, Fréchet [3] probó que esta definición se podía extender a las aplicaciones entre espacios normados y obtuvo el interesante resultado de que una aplicación diferenciable en el sentido de Hadamard-Fréchet podía no serlo en el Stolz-Fréchet, siendo en cambio válida la recíproca.

En la mencionada memoria Fréchet planteó como problema la extensión para esta definición de las propiedades clásicas de la diferencial. Ello fue hecho por Ky Fan [1], en su tesis de la Universidad de París para los espacios normados, por Balanzat [1] para los vectoriales topológicos metrizables y por S. F. L. de Foglio [1] para los espacios L^* vectoriales en su tesis de la Universidad de Buenos Aires.

Nosotros hacemos ahora la extensión de esta teoría al caso general de los espacios vectoriales topológicos. En esta memoria nos limitamos a dar los resultados de tipo local, es decir referentes a la diferenciabilidad en un punto, que pensamos haber obtenido en forma bastante simple y completa y sin necesidad de imponer a los espacios ninguna restricción; en particular no usamos la hipótesis de que sean localmente convexos, básica en la extensión de Sebastião e Silva y también en la de Hyers. (*)

De interés particular son las relaciones entre la diferenciabilidad y la continuidad. En general, para espacios no normados, la primera no implica la segunda. Sebastião e Silva y S. F. L. de Foglio probaron, en las teorías por ellos desarrolladas, que las diferenciabilidad implicaba la continuidad si el espacio de la variable independiente era metrizable. Nosotros daremos en esta memoria una condición necesaria y suficiente que debe cumplir el espacio de la variable independiente para que la continuidad en un punto sea consecuencia de la diferenciabilidad y hemos probado que la cumplen los espacios metrizables y algunos más que no lo son.

Salvo mención en contra, usaremos siempre la nomenclatura y notación de Bourbaki [1] y cuando hablemos de un espacio,

(*) En particular creemos que los teoremas de la diferencial del producto y del máximo y mínimo no han sido demostrados anteriormente, para espacios no normados en ninguna otra teoría.

sin ningún añadido, se sobreentenderá que se trata de un espacio vectorial topológico (en el sentido de Bourbaki) sobre el cuerpo de los números reales y separado.

2. *Definición de la diferencial.*

Para definir la diferencial partiremos de la definición conocida de la derivada de una aplicación $x = g(\lambda)$ de un intervalo abierto de la recta en un espacio X. La *derivada* de g en λ_0 es el punto $g'(\lambda_0)$ definido como:

$$(1) \qquad g'(\lambda_0) = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{g(\lambda_0 + \Delta\lambda) - g(\lambda_0)}{\Delta\lambda}$$

Es sabido que la existencia de derivada en λ_0 implica la continuidad de $g(\lambda)$ en λ_0.

La *diferencial* de g en λ_0 es la aplicación lineal y continua de R en X,

$$(2) \qquad D(\Delta\lambda) = \Delta\lambda \, . \, g'(\lambda_0)$$

No debe perderse de vista la diferencia de naturaleza entre la derivada y la diferencial. La primera es un punto del espacio X y la segunda es un punto del espacio $L\ (R,\ X)$ de las aplicaciones lineales y continuas de R en X. De (1) se deduce:

$$(3) \qquad g(\lambda_0 + \Delta\lambda) - g(\lambda_0) = D(\Delta\lambda) + \mu(\lambda_0, \Delta\lambda)$$

cumpliéndose la condición:

$$(3') \qquad \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\mu(\lambda_0, \Delta\lambda)}{\Delta\lambda} = 0.$$

Es también sabido que si existe una aplicación lineal y continua $D(\Delta\lambda)$ de R en X que satisfaga a la relación (3) con la condición (3′), entonces $g(\lambda)$ es derivable en λ_0 y se cumple (2).

La definición de la diferencial por las condiciones (3) y (3′), se generaliza para definir en la forma conocida, *la diferencial en el sentido de Stolz-Fréchet* en el punto x_0 de una aplicación $y = \varphi(x)$ entre dos espacios normados X e Y. La diferencial es una aplicación lineal y continua $D(\Delta x)$ de X en Y que cumple las condiciones:

$$(4) \qquad \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = D(\Delta x) + \mu(X_0, \Delta x)$$

$$(4') \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mu(x_0, \Delta x)}{||\Delta x||} = 0.$$

Como dijimos en la introducción, nosotros vamos a adoptar otra definición, que es la generalización a espacios vectoriales topológicos de la dada en Fréchet [3] para las aplicaciones entre espacios normados.

Definición 1. *Sean* X *e* Y *dos espacios; sea* $y = f(x)$ *una aplicación de un entorno del punto* x_0 *de* X *en* Y. *Se dice que* $f(x)$ *es diferenciable, en el sentido de Hadamard-Fréchet en* x_0, *si existe una aplicación lineal y continua* $\mathrm{D}(\Delta x)$ *de* X *en* Y *que cumple la siguiente condición:*

Cualquiera que sea la aplicación $x = g(\lambda)$ *de un intervalo abierto de la recta en* X, *derivable en* λ_0 *y con* $g(\lambda_0) = x_0$, *la aplicación* $y = \mathrm{G}(\lambda) = \mathrm{f}[\mathrm{g}(\lambda)]$ *es derivable en* λ_0 *y se tiene:*

$$G'(\lambda_0) = D[g'(\lambda_0)]. \tag{5}$$

$D(\Delta x)$ *es la diferencial, en el sentido de Hadamard-Fréchet, de* $f(x)$ *en el punto* x_0. Salvo mención en contra, cada vez que digamos que una aplicación es diferenciable, lo será en el sentido que acabamos de definir.

Vamos a ver ahora que si X es el cuerpo de los reales, la diferenciabilidad en x_0 y la derivabilidad en x_0 son conceptos equivalentes, es decir:

Teorema 1. *Si* X *es el cuerpo de los reales, la diferenciabilidad en* x_0 *y la derivabilidad en* x_0 *son conceptos equivalentes, y se tiene:*

$$D(\Delta x) = \Delta x \cdot f'(x_0).$$

Supongamos $f(x)$ derivable en x_0; tomemos una aplicación $x = g(\lambda)$ de R en X que cumple las condiciones de la definición y consideremos la aplicación $y = G(\lambda) = f[g(\lambda)]$. Se tiene:

$$\frac{G(\lambda_0 + \Delta\lambda) - G(\lambda_0)}{\Delta\lambda} = \frac{f[g(\lambda_0 + \Delta\lambda) - f\ g(\lambda_0)}{\Delta\lambda}.$$

Por la derivabilidad de f se tiene:

$$f[g(\lambda_0 + \Delta\lambda)] - f[g(\lambda_0)] = [g(\lambda_0 + \Delta\lambda) - g(\lambda_0) \cdot f'(x_0) + \\ + \mu[x_0, g(\lambda_0 + \Delta\lambda) - g(\lambda_0)].$$

$$\frac{G(\lambda_0 + \Delta\lambda) - G(\lambda_0)}{\Delta\lambda} = \frac{g(\lambda_0 + \Delta\lambda) - g(\lambda_0)}{\Delta\lambda} \cdot f'(x_0) + \\ + \frac{g(\lambda_0 + \Delta\lambda) - g(\lambda_0)}{\Delta\lambda} \cdot \frac{\mu[x_0, g(\lambda_0 + \Delta\lambda) - g(\lambda_0)]}{g(\lambda_0 + \Delta\lambda) - g(\lambda_0)}$$

Cuando $\Delta\lambda \to 0$, por la derivabilidad de g el primer sumando tiende a $g'(\lambda_0) \cdot f'(x_0)$; $g(\lambda_0 + \Delta\lambda) - g(\lambda_0)$ tiende a cero por la continuidad de g, y por la propiedad de μ, el factor vectorial del segundo sumando tiende a cero y el escalar tiende a $g'(\lambda_0)$, luego $G(\lambda)$ es derivable en λ_0 y se tiene:

$$G'(\lambda_0) = g'(\lambda_0) \cdot f'(x_0).$$

La recíproca se prueba aplicando la definición a la trasformación idéntica $g(x) = x$.

La diferenciabilidad en x_0 depende solamente de los valores de $f(x)$ en un entorno arbitrario del punto x_0, luego se puede siempre considerar que f está definida en todo punto de X, partiendo de los valores dados en un entorno V de x_0 y asignado valores arbitrarios en el complementario de V.

La definición tiene que cumplir el requisito de la diferenciabilidad de las aplicaciones lineales y en efecto se tiene el siguiente teorema:

TEOREMA 2. *Sea* $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{l}(\mathrm{x}) + \mathrm{a}$, *siendo* $\mathrm{l}(\mathrm{x})$ *lineal y continua y* a *constante. Entonces* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *es diferenciable en cualquier punto y su diferencial coincide con* $\mathrm{l}(\mathrm{x})$.

En particular si $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *es constante su diferencial es nula y la diferencial de la aplicación idéntica es la misma aplicación.*

Sea x_0 un punto cualquiera, $g(\lambda)$ una aplicación que cumpla las condiciones de la definición y $G(\lambda) = f[g(\lambda)]$. Se tiene:

$$\frac{G(\lambda_0 + \Delta\lambda) - G(\lambda_0)}{\Delta\lambda} = \frac{l[g(\lambda_0 + \Delta\lambda)] - l[g(\lambda_0)]}{\Delta\lambda} =$$

$$= l\left[\frac{g(\lambda_0 + \Delta\lambda) - g(\lambda_0)}{\Delta\lambda}\right]$$

Si tomamos límites para $\Delta\lambda \to 0$, y tenemos en cuenta la derivabilidad de g y la continuidad de f, vemos que $G(\lambda)$ es derivable en λ_0 y que se tiene: $G'(\lambda_0) = l\ [g'(\lambda_0)]$, lo que prueba el teorema.

3. *Propiedades de unicidad y linealidad.*

TEOREMA 3. *La diferencial es única, es decir si* $f(\mathrm{x})$ *tiene una diferencial* D *en* x_0 *cualquiera otra aplicación lineal y continua* E *que cumpla las condiciones de la definición* 1 *coincide con* D.

Sea x un punto arbitrario de X; consideraremos la aplicación de R en X: $g(\lambda) = x_0 + \lambda \,.\, x$; se ve inmediatamente que $g(0) = x_0$, $g'(0) = x$, y entonces para $G(\lambda) = f[g(\lambda)]$ se tiene:

$$E(x) = E[g'(0)] = G'(0) = D[g'(0)] = D(x)$$

y como x es un punto cualquiera de x se ve que E y D son idénticas.

Teorema 4. *Sean* f_1 *y* f_2 *diferenciables en* x_0 *y sean* D_1 *y* D_2 *sus diferenciales respectivas. Entonces la combinación lineal* $f = a_1 \,.\, f_1 + a_2 \,.\, f_2$ *es diferenciable en* x_0 *y su diferencial es* $D = a_1 \,.\, D_1 + a_2 \,.\, D_2$.

En efecto: sea $x = g(\lambda)$ una aplicación que cumpla las condiciones de la definición y sea $G(\lambda) = f[g(\lambda)]$. Mediante cálculos simples se ve que G es derivable en λ_0 y que $G'(\lambda_0) = D[g'(\lambda_0)]$, lo que prueba el teorema.

Teorema 5. *Sean* X, Y, Z *tres espacios*; f(x, y) *una aplicación de* $X \times Y$ *en* Z *con las siguientes propiedades*: a) *Para todo* x *fijo*, f *es lineal en* Y. b) *Para todo* y *fijo*, f *es diferenciable en* x_0. *Entonces la diferencial* $D(\Delta x, y)$ *es lineal en* Y.

En efecto sea m y n constantes reales, y_1 e y_2 elementos de Y e $y_0 = m \,.\, y_1 + n \,.\, y_2$. Sea a un punto cualquiera de x y consideremos la aplicación $x = g(\lambda) = x_0 + \lambda a$; se tiene $g(0) = x_0$ y $g_i(0) = a$. Consideremos las aplicaciones $G(\lambda) = f[g(\lambda), y_0]$; $G_1(\lambda) = f[g(\lambda), y_1]$; $G_2(\lambda) = f[g(\lambda), y_2]$. Por la linealidad de f, por el teorema anterior y por la diferenciabilidad de f se tiene:

$$G(\lambda) = m \,.\, G_1(\lambda) + n \,.\, G_2(\lambda)$$

$$G'(0) = m \,.\, G_1'(0) + n \,.\, G_2'(0)$$

$$D(a, y_0) = m \,.\, D(a, y_1) + n \,.\, D(a, y_2)$$

lo que prueba el teorema.

4. *Diferencial de la aplicación compuesta.*

Teorema 6. *Sean* X, Y, Z *tres espacios*; $y = f(x)$ *una aplicación de* X *en* Y *diferenciable en* x_0; $z = g(y)$ *una aplicación de* Y *en* Z *diferenciable en* $y_0 = f(x_0)$, *y sean* D_1 *y* D_2 *las diferenciales respectivas.*

Entonces la aplicación compuesta $z = h(x) = g[f(x)]$ *es diferenciable en* x_0 *y su diferencial* D *es la aplicación compuesta de* D_1 *y* D_2.

En efecto sea $\varphi(\lambda)$ una aplicación de los reales en X diferenciable en λ_0 y con $\varphi(\lambda_0) = x_0$. Sea $\Phi(\lambda) = f[g(\lambda)]$, se tiene, por ser f diferenciable:

$$\Phi'(\lambda_0) = D_1[\varphi'(\lambda_0)].$$

$\Phi(\lambda)$ es derivable en λ_0 y se tiene $\Phi(\lambda_0) = y_0$. Poniendo $\psi(\lambda) = g[\Phi(\lambda)]$ y teniendo en cuenta la diferenciabilidad de g obtenemos:

$$\psi'(\lambda_0) = D_2[\Phi'(\lambda_0)] = D_2[D_1[\varphi'(\lambda_0)]]$$

y como $h[\varphi(\lambda)] = g[f[\varphi(\lambda)]] = \psi(\lambda)$ se ve que $h[\varphi(\lambda)]$ es derivable en λ_0 y que su derivada es $D_2[D_1[\varphi'(\lambda_0)]]$, lo que prueba el teorema.

Tomemos ahora $f(x)$ diferenciable en x_0 y consideremos la aplicación $f(x + x_0)$. Por los teoremas 6 y 2 esta aplicación es diferenciable en $x = 0$ y su diferencial en ese punto es la de f en x_0. Si además reemplazamos $f(x)$ por $f(x) - f(x_0)$, tampoco se altera la diferencial. Esta observación nos permitirá en muchos casos poder suponer, sin pérdida de la generalidad, que el punto de diferenciabilidad es el origen y que en él es $f(0) = 0$.

También nos va a permitir el teorema 6 *generalizar la clásica propiedad de las diferenciales de ser invariantes en los cambios de variable.*

Para ello es conveniente fijar un poco mejor la notación de la diferencial. La que hemos usado $D(\Delta x)$ es adecuada si la función f y el punto x_0 están permanentemente fijos. Una notación más completa sería $\delta_{f,\,x_0}(\Delta x)$ y por analogía con el análisis clásico podemos usar también la notación dy. Tenemos así la triple notación,

$$dy = D(\Delta x) = \delta_{f,\,x_0}(\Delta x). \tag{6}$$

Consideremos la aplicación idéntica $f(x) = x$ que coincide con su diferencial; entonces para esa aplicación se tiene $dx = \Delta x$; (6) toma la forma:

$$dy = D(dx) = \delta_{f,\,x_0}(dx) \tag{7}$$

Si suponemos ahora que x viene definido por intermedio de una aplicación $x = g(t)$ diferenciable en t y con $g(t_0) = x_0$ se tiene

$dx = \delta_{g,t_0}(\Delta t)$ y entonces para $y = h(t) = f[g(t)]$ obtenemos por el teorema 6:

$$(8) \qquad dy = \delta_{h,t_0}(\Delta t) = \delta_{f,x_0}[\delta_{g,t_0}(\Delta t)] = \delta_{f,x_0}(dx).$$

Luego la fórmula (7) es válida cuando x es una variable independiente y también cuando depende de otra variable, como queríamos probar.

Observemos que la definición 1 es un caso particular del teorema 6. Por lo tanto si se considera una teoría de la diferencial en la que se cumplan los teoremas 1 y 6 y en la que la diferencial sea una aplicación lineal y continua entre los dos espacios de las variables, *cualquier aplicación diferenciable en esta teoría lo será también en la definición* 1.

Esta posible mayor generalidad de la diferenciabilidad en el sentido de Hadamard-Fréchet es efectiva ya que, como indicamos en la introducción, en Fréchet [3] hay el ejemplo de una aplicación entre espacios normados diferenciable en el sentido de Hadamard-Fréchet y no diferenciable en el de Stolz-Fréchet.

5. *Cambios de topología.*

TEOREMA 7. *Sea* $\mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$ *una aplicación de* X *en* Y *diferenciable en* x_0. *La propiedad de ser diferenciable y la diferencial subsisten si se reemplaza la topología de* X *por una más fina o la de* Y *por una menos fina.*

En efecto: sea τ_1 una topología más fina que la topología τ de X. Tomemos una aplicación $x = g(\lambda)$ con $x_0 = g(\lambda)$ y derivable en λ_0 con la topología τ_1. Como todo entorno en τ lo es en τ_1, $g(\lambda)$ es derivable en λ_0 con la topología τ. Luego $G(\lambda) = f[g(\lambda)]$ es derivable en λ_0 y $G'(\lambda_0) = D[g'(\lambda_0)]$, lo que prueba la primera parte del teorema.

Supongamos ahora que introducimos en Y una topología menos fina. La derivabilidad de $G(\lambda)$ en λ_0 con la topología de Y implica la derivabilidad con una menos fina y esto demuestra la segunda parte del teorema.

Podemos también considerar la diferenciabilidad respecto a un subespacio X_0 de X. Es de demostración casi inmediata el siguiente teorema:

TEOREMA 8. *Sea* $\mathrm{f(x)}$ *diferenciable en* $\mathrm{x} = 0$ *y sea* X_0 *un subespacio de* X. *Entonces la restricción de* f *a* X_0 *es diferenciable en* $\mathrm{x} = 0$ *su diferencial es la restricción a* X_0 *de la diferencial de* f.

6. *Diferencial de un producto.*

Con una definición adecuada del producto como una aplicación bilineal y continua se puede generalizar el resultado clásico de la derivada del producto.

TEOREMA 9. *Sean* X, Y_1, Y_2, Z *cuatro espacios. Supondremos definida una aplicación producto (es decir bilineal y continua)* $z = y_1 \,.\, y_2$ *de* $Y_1 \times Y_2$ *en* Z. *Sean* $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ *dos aplicaciones de* X *en* Y_1 *e* Y_2, *respectivamente, diferenciables en* x_0; *sean* D_1 *y* D_2 *las diferenciales respectivas.*

Entonces la aplicación $z = h(x) = f_1(x) \,.\, f_2(x)$ *es diferenciable en* x_0 *y su diferencial* D *satisface a la relación*:

$$D(\Delta x) = D_1(\Delta x) \,.\, f_2(x_0) + f_1(x_0) \,.\, D_2(\Delta x). \tag{9}$$

En efecto: por la binealidad y continuidad del producto se ve que la aplicación $D(\Delta x)$ definida por la relación (9) es lineal y continua.

Tomemos ahora una aplicación $x = g(\lambda)$ que cumpla las condiciones de la definición y consideremos las aplicaciones:

$$y_1 = G_1(\lambda) = f_1[g(\lambda)];\ y_2 = G_2(\lambda) = f_2[g(\lambda)];\ z = G(\lambda) = h[g(\lambda)].$$

Se tiene:

$$G(\lambda) = f_1[g(\lambda)] \,.\, f_2[g(\lambda)]; \quad G_1'(\lambda_0) = D_1[g'(\lambda_0)];$$

$$G_2'(\lambda_0) = D_2[g'(\lambda_0)]; \quad \frac{G(\lambda_0 + \Delta\lambda) - G(\lambda_0)}{\Delta\lambda} =$$

$$= \frac{G_1(\lambda_0 + \Delta\lambda) \,.\, G_2(\lambda_0 + \Delta\lambda) - G_1(\lambda_0) \,.\, G_2(\lambda_0)}{\Delta\lambda} = G_1(\lambda_0 + \Delta\lambda) \,.$$

$$.\ \frac{G_2(\lambda_0 + \Delta\lambda) - G_2(\lambda_0)}{\Delta\lambda} + \frac{G_1(\lambda_0 + \Delta\lambda) - G_1(\lambda_0)}{\Delta\lambda} \,.\, G_2(\lambda_0).$$

Tomando límites para $\Delta\lambda - 0$, teniendo en cuenta la derivabilidad y continuidad de G_1 y G_2 y la continuidad del producto, se tiene:

$$G'(\lambda_0) = G_1(\lambda_0) \,.\, G_2'(\lambda_0) + G_1'(\lambda_0) \,.\, G_2(\lambda_0).$$

$$G'(\lambda_0) = f_1(x_0) \,.\, D_2[g'(\lambda_0)] + D_1[g'(\lambda_0)] \,.\, f_2(x_0) = D[g'(\lambda_0)].$$

lo que prueba el teorema. Se ve de inmediato que *el teorema se extiende al caso de varios factores.*

7. *Condición de extremo relativo.*

La regla clásica de la anulación de la diferencial en los puntos de máximo o mínimo se extiende al caso de aplicaciones numéricas definidas en espacios vectoriales.

TEOREMA 10. *Sea* $\lambda = \mathrm{f(x)}$ *una aplicación del espacio* X *en los números reales. Si* f(x) *es diferenciable en un punto y tiene en él un extremo relativo, la diferencial es la aplicación nula.*

Sin pérdida de la generalidad podemos suponer que el punto es el cero. Existe entonces un entorno V de 0 en el que se cumple $f(x) \geq f(0)$ si es un mínimo o $f(x) \leq f(0)$ si es un máximo. V contiene otro entorno W equilibrado y absorbente. Sea a un punto cualquiera de W y consideremos la aplicación $x = g(t) = t\,.\,a$ de la recta en X. Se tiene $g(0) = 0$; $g'(0) = a$; para $|\,t\,| \leq 1$, $g(t)$ pertenece a W y por lo tanto a V. Luego la aplicación real de variable real $G(t) = f[g(t)]$ tiene en $t = 0$ un máximo o un mínimo, es además derivable luego su derivada es cero, y se tiene: $0 = G'(0) = D[g'(0)] = D(a)$.

Por lo tanto D es nula en W, pero W es absorbente y D es lineal, luego D es la aplicación nula, como queríamos demostrar.

8. *Diferenciabilidad de las aplicaciones de varias variables.*

Para simplificar nos limitaremos al caso de dos variables, pero los resultados se extienden en forma automática al caso de n variables.

TEOREMA 11. *Sean* X *e* Y *dos espacios*; $\mathrm{T = X \times Y}$ *su espacio producto. Sea* $\mathrm{z = f(t) = f(x, y)}$ *una aplicación de* T *en otro espacio* Z *diferenciable en el punto* $\mathrm{t_0 = (x_0, y_0)}$. *Entonces las aplicaciones:*

$$f_1(x) = f(x, y_0); \qquad f_2(y) = f(x_0, y) \tag{10}$$

de X *e* Y *respectivamente en* Z *son diferenciables en* $\mathrm{x_0}$ *y en* y_0, *y si* $\mathrm{D(\Delta t) = D(\Delta x, \Delta y)}$ *es la diferenciable de* f, *las diferenciales de* $\mathrm{f_1}$ *y* $\mathrm{f_2}$. *que se denominan las diferenciales parciales de* f *en* $\mathrm{(x_0, y_0)}$ *son respectivamente*:

$$D_1(\Delta x) = D(\Delta x, 0); \qquad D_2(\Delta y) = D_2(0, \Delta y). \tag{11}$$

En efecto: sea $x = g(\lambda)$ una aplicación de los reales en X, derivable en λ_0, con $g(\lambda_0) = x_0$. Consideremos la aplicación $h(\lambda) =$

$= (g(\lambda), y_0)$ de los reales en T. Se tiene evidentemente $h(\lambda_0) = (x_0, y_0)$ y

$$\frac{h(\lambda_0 + \Delta\lambda) - h(\lambda_0)}{\Delta\lambda} = \left(\frac{g(\lambda_0 + \Delta\lambda) - g(\lambda_0)}{\Delta\lambda}, 0\right)$$

luego $h'(\lambda_0) = (g'(\lambda_0), 0)$.

Consideremos la aplicación:

$$H(\lambda) = f[h(\lambda)] = f(g(\lambda), y_0) = f_1[g(\lambda)] = F_1(\lambda) \tag{12}$$

Por la diferenciabilidad de f se tiene:

$$F_1'(\lambda_0) = H'(\lambda_0) = D[h'(\lambda_0)] = D(g'(\lambda_0), 0) = D_1[g'(\lambda_0)].$$

Queda así probado el teorema.

Como T puede considerarse como la suma directa topológica de X e Y, las relaciones (11) nos dicen que: *la diferencial de una aplicación de varias variables es la suma de todas sus diferenciales parciales.*

Consideremos ahora tres espacios T, X, Y y sea Z el espacio producto $X \times Y$; tomemos una aplicación $z = f(t)$ de T en Z y sean $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$ las componentes de f, es decir que se tiene $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$.

TEOREMA 12. *Para que* f *sea diferenciable en* t_0 *es necesario y suficiente que lo sean* f_1 *y* f_2 *y entonces si las diferenciales de* f, f_1, f_2 *son, respectivamente,* $z = D(\Delta t)$, $x = D_1(\Delta t)$, $y = D_2(\Delta t)$ *se tiene*:

$$D(\Delta t) = (D_1(\Delta t), D_2(\Delta t)). \tag{13}$$

En efecto: sea $t = g(\lambda)$ una aplicación que cumpla las condi ciones de la definición y consideremos las aplicaciones:

$$z = G(\lambda) = f[g(\lambda)]; \quad x = G_1(\lambda) = f_1[g(\lambda)]; \quad y = G_2(\lambda) = f_2[g(\lambda)]$$

y se tiene: $G(\lambda) = (G_1(\lambda), G_2(\lambda))$, luego la derivabilidad de $G(\lambda)$ implica las de $G_1(\lambda)$ y $G_2(\lambda)$ y recíprocamente.

Supongamos f diferenciable en t_0 y sea $D(\Delta t) = (D_1(\Delta t), D_2(\Delta t))$ su diferencial. Se tiene:

$$G'(\lambda_0) = (G_1'(\lambda_0), G_2'(\lambda_0)) \tag{14}$$

$$G'(\lambda_0) = D[g'(\lambda_0)] = \{ D_1[g'(\lambda_0)], D_2[g'(\lambda_0)] \}. \tag{15}$$

luego:

(16) $G_1'(\lambda_0) = D_1[g'(\lambda_0)]$; $G_2'(\lambda_0) = D_2[g'(\lambda_0)]$.

lo que prueba que f_1 y f_2 son diferenciables en t_0.

Recíprocamente si f_1 y f_2 son diferenciables en t_0, y si $x = D_1(\Delta t)$ e $y = D_2(\Delta t)$ son sus diferenciales, si ponemos $D(\Delta t) = [D_1(\Delta t), D_2(\Delta t)]$, entonces para la anterior aplicación se cumplen (14) y (16) y entonces se cumple también (15) lo que prueba el teorema.

De estos resultados y de lo establecido en el Nº 4 se deduce que *la diferencial de una aplicación de varias variables es la suma de todas sus diferenciales parciales tanto cuando son independientes como cuando dependen de otras variables.*

En efecto, sea $z = f(x, y) = f(t)$, diferenciable en $t_0 = (x_0, y_0)$; sea $dz = D(\Delta t) = D(\Delta x, \Delta y)$ su diferencial; sean finalmente $D_x(\Delta x) = D(\Delta x, 0)$ y $D_y(\Delta y) = D(0, \Delta y)$ las diferenciales parciales.

Si x e y son variables independientes se tiene $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, y por lo tanto:

(17) $$dz = D_x(dx) + D_y(dy)$$

Supongamos que x e y dependen de otras variables. Utilizando el espacio producto podemos limitarnos a considerar el caso en que dependen de una sola.

Suponemos entonces $x = g_1(u)$, $y = g_2(u)$, diferenciables en u_0 con $x_0 = g_1(u_0)$ e $y_0 = g_2(u_0)$ y sean $dx = E_1(\Delta u)$, $dy = E_2(\Delta u)$ las diferenciales. La aplicación $t = g(u) = (g_1(u), g_2(u))$ es, por el teorema 12, diferenciable y su diferencial es $dt = E(\Delta u) = (E_1(\Delta u), E(\Delta u))$. Por el teorema 6 se tiene:

$$dz = D[E(\Delta u)] = D(E_1(\Delta u), E_2(\Delta u)) = D(E_1(\Delta u), 0) +$$
$$+ D(0, E_2(\Delta u)) = D_x(E_1(\Delta u)] + D_y[E_2(\Delta u)] = D_x(dx) +$$
$$+ D_y(dy).$$

lo que prueba la validez de la fórmula (17) también en el caso en que x e y dependan de otras variables, como queríamos demostrar.

9. *Espacios sucesionales.*

Vamos ahora a ocuparnos del estudio de la continuidad de las aplicaciones diferenciales. En general la diferenciabilidad en un punto no implica la continuidad en dicho punto; desde luego que todos los teoremas que hemos establecido hasta ahora son válidos que la función diferenciable sea continua o no y también lo siguen siendo, como se comprueba fácilmente, si a la definición 1 de aplicación diferenciable se le añade la condición de ser continua en todo punto en el que sea diferenciable.

Nuestro problema va a ser ahora el estudio de las condiciones que deben cumplir los espacios para que toda aplicación diferenciable en un punto sea continua en dicho punto. Para ello tendremos que hacer unas consideraciones previas.

Sea X un espacio topológico; como es sabido, las sucesiones convergentes se definen en él por la condición $x = \lim. x_n$, si cualquier entorno de x contiene todos los términos de la sucesión a partir de un cierto valor de n.

Podemos entonces considerar en el conjunto X una estructura de espacio $\mathcal{L}^*$ de Fréchet-Kuratowski (ver Kuratowski [1], pág. 83) y definir en X la *S-adherencia de un conjunto* A, que designaremos con la notación $\widetilde{A}$, por la condición: $x \in \widetilde{A}$, si y sólo si existe una sucesión x_n de elementos de A que converge hacia x. La estructura así definida puede no ser una estructura de espacio topológico (en el sentido de Bourbaki), para que lo sea es evidentemente necesario y suficiente que la S-adherencia así definida sea idempotente.

Entre la S-adherencia $\widetilde{A}$ y la adherencia $\overline{A}$, definida por la topología, se cumple la relación:

$$\widetilde{A} \subset \overline{A} \tag{18}$$

puesto que si $x \in \widetilde{A}$, existe una sucesión de elementos de A cuyo límite es x, y entonces en todo entorno de x hay puntos de A, que son los de la sucesión a partir de un cierto índice.

Definición 2. — *Diremos que un espacio topológico* X *es sucesional si para cada subconjunto* A *de* X *se tiene*:

$$\widetilde{A} = \overline{A} \tag{19}$$

Serán pues espacios topológicos sucesionales los espacios $\mathcal{L}^*$ que sean además espacios topológicos y en particular los espacios metrizables.

Un espacio topológico en el que la S-adherencia no sea idempotente evidentemente no es sucesional, pero la recíproca es falsa, puede la S-adherencia ser idempotente y ser distinta de la adherencia. Para probarlo hasta considerar el espacio K definido por F. Riesz formado por los puntos de la recta y en el que se define como sistema fundamental de entornos de un punto a, los intervalos abiertos de centro a, de los que se ha extraido un conjunto numerable de puntos distintos de a. Las únicas sucesiones convergentes son las que tienen todos sus términos iguales a partir de un cierto índice; la topología definida por la S-adherencia es la discreta, distinta de la de K, y como para todo A se tiene $A = \tilde{A}$, la S-adherencia es idempotente.

10. *Ejemplo de espacio vectorial topológico separado y no sucesional.*

Bastará con dar un ejemplo en que la S-adherencia no sea idempotente. Para ello consideremos el espacio $\mathcal{D}$ de Schwartz con la topología definida en la forma indicada en Schwartz [1], Cap III §§ 1. En este espacio las sucesiones convergentes φ_n hacia cero están caracterizadas por las condiciones:

a) Los soportes de φ_n están todos contenidos en un compacto fijo.

b) Cualquiera que sea el entero positivo o nulo p, $\varphi_n^{(p)}(x)$ converge uniformemente hacia cero en toda la recta.

Considero ahora las funciones $\varphi_{m,n}(x)$ definidas para todos los valores enteros positivos de m y n por las condiciones:

$$(20)\quad \begin{cases} \alpha_{m,n}(x) = 0 \text{ para } |x| \geq n;\ \alpha_{m,n}(\pm 1/2) = 1/m; \\ \alpha_{m,n}(\pm 1/4) = 1/m + 1/n \\ \text{lineal en los intervalos} \\ (-n, -1/2), (-1/2, -1/4), (-1/4, 1/4)\ (1/4, 1/2) \text{ y} \\ (1/2, n). \end{cases}$$

Estas funciones son continuas; $\alpha_{m,n}$ tiene un soporte igual al intervalo $(-n, n)$; fijado un valor de n, $\alpha_{m,n}(x)$ converge para $m \longrightarrow \infty$, uniformemente en la recta hacia la función $\alpha_n(x)$ definida por las condiciones:

$$(21)\quad \begin{cases} \alpha_n(x) = 0 \text{ para } |x| \geq 1/2;\ \alpha_n(\pm 1/4) = 1/n \\ \text{lineal en los intervalos} \\ (-1/2, -1/4), (-1/4, 1/4) \text{ y } (1/4, 1/2). \end{cases}$$

Las $\alpha_n(x)$ son continuas, tienen sus soportes iguales al intervalo $(-1/2, 1/2)$ y para $n \rightarrow \infty$ convergen en la recta uniformemente hacia cero.

Tomemos ahora la función $\varphi_0(x)$ nula para $|x| \geq 1$ e igual en $(-1, 1)$ a $e^{-(1-x^2)^{-1}}$, y convolucionemos esta función con las $\alpha_{m,n}$, sean entonces

$$\varphi_{m,n}(x) = \varphi_0(x) * \alpha_{m,n}(x) \ ; \qquad \varphi_n(x) = \varphi_0(x) * \alpha_n(x).$$

Todas estas funciones son indefinidamente derivables. Las $\varphi_{m,n}$ tienen como soporte el intervalo $(-n-1, n+1)$ puesto que la φ_0 es mayor que 1 en el intervalo $(-1, 1)$; el soporte de las φ_n es el intervalo $(-3/2, 3/2)$. Recordando la regla de derivación del producto de convolución y la posibilidad de pasar al límite cuando todas las funciones tienen su soporte contenido en un compacto fijo, se ve fácilmente que en el espacio $\mathcal{D}$ la sucesión $\varphi_{m,n}$ converge hacia la φ_n y las φ_n convergen hacia cero. Por lo tanto si llamamos F al conjunto de las $\varphi_{m,n}$ se tiene $0 \in \widetilde{\widetilde{F}}$ y vamos a demostrar ahora que 0 no pertenece a $\widetilde{F}$, con lo que quedará demostrado que la S-adherencia no es idempotente.

En efecto como el cero no pertenece a F bastará probar que cualquier sucesión $\lambda_i(x) = \varphi_{m_i, n_i}(x)$ de elementos distintos de F no converge en $\mathcal{D}$ hacia cero. Distinguiremos dos casos distintos según que haya o no infinitos índices n_i distintos.

En el primer caso hay índices tan grandes como se quiera, luego la sucesión tiene funciones de soporte también tan grande como se quiera, y por lo tanto no es convergente.

En el segundo caso hay un índice ν que se repite indefinidamente y la sucesión λ_i contiene una subsucesión λ_r de la forma $\lambda_r(x) = \varphi_{m_r, \nu}(x)$ en donde ν es fijo y los m_r son números naturales crecientes, luego λ_r converge en $\mathcal{D}$ hacia $\varphi_\nu \neq 0$ y la sucesión λ_i que la contiene no puede converger hacia cero.

Queda así establecido que *el espacio $\mathcal{D}$ de Schwartz no es un espacio sucesional.*

11. *Ejemplo de espacio vectorial topológico separado sucesional y no metrizable.*

Sea X el espacio vectorial formado por las funciones reales de variable real (o más generalmente por las funciones reales definidas en un conjunto infinito no numerable) que son nulas en el complementario de un conjunto numerable (que puede ser vacío o finito).

Definimos en X la topología por intermedio de las sucesiones convergentes y diremos que f_n converge hacia cero si para todo x la sucesión numérica $f_n(x)$ converge hacia cero.

Para probar que este espacio es un espacio topológico basta probar que la adherencia definida a partir de las sucesiones es indempotente. Una vez probado esto, es inmediato que es separado y sucesional.

Probaremos la idempotencia de la adherencia demostrando que $f \varepsilon \overline{\overline{E}}$ implica $f \varepsilon \overline{E}$. En efecto si $f \varepsilon \overline{\overline{E}}$, se tiene $f = \lim f_n$ en donde $f_n \varepsilon \overline{E}$, y por lo tanto: $f_n = \lim f_{n,m}$ en donde $f_{m,n} \varepsilon E$.

Sean C, C_n y $C_{n,m}$ los conjuntos de puntos en que respectivamente las funciones f, f_n y $f_{n,m}$ son distintas de cero y sea B la reunión de todos esos conjuntos; B es numerable y sea b_1, b_2, ... b_i, ... sus puntos. Si ponemos:

$$a_i = f(b_i) \; ; \qquad a_{i;n} = f_n(b_i) \; ; \qquad a_{i;n,m} = f_{n,m}(b_i)$$

podemos identificar cada función con un punto del espacio E_ω de Fréchet (espacio de las sucesiones numéricas con convergencia puntual), poniendo:

$$A = (a_1, \ldots a_i \ldots) \; ; \qquad A_n = a_{1;n}, \ldots a_{i;n} \ldots);$$
$$A_{n,m} = (a_{1;n,m}, \ldots a_{i;n,m}, \ldots).$$

Como,

$$\lim_{m \to \infty} a_{i;n,m} = a_{i;n} \qquad \lim_{n \to \infty} a_{i;n} = a_i$$

en el E_ω se tiene:

$$\lim_{m \to \infty} A_{n,m} = A_n \; ; \qquad \lim_{n \to \infty} A_n = A .$$

Como E es metrizable (Fréchet [1], pág. 82), existe una sucesión A_{n_j,m_j} que converge hacia A, luego para cada i:

$$\lim_{j \to \infty} f_{n_j,m_j}(b_i) = \lim_{j \to \infty} a_{i;n_j,m_j} = a_i = f(b_i)$$

Por lo tanto para $x \varepsilon B$, $\lim f_{n_i,m_i}(x) = f(x)$ y como para $x \varepsilon CB$, $f_{n_j,m_j}(\lambda) = 0 = f(x)$, se tiene que en el espacio X, $f = \lim.$ f_{n_i,m_j} y por lo tanto $f \varepsilon \overline{E}$, como queríamos probar.

Es además casi inmediato que la topología es compatible con la estructura vectorial, luego X *es un espacio vectorial topológico, separado y sucesional.*

Vamos a demostrar ahora que X *no es metrizable.* Para ello empezaremos por considerar el conjunto E de X formado por las funciones $f_{a,n}(x)$ definidas para todo a del conjunto de definición de las funciones y para todo entero positivo n por la condición:

$$(22) \qquad f_{a,n}(a) = 1/n; \quad \text{para} \quad x \neq a; \quad f_{a,n}(x) = 0$$

Es claro que E no es numerable y vamos a probar que tiene la propiedad siguiente: *todo entorno de cero contiene el conjunto* E *con la posible excepción de un conjunto finito de puntos.* En efecto; Sea V un entorno de cero y $F = E \cap CV$. Para demostrar la propiedad vamos a probar que el suponer F infinito conduce a una contradicción. Si F es infinito es entonces posible extraer de F una sucesión de elementos f_{a_j, n_j} distintos entre sí. Consideremos dos casos:

En el primer caso hay infinitos índices n_i distintos; podemos entonces extraer de la sucesión n_i una subsucesión n_j estrictamente creciente y la subsucesión f_{a_i, n_i} cumplirá las condiciones siguientes:

$$f_{a_i, n_i} \varepsilon E \cap CV; \quad \lim n_i = \infty \tag{23}$$

Por lo tanto para todo x se tiene:

$$| f_{a_i, n_i}(x) | \leq 1/n_i \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

lo que quiere decir que en el espacio X la sucesión f_{a_i, n_i} tiende a cero y por consiguiente desde un valor de i sus elementos pertenecen a V lo que está en contradicción con (23).

El segundo caso será cuando no haya infinitos índices n_j distintos y entonces hay uno de ellos que se repite indefinidamente; llamemos p al valor de este índice y tenemos que la sucesión f_{a_j, n_j} contiene una subsucesión $f_{a_j, p}$ con las condiciones:

$$f_{a_i, p} \varepsilon E \cap CV; \quad l \neq k \Longrightarrow a_l \neq a_k \tag{24}$$

Entonces dado un x fijo cualquiera se tiene $f_{a_i, p}(x) = 0$, salvo eventualmente para un solo índice i en el caso en que a_j sea igual a x; por lo tanto para todo x, $f_{a_i,p}$ converge hacia cero y basta repetir el razonamiento anterior.

Nos falta sólo probar que X no es metrizable; si lo fuese existiría un sistema fundamental numerable de entornos V_n del origen; como además X es separado se tiene:

$$0 = \bigcap_1^\infty V_n \tag{25}$$

Pero acabamos de probar que $E \cap CV_n$ es finito, luego es numerable el conjunto $\bigcup_1^\infty (E \cap CV_n) = E \cap (\bigcup_1^\infty CV_n)$ y lo seguirá siendo si le añadimos el conjunto (25) que tiene solo un punto, luego tendremos que es numerable:

$$E \cap [\bigcup_1^\infty CV_n] \cup [\bigcap_1^\infty V_n] = E$$

lo que implica contradicción, puesto que E no es numerable.

Queda así probado que X *no es metrizable.*

Puede generalizarse este ejemplo si se reemplaza el conjunto de las funciones reales por el conjunto producto P de una infinidad no numerable de espacios vectoriales metrizables y se toma como espacio X el subconjunto de los puntos de P que tienen nulas todas sus componentes salvo un conjunto numerable.

La demostración sigue las mismas líneas que la anterior usando la propiedad de que el producto de una infinidad numerable de espacios metrizables es metrizable.

12. *Condición de continuidad de una aplicación diferenciable.*

TEOREMA 13. *Sea* X *un espacio sucesional. Entonces cualquier aplicación de* X *en otro espacio* Y *diferenciable en un punto es continua en dicho punto.*

Si el espacio no es sucesional, entonces cualquiera que sea el espacio Y, *con más de un punto, existen siempre aplicaciones de* X *en* Y *diferenciables en un punto y discontinuas en él.*

Para demostrar este teorema tendremos que probar previamente el siguiente:

TEOREMA 14. *Sea* X *un espacio sucesional y sea* x_n *una sucesión de puntos de* X, *distintos de cero, y convergente hacia cero.*

Existe entonces una subsucesión x_{n_m} *de* x_n *y una sucesión* λ_m *de números reales positivos no nulos con* $\lim \lambda_m = \infty$, *tal que la sucesión* $y_m = \lambda_m \cdot x_{n_m}$ *converge hacia cero.*

En efecto supongamos que existiese una sucesión x_n de puntos de X, distintos de cero y convergente hacia cero y tal que cualesquiera que sean la subsucesión x_{n_m} y la sucesión λ_m de números reales positivos no nulos, con $\lim \lambda_m = \infty$, la sucesión $y_m = \lambda_m \,.\, x_{n_m}$ no converge hacia cero.

Vamos a ver que esta hipótesis conduce a una contradicción, con lo que quedará probado el teorema 14.

De la hipótesis se deduce que y_m no converge hacia ningún punto, pues si $\lambda_m \,.\, x_{n_m}$ converge hacia x, entonces tomando $\mu_m = {\lambda_m}^{1/2}$, $\lim \mu_m = \infty$ y entonces:

$$\lim \mu_m \,.\, x_{n_m} = \lim {\mu_m}^{-1} \,.\, (\lambda_m \,.\, x_{n_m}) = 0.$$

contra la hipótesis.

Tomemos ahora el conjunto E de puntos de X formado por la doble sucesión:

$$y_{n,m} = x_n + k\,(n, m) \,.\, x_{n+m} \tag{26}$$

en donde m y n toman todos los valores 1, 2, ... y $k\,(n, m)$ es igual a n si $x_n + n \,.\, x_{n+m} \neq 0$ y a $n + 1$ en el caso contrario. De esta forma se obtiene que 0 no pertenezca a E.

Demos a n un valor arbitrario fijo p; como $k\,(p, m)$ sólo puede tomar los valores p y $p + 1$, se deduce, llamando z_m a $y_{p,m}$:

$$\lim z_m = \lim y_{p,m} = x_p \tag{27}$$

Luego:

$$x_n \,\varepsilon\, \overline{E} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{28}$$

y como x_n converge hacia cero se tiene, siendo el espacio topológico:

$$0 \,\varepsilon\, \overline{\overline{E}} = \overline{E}. \tag{29}$$

Consieremos ahora una sucesión cualquiera:

$$y_i = x_{n_i} + k\,(n_i, m_i) \,.\, x_{n_i+m_i} \tag{30}$$

extraida de la (26) y compuesta de elementos distintos. Si demostramos que cualquier sucesión así definida no converge hacia cero, como cero no pertenece a E y como el espacio es sucesional tendremos que 0 no pertenece a E, en contradicción con (29).

La demostración del teorema 14 queda entonces reducida a probar que la sucesión (30) no converge hacia cero. Siendo $y_i \neq y_j$

no podrán nunca cumplirse simultáneamente las condiciones $n_i = n_j$, $m_i = m_j$. Consideremos dos casos.

El primer caso es cuando el conjunto de valores del índice n_i no es acotado; entonces existe una subsucesión z_r de y_i de la forma:

$$z_r = x_{n_r} + k(n_r, m_r) \cdot x_{n_r+m_r} \tag{31}$$

en la que los números naturales n_r forman una sucesión creciente lo que implica $\lim\limits_{r \to \infty} k(n_r, m_r) = \infty$ y $\lim\limits_{r \to \infty} x_{n_r} = 0$; por la primera condición el segundo sumando de (31) no tiene límite y como el primero lo tiene, se deduce que z_r no es convergente y entonces la sucesión y_i que la contiene, tampoco lo es.

En el segundo caso el conjunto de valores del índice n_i es acotado; entonces hay uno que se repite indefinidamente y (30) contiene una sucesión de la forma:

$$z_k = x_p + k(p, m_k) \cdot x_{p+m_k} \tag{32}$$

en fonde p es fijo y los m_k forman una sucesión creciente.

Como $k(p, m_k)$ sólo puede tomar los valores p o $p + 1$, el segundo sumando de (32) converge hacia cero luego z_k converge hacia x_p que es distinto de cero y entonces la sucesión y_i, que contiene a la z_k no puede converger hacia cero.

Probado así el teorema 14 pasamos a la demostración del teorema 13.

Demostraremos la primera parte probando que si X es sucesional e Y cualquiera, una aplicación $y = f(x)$ discontinua en x_0 no puede ser diferenciable en ese punto. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $x_0 = 0$ y $f(0) = 0$.

Siendo $f(x)$ discontinua en el origen existe un $E \subset X$ tal que $0 \in \overline{E}$ y $0 \notin \overline{f(E)}$; como el espacio es sucesional existe entonces una sucesión a_n de elementos de E que converge hacia cero mientras que ni la sucesión $f(a_n)$ ni ninguna de sus sucesiones parciales converge hacia cero en Y.

Por el teorema 14 existe una subsucesión a_{m_i} y una sucesión de números reales λ_i distintos de cero y positivos, con $\lim \lambda_i = \infty$ tal que la sucesión $c_i = \lambda_i \cdot a_{m_i}$ converge hacia cero.

Definimos ahora la siguiente aplicación de la recta en X:

$$g(\lambda) = a_{m_i} \quad \text{para} \quad \lambda = 1/\lambda_i; \tag{33}$$

$g(\lambda) = 0$ en los puntos restantes.

Por lo tanto se tiene $g(0) = 0$ y entonces el cociente $g(\lambda) - g(0)/\lambda$ es igual en los puntos $\lambda = 1/\lambda_i$ a $\lambda_i \cdot a_{m_i} = c_i$ y es cero en los puntos restantes, luego, como $\lim c_i = 0$ se ve que $g(\lambda)$ es derivable en 0 y que $g'(0) = 0$.

Si $f(x)$ fuese diferenciable, entonces $G(\lambda) = f[g(\lambda)]$ tendría que ser derivable, y se tendría:

$$G'(0) = D[g'(0)] = D(0) = 0. \tag{34}$$

Vamos a ver que (34) no se cumple lo que implicará que $f(x)$ no es diferenciable y quedará entonces probada la primera parte del teorema. Si se cumpliese (34), tendríamos, tomando $\mu_i = 1/\lambda_i$:

$$\lim.\ \mu_i = 0 \qquad \lim.\ \frac{G(\mu_i) - G(0)}{\mu_i} = 0$$

y por lo tanto, como $1/\lambda_i$ tiende a cero se tiene:

$$0 = \lim.\ \frac{1}{\lambda_i} \cdot \frac{G(\mu_i) - G(0)}{\mu_i} = \lim.\ f[g(1/\lambda_i)] = \lim.\ f(a_{m_i}).$$

lo que es contradictorio, puesto que al principio de la demostración fue establecido que $f(a_{m_i})$ no converge hacia cero.

Probada así la primera parte del teorema 13 pasemos a probar la segunda. Como X no es sucesional existe un subconjunto A de X tal que $\widetilde{A} \neq \overline{A}$ y de esta relación y de la (18) se deduce que existe un punto $a \varepsilon \overline{A}$ y tal que ninguna sucesión de puntos de A converge hacia a; en particular $a \notin A$.

Defino ahora la siguiente aplicación de X en Y:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ para } x \notin A \\ y_0 \neq 0 \text{ para } x \varepsilon A \end{cases} \tag{35}$$

Se tiene $f(a) = 0$. En todo entorno E de a en X hay puntos en los que $f(x) = y_0 \neq f(a)$. Como Y es separado, f *es discontinua en* a.

Vamos a probar ahora que f(x) *es diferenciable en* a *con diferencial nula.* Sea $x = g(\lambda)$ una aplicación de los reales en X derivable en λ_0 y con $g(\lambda_0) = a$.

Existe siempre un η tal que $|\lambda - \lambda_0| \leqq \eta$ implica $g(\lambda) \notin R$. En efecto: en el caso contrario existiría una sucesión λ_n convergente hacia λ_0 y tal que $g(\lambda_n) = x_n \varepsilon A$. Por la continuidad de $g(\lambda)$, lim.

$x_n = \lim. g(\lambda_n) = g(\lambda_0) = a$, contra lo establecido de que no existe ninguna sucesión de puntos de A convergente hacia a.

Por lo tanto para $|\lambda - \lambda_0| \leqq \eta$, $G(\lambda) = f[g(\lambda)] = 0$, luego $G'(\lambda_0) = 0$, lo que prueba que f es diferenciable con diferencial nula y queda así enteramente probado el teorema 13.

13. *Caso de los espacios vectoriales* $\mathcal{L}^*$.

S. F. L. de Foglio [1] ha estudiado la diferencial en el sentido de Hadamard-Fréchet para los espacios vectoriales $\mathcal{L}^*$, es decir espacios vectoriales con una estructura definida por sucesiones convergentes (no necesariamente topológica en el sentido de Bourbaki) compatible con su estructura vectorial y probó que en este caso una aplicación diferenciable podría ser discontinua.

Apoyándonos en los resultados anteriores vamos a dar ahora una condición necesaria y suficiente para la continuidad de las aplicaciones diferenciables; dicha condición será la propiedad expresada en el teorema 14; precisando, vamos a demostrar el siguiente teorema:

TEOREMA 15. *Sea* X *un espacio* $\mathcal{L}^*$ *vectorial con la propiedad siguiente: Si* x_n *es una sucesión de puntos de* X *distintos de cero y que converge hacia cero, existe entonces una subsucesión* x_{n_m} *de* x_n *y una sucesión* λ_m *de números reales positivos no nulos, con* lim. $\lambda_m = \infty$, *tales que la sucesión* $\mathrm{y}_m = \lambda_m \cdot x_{n_m}$ *converge hacia cero.*

Entonces cualquiera que sea el espacio $\mathcal{L}^*$ *vectorial* Y, *cualquier aplicación* $\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$ *diferenciable en un punto es continua en dicho punto.*

Si el espacio X *no tiene la propiedad anterior, entonces cualquiera que sea el espacio* Y *con más de un punto es posible definir aplicaciones de* X *en* Y *diferenciales y discontinuas.*

La demostración de la primera parte del teorema es análoga a la de la primera parte del teorema 13; si $f(x)$ es discontinua en el origen existe entonces una sucesión a_n de elementos de X convergente hacia cero y tal que ni la sucesión $f(a_n)$ ni ninguna de sus subcesiones converge hacia $f(0)$. Establecido esto, la demostración sigue punto por punto la del teorema 13.

Pasemos a la demostración de la segunda parte. Supongamos que en X existe una sucesión x_n de puntos distintos de cero con lim. $x_n = 0$ y tal que cualesquiera que sean la subsucesión x_{n_m} de x_n y la sucesión λ_m de números reales positivos no nulos con lim. $\lambda_m = \infty$, la sucesión $y_m = \lambda_m \cdot x_{n_m}$ no converge hacia cero.

Entonces la sucesión y_m no converge hacia ningún punto; la demostración es la misma que la hecha al probar el teorema 13.

Definimos ahora la aplicación $y = f(x)$ de X en Y de la manera siguiente:

$$f(x_n) = a \neq 0;$$

$f(x) = 0$ en todos los restantes puntos.

Entonces $f(0) = 0$, lim. $x_n = 0$, lim. $f(x_n) = a$, luego, f *es discontinua en el origen.*

Vamos a probar que es *diferenciable en el origen con diferencial nula.* En efecto:

Sea $x = g(\lambda)$ una aplicación de los reales en X que cumpla las condiciones de la definición 1. Entonces existe un η tal que para $|\lambda - \lambda_0| \leqq \eta$, $g(\lambda)$ no toma ningún valor de la sucesión x_n. En efecto: en el caso contrario existiría una sucesión $\lambda_m \to \lambda_0$ y tal que $g(\lambda_m) = x_{n_m}$ y tendríamos:

$$\frac{g(\lambda_m) - g(\lambda_0)}{\lambda_m - \lambda_0} = \frac{1}{\lambda_m - \lambda_0} \cdot x_{n_m}$$

y como $1/\lambda_m - \lambda_0$ tiende a ∞ no existe el límite del primer miembro en contradicción con la derivabilidad de g.

Por lo tanto, para $|\lambda - \lambda_0| \leqq \eta$ se tiene $G(\lambda) = f[g(\lambda)] = 0$, luego $G(\lambda)$ es derivable en λ_0 con $G'(\lambda_0) = 0$, lo que prueba que $f(x)$ es diferenciable en 0 con diferencial nula y queda así enteramente probado el teorema 15.

De acuerdo con el teorema 14 todos los espacios $\mathcal{L}^*$ vectoriales que sean además topológicos en el sentido de Bourbaki tienen la propiedad del teorema 15. Si no lo son pueden o no tenerla como lo probarán los siguientes ejemplos:

No cumple esa propiedad el espacio Q de Fréchet ([1], pág. 162). Los puntos de ese espacio son las funciones reales de variable real y las sucesiones convergentes se definen por la convergencia en cada punto.

Como el conjunto de las sucesiones de números reales tiene la potencia del continuo es posible establecer una correspondencia biunívoca entre los reales y el conjunto de las sucesiones de forma que a cada x le corresponda una sucesión $S(x) = \{u_1(x), \ldots u_n(x), \ldots\}$.

Definimos ahora la siguiente sucesión de funciones $f_i(x)$ elementos del espacio Q de la forma siguiente: tomo un x cualquiera, si la sucesión correspondiente no tiene límite infinito hago $f_i(x) = 0$ para todo i; si tiene límite infinito, desde un i_0 es distinta de cero; entonces pongo $f_i(x) = 0$ para $i < i_0$ y para $i \geq i_0$ pongo $f_i(x) = u_i(x)^{-1}$. Es claro que entonces se tiene, para todo x, $\lim. f_i(x) = 0$, luego en el espacio Q la sucesión f_i tiende a cero.

Tomo ahora una subsucesión cualquiera f_{i_j} de f_i y una sucesión cualquiera de números reales positivos no nulos λ_j con $\lim. \lambda_j = \infty$. Defino ahora la siguiente sucesión u_n: si n es igual a uno de los índices n_j pongo $u_{n_j} = \lambda_j$; si n no es igual a un índice n_j ponemos $u_n = n$. Es claro que se tiene $\lim. u_n = \infty$. Sea x_0 el punto correspondiente a la sucesión u_n, tenemos $f_{i_j}(x_0) = \lambda_j^{-1}$, luego $\lambda_j \cdot f_{i_j}(x_0) = 1$, y por lo tanto $\lambda_j \cdot f_{i_j}$ no converge en el espacio Q hacia cero, luego Q no tiene la propiedad del teorema 15, y es entonces posible definir en Q aplicaciones diferenciables y no continuas.

Un ejemplo de espacio vectorial $\mathcal{L}^*$ no topológico en el sentido de Bourbaki con la propiedad del teorema 15, es el espacio $\mathcal{L}^*$ de Schwartz cuando se define su estructura por las sucesiones convergentes en la forma indicada en Schwartz [2], pág. 3. Vimos en el párrafo 10 que esta adherencia definida por sucesiones no era idempotente luego la estructura no es topológica.

Sea ahora φ_n una sucesión convergente hacia cero en el espacio. Por la convergencia uniforme de $\varphi_n^{(p)}(x)$ hacia cero se puede fácilmente construir una subsucesión de funciones $\varphi_{n_m}(x)$ con $n_0 < n_1 < \ldots$ y tal que para todo x, y para $p \leq 0,1, \ldots m$, $|\varphi_{n_m}^{(p)}(x)| \leq (m+1)^{-2}$.

Si tomamos ahora $\lambda_m = m + 1$, dado un valor fijo cualquiera de p, se tiene para $m > p$, y cualquiera que sea x; $|\lambda_m \cdot \varphi_{n_m}^{(p)}(x)| \leq (m+1)^{-1}$, luego $\lambda_m \cdot \varphi_{n_m}^{(p)}(x)$ converge uniformemente hacia cero. Como la multiplicación por un escalar deja invariantes los soportes se deduce que $\lambda_m \cdot \varphi_{n_m}$ converge hacia cero en el espacio, luego éste tiene la propiedad del teorema 15.

Obtenemos así el siguiente resultado: si la estructura de $\mathcal{D}$ se define por las sucesiones convergentes, toda aplicación diferenciable definida en $\mathcal{D}$ es continua; en cambio si se define como en el párrafo 10 con una estructura topológica se pueden definir en $\mathcal{D}$ aplicaciones diferenciables y no continuas, puesto que como vimos en dicho párrafo, el espacio no es entonces sucesional y se puede aplicar el teorema 13.

14. *Relaciones de la diferencial de Hadamard-Fréchet con las de Silva y Hyers.*

Como dijimos en la introducción, la diferencial de Hadamard-Fréchet tiene un mayor campo de aplicación que las de Silva y Hyers por no necesitar la hipótesis de que los espacios en que se aplica son localmente convexos. Vamos a estudiar ahora las relaciones de estas dos definiciones con la de Hadamard-Fréchet dentro del campo de los espacios localmente convexos.

Silva [1] introduce una gama de definiciones de la diferencial; para nuestro propósito sólo nos interesa la forma más fuerte, la que él denomina diferenciabilidad local por ser la que coincide con la diferencial de Stolz-Fréchet en el caso de los espacios normados. Cuando digamos que una aplicación es diferenciable en el sentido de Silva supondremos siempre que es totalmente diferenciable.

Silva define la diferencial como una aplicación lineal y acotada, mientras que nosotros la hemos supuesto lineal y continua. Es sabido que toda aplicación lineal y continua entre dos espacios localmente convexos es acotada, siendo falsa la recíproca. Ambos conceptos son idénticos en los espacios denominados bornológicos por Bourbaki ([1], Cap. III, pág. 13).

Cuando se trate de espacios no bornológicos una aplicación diferenciable en el sentido de Silva puede no serlo en el de Hadamard-Fréchet. En efecto, basta considerar una aplicación $E(x)$ lineal, acotada y no continua. $E(x)$ coincide en todos sus puntos con su diferencial en el sentido de Silva. Supongamos que fuese diferenciable en el sentido de Hadamard-Fréchet en un punto x_0; tomemos $g(\lambda) = x_0 + \lambda a$, siendo a un punto cualquiera de X. Se tiene, $g(0) = x_0$, y $g'(0) = a$. Sea $G(\lambda) = E[g(\lambda)] = E(x_0) + \lambda \,.\, E(a)$. Si D es la diferencial de E se deberá tener

$$D(a) = D[g'(0)] = \lim_{\lambda \to 0} \frac{G(\lambda) - G(0)}{\lambda} = E(a)$$

y como a es un punto cualquiera de X deberán ser idénticas D y E, lo que es imposible por ser una continua y la otra no.

Cuando se trate de espacios bornológicos, como la diferencial de Silva coincide con la derivada cuando la variable independiente es el cuerpo de los reales y además satisface el teorema de las aplicaciones compuestas, entonces, de acuerdo con lo dicho en el párrafo 4, toda aplicación diferenciable en el sentido de Silva lo será en el sentido de Hadamard-Fréchet.

Haremos observar que si en nuestra definición de la diferencial, le hubiéramos impuesto a ésta la condición de ser lineal y acotada en vez de lineal y continua, las propiedades que hemos demostrado en la diferencial seguirían siendo válidas y se obtendría entonces que toda aplicación diferenciable en el sentido de Silva (entre espacios bornológicos o no bornológicos) lo sería también en este sentido generalizado de Hadamard-Fréchet.

Con respecto a la definición de Hyers, en la que la diferencial es lineal y continua, por las mismas razones dadas para la de Silva, se ve que toda aplicación diferencialbe en el sentido de Hyers lo será en el de Hadamard-Fréchet.

Cuando los espacios son normados, las definiciones de Silva y de Hyers coinciden con la de Stolz-Fréchet y, como ya dijimos, Fréchet [3] probó que existían aplicaciones diferenciables en el sentido de Hadamard-Fréchet que no lo eran en el de Stolz-Fréchet.

Vamos ahora a generalizar este resultado para obtener fuera del campo de los espacios metrizables una aplicación diferenciable en el sentido de Hadamar-Fréchet y no diferenciable ni con la definición de Silva ni con la de Hyers.

Sea $\mathcal{D}^0$ el espacio real unidimensional de Schwarz y consideremos la aplicación de $\mathcal{D}^0$ en R,

$$M(\varphi) = \text{Max. } \varphi(x) \tag{36}$$

que está bien definida puesto que φ es continua y de soporte acotado. Vamos a demostrar los siguientes resultados:

a) *Si* $\varphi_0(x)$ *es una función que alcanza su máximo en un solo punto* x = c, M(φ) *es diferenciable en el sentido de Hadamard-Fréchet, en el punto* φ_0 *y su diferencial es la delta de Dirac en el punto* c.

b) *Si* φ_1(x) *alcanza su máximo en más de un punto,* M *no es diferenciable, en el sentido de Hadamard-Fréchet en el punto* φ_1.

c) M *no es diferenciable en ningún punto cuando se consideran la definición de Silva o la de Hyers.*

Vamos a probar a). Tomemos una aplicación de la recta en $\mathcal{D}^0$ que cumpla las condiciones de la definición 1. Será entonces una función real $g(\lambda, x)$ tal que: para λ fijo $g(\lambda, x)$ pertenece a $\mathcal{D}^\circ$; $g(\lambda_0, x) = \varphi_0(x)$ y además que exista en $\mathcal{D}^\circ$ el límite para $\Delta\lambda \longrightarrow 0$, de

$$Q\,(\Delta\lambda, x) = \frac{g(\lambda_0 + \Delta\lambda, x) - g(\lambda_0, x)}{\Delta\lambda} \tag{37}$$

Es claro que ese límite no puede ser otro que $g_\lambda{}'(\lambda_0, x)$, lo que implica que esa derivada existe y es un punto de $\mathcal{D}^\circ$; de las propiedades de $\mathcal{D}^\circ$ se deduce que la convergencia de $Q\,(\Delta\lambda, x)$ hacia $g_\lambda{}'(\lambda_0, x)$ es uniforme respecto de x, luego se tiene:

$$\lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\text{Max.}\,|\,g(\lambda_0 + \Delta\lambda, x) - \varphi_0(x) - \Delta\lambda g_\lambda{}'(\lambda_0, x)\,|}{\Delta\lambda} = 0. \tag{38}$$

en donde el máximo se toma naturalmente respecto a la variable x.

Si consideramos ahora la aplicación real de variable real $G(\lambda) = M[g(\lambda, x)]$, probaremos a), si probamos que $G(\lambda)$ es derivable en λ_0 y que $G'(\lambda_0) = g_\lambda{}'(\lambda_0, c)$, puesto que el segundo miembro de esta igualdad es el valor de la delta de Dirac en c, aplicada a $g'(\lambda_0, x)$. Todo se reduce entonces a probar:

$$\lim_{\Delta\lambda \to 0} H(\Delta\lambda) = 0. \tag{39}$$

siendo:

$$H(\Delta\lambda) = \frac{\text{Max.}\ [g(\lambda_0 + \Delta\lambda, x)] - \text{Max.}\ [\varphi_0(x)]}{\Delta\lambda} - g_\lambda{}'(\lambda_0, c) \tag{40}$$

Se tiene $H(\Delta\lambda) = H_1(\Delta\lambda) + H_2(\Delta\lambda)$, siendo:

$$H_1(\Delta\lambda) = \frac{\text{Max.}\,[g(\lambda_0 + \Delta\lambda, x)] - \text{Max.}\,[\varphi_0(x) + \Delta\lambda g_\lambda{}'(\lambda_0, x)]}{\Delta\lambda} \tag{41}$$

$$H_2(\Delta\lambda) = \frac{\text{Max.}\,[\varphi_0(x) + \Delta\lambda g_\lambda{}'(\lambda_0, x)] - \text{Max.}\,[\varphi_0(x)]}{\Delta\lambda} - g'\,(\lambda_0, c) \tag{42}$$

y demostraremos (39) demostrando que H_1 y H_2 tienen límite cero. Para H_1 es casi inmediato si se tiene en cuenta (38) y que:

$$|\,H_1(\Delta\lambda)\,| \leqq \frac{\text{Max.}\,|\,g(\lambda_0 + \Delta\lambda, x) - \varphi_0(x) - \Delta\lambda g_\lambda{}'(\lambda_0, x)\,|}{|\,\Delta\lambda\,|}$$

Se tiene:

$$H_2\,(\Delta\lambda) = \frac{\text{Max.}\,[\varphi_0(x) + \Delta\lambda g_\lambda{}'(\lambda_0, x) - \varphi_0(c) - \Delta\lambda g_\lambda{}'(\lambda_0, c)]}{\Delta\lambda} \tag{43}$$

Para $x = c$, la función a maximar es nula, luego el numerador de (43) es mayor o igual que cero y obtendremos:

$$| H_2(\Delta\lambda) | = \text{Max.} \left[\frac{\varphi_0(x) - \varphi_0(c)}{| \Delta\lambda |} \pm g_\lambda{}'(\lambda_0, x) \pm g_\lambda{}'(\lambda_0, c) \right] \quad (44)$$

Dado ahora un ε, existe un intervalo I que contiene a c en su interior y tal que:

$$| g'(\lambda_0, x) - g'(\lambda_0, c) | < \varepsilon \quad (45)$$

para todo x de I.

Como $\varphi_0(x)$ sólo alcanza su máximo en c, entonces para x perteneciente al complementario de I, se tiene: $\varphi_0(x) - \varphi_0(c) \leq m < 0$; por lo tanto, para $| \Delta\lambda |$ suficientemente pequeño

$$\frac{\varphi_0(x) - \lambda_0(c)}{| \Delta\lambda |}$$

llega a ser tan grande como se quiera y negativo; $g_\lambda{}'(\lambda_0, x - - g_\lambda{}'(\lambda_0, c)$ es acotado en la recta y por lo tanto en CI, luego para $| \Delta\lambda |$ suficientemente pequeño la función a maximar de (44) es negativa y como el máximo es positivo, lo tiene que alcanzar en I, luego:

$$| H_2(\Delta\lambda) | \leq \underset{x \in I}{\text{Max}} \left\{ \frac{\varphi_0(x) - \varphi_0(c)}{| \Delta\lambda |} \pm [g_\lambda{}'(\lambda_0, x) - g_\lambda{}'(\lambda_0, c)] \right\} \quad (46)$$

el signo más correspondiendo a $\Delta\lambda < 0$ y el menos a $\Delta\lambda < 0$.

El primer sumando de la función a maximar en (46) es negativo, luego, teniendo en cuenta (45) obtenemos para $| \Delta\lambda | \leq \eta$,

$$| H_2(\Delta\lambda) | \leq \underset{x \in I}{\text{Max}} \; | g_\lambda{}'(\lambda_0, x) - g_\lambda{}'(\lambda_0, c) | \leq \varepsilon \quad (47)$$

luego $\lim_{\Delta\lambda \to 0} H_2(\Delta\lambda) = 0$, quedando así probado (39) y por lo tanto la propiedad a).

Vamos ahora a probar la propiedad b). Sea $\varphi_1(x)$ una función de $\mathcal{D}^\circ$ que alcanza su máximo al menos en dos puntos distintos c y c'; consideremos la aplicación $g(\lambda, x) = \varphi_1(x) + \lambda\varphi(x)$ de R en $\mathcal{D}^\circ$, siendo $\varphi(x)$ una función fija arbitrario de $\mathcal{D}^\circ$. Se tiene:

$$g(0, x) = \varphi_1(x) \; ; \; \frac{g(\lambda, x) - g(0, x)}{\lambda} = \varphi(x)$$

luego g cumple las condiciones de la definición 1, siendo $\varphi(x)$ su derivada en $\lambda = 0$. Se tiene evidentemente:

$$0 \leq \operatorname{Max}\,[\varphi_1(x) + \lambda\varphi(x)] - \varphi_1(c) - \lambda\varphi(c)$$

o lo que es lo mismo:

$$\lambda\varphi(c) \leq M[g(\lambda, x)] - M[g(0, x)]$$

luego poniendo $G(\lambda) = M[g(\lambda, x)]$ se tiene:

$$\text{para } \lambda < 0, \ \varphi(c) \leq \frac{G(\lambda) - G(0)}{\lambda};$$

$$\text{para } \lambda < 0, \ \varphi(c) \geq \frac{G(\lambda) - G(0)}{\lambda}.$$

Si M fuese diferenciable en φ_1, con diferencial D se tendría por las desigualdades anteriores: $\varphi(c) \leq G'(0)$; $\varphi(c) \geq G'(0)$, luego:

$$D(\varphi) = D[g'(0)] = G'(0) = \varphi(c)$$

y esto vale para cualquier función φ de $\mathscr{D}^\circ$, por lo tanto si existe la diferencial tendría que ser la delta de Dirac en el punto c, pero este mismo razonamiento nos probaría que la diferencial debería ser la delta en c', luego, por el teorema 3, la diferencial no existe como queríamos demostrar.

Pasemos ahora a la demostración de c). Si M fuese diferenciable en el sentido de Silva, como se trata de una aplicación entre espacios bornológicos, tendría que serlo también en el sentido de Hadamard-Fréchet.

Por lo tanto si $\varphi_0(x)$ alcanza su máximo en más de un punto, M no puede ser diferenciable en el sentido de Silva en φ_0. Si $\varphi_0(x)$ alcanza su máximo en un solo punto la diferencial en el sentido de Silva, si existe, tiene que coincidir con la de Hadamard-Fréchet, es decir tendrá que ser la delta de Dirac en el punto c en el cual alcanza φ_0 su máximo. Entonces según la definición de Silva [1],

$$I(h) = M(\varphi_0 + h) - M(\varphi_0) - h(c)$$

tendrá que ser un infinitésimo de orden superior a uno, lo que quiere decir que $I(t \,.\, h)/t$ converge uniformemente sobre todo conjunto acotado, cuando el número real t tiende a cero.

Vamos a probar que $I(h)$ no es infinitésimo de orden superior a uno, y con ello probaremos que M no es diferenciable en el sentido de Silva en φ_0.

Tomemos un conjunto acotado B de $\mathcal{D}^0$ definido por las condiciones siguientes: los soportes de las funciones h de B están contenidos en el soporte de φ_0 y además:

$$h \varepsilon B \text{ implica } | h(x) | < 1 \text{ para todo } x. \tag{48}$$

Tenemos: $I(h) = \text{Máx.} [\varphi_0(x) + h(x)] - \varphi_0(c) - h(c)$, lo que es lo mismo:

$$I(h) = \text{Max } | h(x) | \text{ . Max} \left[\frac{h(x) - h(c)}{\text{Max.} | h(x) |} - \frac{\varphi_0(c) - \varphi_0(x)}{\text{Max.} | h(x) |} \right] \tag{49}$$

Sea ahora η un valor real cualquiera mayor que cero; existe siempre un λ tal que:

$$\underset{|x-c|<\lambda}{\text{Max}} \sqrt{\varphi_0(c) - \varphi_0(x)} < \eta \tag{50}$$

Siempre podemos encontrar una función $h_\eta(x)$ de B que cumpla las condiciones siguientes:

$$h_\eta(x) \geq 0; \tag{51}$$

$$h_\eta(c) = 0 \tag{52}$$

$$\text{Max } h_\eta(x) = \underset{|x-c|<\lambda}{\text{Max}} \sqrt{\varphi_0(c) - \varphi_0(x)} < \eta \tag{53}$$

$$h_\eta(x) = 0 \text{ para } | x - c | \geq \lambda \tag{54}$$

Es claro que $h_\eta(x)$ alcance su máximo en $| x - c | < \lambda$; sea c' un punto en que dicho máximo sea alcanzado. De (49) y (51), deducimos:

$$I(h_\eta) \geq \text{Max } [h_\eta(x)] \times \left[\frac{h_\eta(c') - h_\eta(c)}{\text{Max } [h_\eta(x)]} - \frac{\varphi_0(c) - \varphi_0(c')}{\text{Max } [h_\eta(x)]} \right] \tag{55}$$

De (52) deducimos:

$$\frac{h_\eta(c') - h_\eta(c)}{\text{Max } [h_\eta(x)]} = 1 \tag{56}$$

y además teniendo en cuenta (53) y (50), obtenemos:

$$\frac{\varphi_0(c) - \varphi_0(c')}{\text{Max } [h_\eta(x)]} \leq \frac{\varphi_0(c) - \varphi_0(c')}{\sqrt{\varphi_0(c) - \varphi_0(c')}} = \sqrt{\varphi_0(c) - \varphi_0(c')} < \eta \tag{57}$$

De (55), 56) y (57) deducimos:

$$I(h_\eta) \geq (1 - \eta) \,.\, \text{Max}\,[h_\eta(x)] \qquad (58)$$

Vamos a ver que de estas fórmulas se deduce que $I(h)$ no es un infinitésimo de orden superior a uno. Si lo fuese $I(th)/t$ debería converger uniformemente hacia cero en B, es decir que dado un ε, debería existir un δ tal que:

$$|\,t\,| \leq \delta \text{ implica } \left| \frac{I(th)}{t} \right| \leq \varepsilon\,, \qquad (59)$$

Tomemos un valor cualquiera de δ y sea η un real positivo menor que $\delta/2$ y que $1/2$. Consideremos para ese valor de η la función $h_\eta(x)$ definida anteriormente y tomemos un valor real t_0 que cumpla las conriciones:

$$0 < \text{Max}\,[h_\eta(x)] < t_0 < 2\,.\,\text{Max}\,[h_\eta(x)] < 2\,\eta < 1. \qquad (60)$$

y definimos la función:

$$h_0(x) = t_0^{-1}\,.\,h_\eta(x) \qquad (61)$$

De (58) y (61) se deduce:

$$1/2 < \text{Max}\,[h_0(x)] < 1 \qquad (62)$$

lo que implica que h_0 pertenece a B. Se tiene:

$$\frac{I(t_0\,.\,h_0)}{t_0} = \frac{I[h_\eta(x)]}{\text{Max}\,[h_\eta(x)]} \cdot \frac{\text{Max}\,[h_\eta(x)]}{t_0} =$$

$$= \frac{I\,[h_\eta(x)]}{\text{Max}\,[h_\eta(x)]}\,.\,\text{Max}\,[h_0(x)]$$

y teniendo en cuenta (58) y (60) se deduce:

$$\frac{I\,(t_0\,h_0)}{t_0} \geq (1 - \eta)\,\frac{1}{2} > \frac{1}{4} \qquad (63)$$

Es decir cualquiera que sea δ existen un $t_0 < \delta$ y un h_0 de B que cumplen (63) lo que contradice (59) y queda así probado que M no es diferenciable en el sentido de Silva en ningún punto.

Con respecto a la diferenciabilidad de M en el sentido de Hyers, como en el caso anterior se ve que no existe la diferencial en φ_0, si $\varphi_0(x)$ alcanza su máximo en más de un punto y también que si $\varphi_0(x)$

alcanza su máximo en un solo punto c, la diferencial, si existe, tiene que ser la delta de Dirac en el punto c. Para que exista la, diferencial tiene que haber una seminorma de un sistema fundamental cualquiera de seminormas de $\mathcal{D}^{\circ}$ tal que:

$$I(h)/N(h) \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad N(h) \longrightarrow 0 \qquad (64)$$

Tomemos como sistema fundamental de seminormas en $\mathcal{D}^{\circ}$ el $H\{\varepsilon_n\}$ en donde $\{\varepsilon_n\}$ es una sucesión arbitraria decreciente de números reales mayores que cero y convergente hacia cero, siendo:

$$N\{\varepsilon_n\}(\varphi) = \operatorname{Sup.}_{n} \left[\operatorname{Max}_{|x| \geq n} [\,|\varphi(x)|\,/\,\varepsilon_n] \right] \qquad (65)$$

Fijemos una cualquiera de estas seminormas N y consideremos la familia $h_\eta(x)$ de funciones estudiadas anteriormente. Como todas ellas están contenidas en un compacto fijo, hay una constante k tal que:

$$N(h_\eta) \leq k \,.\, \operatorname{Max}\, [h_\eta(x)] \leq k \,.\, \eta \qquad (66)$$

luego $N(h_\eta) \longrightarrow 0$, cuando $n \longrightarrow 0$. Pero de (58) se deduce que para $\eta < 1/2$,

$$I(h_\eta)/N(h_\eta) \geq I(h_\eta)/k \,.\, \operatorname{Max}\, h_\eta(x) \geq 1/2\, k \qquad (67)$$

lo que está en contradicción con (64) y prueba que M no es diferenciable en el sentido de Hyers en ningún punto, quedando así demostrado c).

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Balanzat, *La diferencial en los espacios métricos afines.* (Mathematicae Notae, vol. 9, 1949).

[2] — — *La différentielle d'Hadamard-Fréchet dans les espaces vectoriels topologiques.* (C. R. Acad. Sc., vol. 251, p. 2459-61, 1960).

[1] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques.* (Hermann, Paris, 1953 et 1955).

[1] J. Dieudonné, *Foundations of modern analysis.* (Academic Press, New-York, 1960).

[1] K. Fan, *Sur quelques notions fondamentales de l'analyse générale.* (J. Math. pures et appl., vol. 21, 1942).

[1] S. F. L. de Foglio, *La différentielle au sens d'Hadamard-Fréchet dans les espaces L vectoriels.* (Portugaliae Mathematica, vol. 19, 1960).

[1] M. Fréchet, *Les espaces abstraits.* (Gauthier-Villars, Paris, 1951).

[2] — — *La notion de différentielle dans l'analyse générale.* (Ann. Ec. Norm. Sup., vol. 42, 1925).

[3] — — *Sur la notion de différentielle.* (J. Math. pures et appl., vol. 16, 1937).
[4] — — *La notion de différentielle sur un groupe abélien.* (Portugaliae Mathematica, vol. 7, 1948).
[1] J. Hadamard, *La notion de différentielle dans l'enseignement.* (Scripta Univ. Ab. Bib. Hierosalymitanarum, 1923).
[1] D. H. Hyers, *A generalization of Fréchet's differential.* (Revista de Ciencias, vol. 47, 1945).
[1] C. Kuratowski, *Topologie,* vol. I, segunda edición. (Warszawa, 1949).
[1] Mme. Lelong, *Dérivées et différentielles.* (C. D. U., Paris, 1960).
[1] A. Michal, *Le calcul différentiel dans les espaces de Banach.* (Gauthier-Villars, Paris, 1958).
[2] — — *Higher order differentials of functions with arguments and values in topological abelian groups.* (Revista de Ciencias, vol. 43, 1941).
[1] L. Schwartz, *Théorie des distributions,* vol. I, segunda edición. (Hermann, Paris, 1957).
[2] — — *Théorie élémentaire des distributions.* (C. D. U., Paris 1955).
[1] Sebastiao e Silva, *Le calcul différentiel et intégral dans les espaces localement convexes, réels ou complexes.* (Rend. Accad. N. Lincei, vol. 20, 1956 y vol. 21, 1956).
[2] — — *Conceitos de função diferenciável em espaços localmente convexos.* (Publicacões do Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa, 1957).