CATEGORIE DES FONCTEURS TYPES

par CHARLES EHRESMANN
(Université de Paris)

Le but de cet article est de donner la construction explicite d'une catégorie de foncteurs servant à définir les espèces de structures mathématiques du genre usuel. Cette construction a été esquissée déjà partiellement dans [1], p. 57. Elle précise la construction de l'échelle des ensembles [3].

Cet article reproduit des conférences faites à Buenos Aires: São Paulo et Caracas en Septembre, Octobre et Novembre 1960.

I. *Foncteurs naturalisés.*

Etant données deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, soient Φ et Φ' deux foncteurs covariants de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ (nous dirons simplement foncteur pour foncteur covariant). Pour tout élément (ou morphisme) f d'une catégorie, l'unité à droite sera désignée par $\alpha(f)$, l'unité à gauche par $\beta(f)$; $\alpha(f)$ et $\beta(f)$ (ou les objets correspondants) sont appelés aussi source et but de f. Rappelons qu'une *transformation naturelle* de Φ vers Φ' est un triplet (Φ', τ, Φ), où τ est une fonction associant à toute unité e de $\mathcal{C}$ un morphisme $\tau(e) \in \mathcal{C}'$ de source $\Phi(e)$ et de but $\Phi'(e)$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{C}$, on ait

$$\tau(e') \; \Phi(f) = \Phi'(f) \; \tau(e), \quad \text{où } e = \alpha(f), \quad e' = \beta(f).$$

Soit $\mathcal{F}(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ la classe des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ et soit $\mathcal{N}(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ la classe des transformations naturelles (Φ', τ, Φ), où Φ' et Φ sont des foncteurs quelconques de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$.

Proposition: $\mathcal{N}(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ *est une catégorie pour la multiplication suivante (appelée longitudinale)*:

$$(\Phi'', \tau', \Phi_1) \; (\Phi', \tau, \Phi) = (\Phi'', \tau' \, . \, \tau, \Phi)$$

si est seulement si $\Phi_1 = \Phi'$, *la fonction* $\tau' \, . \, \tau$ *étant définie par*: $(\tau' \, . \, \tau) \; (e) = \tau'(e) \; \tau(e)$.

Une unité de $\mathcal{N}(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ est un triplet (Φ, Φ_0, Φ), où Φ_0 est la restriction de Φ à la classe des unités de $\mathcal{C}$; les foncteurs Φ correspondent ainsi d'une manière biunivoque aux unités et peuvent être considérés comme étant les objets de la catégorie $\mathcal{N}(\mathcal{C}', \mathcal{C})$. Une transformation naturelle inversible (Φ', τ, Φ) est appelée une *équivalence naturelle* de Φ vers Φ'. Pour toute unité e de $\mathcal{C}$, $\tau(e)$ est alors un élément inversible de $\mathcal{C}'$; l'élément inverse de (Φ', τ, Φ) est (Φ, τ^{-1}, Φ'), où $\tau^{-1}(e) = \tau(e)^{-1}$.

En particulier soit $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ la classe des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$. Cette classe est une catégorie pour la multiplication définie par $(\Phi'\Phi)(f) = \Phi'(\Phi(f))$, pour tout $f \in \mathcal{C}$; elle admet une seule unité, le foncteur Id tel que $Id(f) = f$. Désignons par $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ la catégorie des transformations naturelles $\mathcal{N}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$.

Proposition: *La catégorie* $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ *opère à droite et à gauche sur la catégorie* $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ *de la manière suivante*:

$$(\Phi', \tau, \Phi)\, \Phi_1 = (\Phi'\, \Phi_1,\ \tau\, \Phi_1,\ \Phi\, \Phi_1),$$
$$\Phi_1'\, (\Phi', \tau, \Phi) = (\Phi_1'\, \Phi',\ \Phi_1'\, \tau,\ \Phi_1'\, \Phi).$$

(Dans la première formule nous écrivons $\tau\Phi_1$ à la place de $\tau\, \Phi_{10}$, cette convention n'entraînant pas de confusion dans ce cas).

Remarquons que la multiplication par Φ_1 ou par Φ_1' est compatible avec la loi de composition de la catégorie $\mathcal{N}(\mathcal{C})$. En effet,

$$[(\Phi'', \tau', \Phi')\, (\Phi', \tau, \Phi)]\, \Phi_1 = [(\Phi'', \tau', \Phi')\, \Phi_1]\, [(\Phi', \tau, \Phi)\, \Phi_1] =$$
$$= (\Phi''\, \Phi_1,\ (\tau' \,.\, \tau)\, \Phi_1,\ \Phi\, \Phi_1)$$

d'après la relation $(\tau' \,.\, \tau)\, \Phi_1 = \tau'\, \Phi_1 \,.\, \tau\Phi_1$. Il en est de même pour la multiplication par Φ_1' d'après la relation $\Phi_1'\, (\tau' \,.\, \tau) = \Phi_1'\, \tau' \,.\, \Phi_1'\, \tau$.

Proposition: $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ *est aussi une catégorie, qui sera appelée catégorie latérale des transformations naturelles, pour la loi de composition suivante, appelée multiplication latérale*:

$$(\overline{\Phi}', \overline{\tau}, \overline{\Phi}) \times (\Phi', \tau, \Phi) = [(\overline{\Phi}', \overline{\tau}, \overline{\Phi})\, \Phi']\, [\overline{\Phi}\, (\Phi', \tau, \Phi)] =$$
$$= (\overline{\Phi}'\, \Phi',\ \overline{\tau}\, \Phi' \,.\, \overline{\Phi}\tau,\ \overline{\Phi}\, \Phi).$$

Ce produit latéral est aussi défini par:

$$[\overline{\Phi}'\, (\Phi', \tau, \Phi)]\, [(\overline{\Phi}', \overline{\tau}, \overline{\Phi})\, \Phi] = (\overline{\Phi}'\, \Phi',\ \overline{\Phi}'\tau \,.\, \overline{\tau}\Phi,\ \overline{\Phi}\, \Phi),$$

en vertu de l'égalité $\overline{\tau}\Phi' \,.\, \overline{\Phi}\tau = \overline{\Phi}'\tau \,.\, \overline{\tau}\Phi$, qui résulte de l'identité $\overline{\tau}\, (\beta(f))\, \overline{\Phi}(f) = \overline{\Phi}'(f)\, \overline{\tau}\, (\alpha(f))$ caractérisant la transformation naturelle $(\overline{\Phi}', \overline{\tau}, \overline{\Phi})$ lorsqu'on l'applique à $f = \tau(e)$.

Pour la multiplication latérale il n'y a qu'une seule unité (Id, Id_0, Id). L'associativité de la multiplication latérale résulte de la formule:

$$\overline{\overline{\tau}}\,\overline{\Phi'}\,\Phi'\;.\;\overline{\overline{\Phi}}\,(\overline{\tau}\Phi'\;.\;\overline{\Phi}\tau) = \overline{\overline{(\tau}}\,\overline{\Phi'}\;.\;\overline{\overline{\Phi}}\,\overline{\tau)}\;\Phi'\;.\;\overline{\overline{\Phi}}\,\overline{\Phi}\tau.$$

Proposition: *Les deux multiplications définies sur* $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ *vérifient l'identité de permutabilité:*

$$(Y' \times Y)\ (X' \times X) = Y'X' \times YX,$$

où $X, X', Y, Y' \in \mathcal{N}(\mathcal{C})$ *tels que* $Y'X'$ *et* YX *soint définis.*

Définition: *Une transformation naturelle* $(\Phi, \varphi, Id) \in \mathcal{N}(\mathcal{C})$, *que nous représenterons simplement par* (Φ, φ), *sera appelée foncteur naturalisé.*

Proposition: *La classe* $\mathcal{F}_\nu(\mathcal{C})$ *des foncteurs naturalisés est une sous-catégorie de la catégorie latérale* $\mathcal{N}(\mathcal{C})$.

La multiplication des foncteurs naturalisés s'écrit simplement:

$$(\Phi', \varphi') \times (\Phi, \varphi) = (\Phi'\Phi, \varphi'\Phi\,.\,\varphi) = (\Phi'\Phi, \Phi'\varphi\,.\,\varphi')$$

Proposition: *La catégorie longitudinale* $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ *opère sur* $\mathcal{F}_\nu(\mathcal{C})$ *de la manière suivante*:

$$(\Phi', \tau, \Phi_1)\ (\Phi, \varphi) = (\Phi', \tau\,.\,\varphi)$$

si et seulement si $\Phi_1 = \Phi$.

Définition: *Un couple composable* $[(\Phi', \tau, \Phi), (\Phi, \varphi)]$ *sera représenté par le triplet* $[(\Phi', \tau\,.\,\varphi), \tau, (\Phi, \varphi)]$ *et s'appellera transformation naturelle du foncteur naturalisé* (Φ, φ) *vers* $(\Phi', \tau\,.\,\varphi)$. *Soit* $\mathcal{N}_\nu(\mathcal{C})$ *la catégorie formée par ces couples composables.*

La loi de composition dans $\mathcal{N}_\nu(\mathcal{C})$ s'écrit:

$$[(\Phi'', \varphi''), \tau', (\Phi_1, \varphi_1)]\ [(\Phi', \varphi'), \tau, (\Phi, \varphi)] =$$
$$= [(\Phi'', \varphi''), \tau'\,.\,\tau, (\Phi, \varphi)]$$

où $\varphi' = \tau\,.\,\varphi$, $\varphi'' = \tau'\,.\,\varphi_1$, si et seulement si $(\Phi_1, \varphi_1) = (\Phi', \varphi')$.

La classe $\mathcal{F}_\nu(\mathcal{C}) \times \mathcal{F}_\nu(\mathcal{C})$ des couples de foncteurs naturalisés $[(\Phi', \varphi'), (\Phi, \varphi)]$ forme une catégorie pour la loi de composition suivante:

$$[(\Phi'', \varphi''), (\Phi_1, \varphi_1)]\ [(\Phi', \varphi'), (\Phi, \varphi)] =$$
$$= [(\Phi'', \varphi'') \times (\Phi', \varphi'), (\Phi, \varphi)]$$

si et seulement si $(\Phi_1, \varphi_1) = (\Phi', \varphi') \times (\Phi, \varphi)$. (Remarquons que pour toute catégorie Γ la classe $\Gamma \times \Gamma$ devient une catégorie en considérant Γ comme une catégorie d'opérateurs [1] à gauche ou à droite sur Γ).

Proposition: Soit Θ la fonction qui associe au couple $[(\Phi', \varphi'), (\Phi, \varphi)]$ la transformation naturelle $[(\Phi', \varphi') \times (\Phi, \varphi), \varphi'\Phi, (\Phi, \varphi)]$. Alors Θ est un foncteur biunivoque de $\mathcal{F}_\nu(\mathcal{C}) \times \mathcal{F}_\nu(\mathcal{C})$ sur une sous-catégorie de $\mathcal{N}_\nu(\mathcal{C})$. A toute sous-catégorie $\mathcal{F}_\nu'$ de $\mathcal{F}_\nu(\mathcal{C})$ correspond par Θ une sous-catégorie de $\mathcal{N}_\nu(\mathcal{C})$ admettant $\mathcal{F}_\nu'$ comme classe d'objets.

L'identité de permutabilité entraîne:

Proposition: $\mathcal{N}_\nu(\mathcal{C})$ est une catégorie pour la loi de composition suivante, appelée multiplication latérale:

$$[(\bar{\Phi}', \bar{\varphi}'), \bar{\tau}, (\bar{\Phi}, \bar{\varphi})] \times [(\Phi', \varphi'), \tau, (\Phi, \varphi)] =$$
$$= [(\bar{\Phi}', \bar{\varphi}') \times (\Phi', \varphi'), \bar{\tau}\Phi' \,.\, \bar{\Phi}\tau, (\bar{\Phi}, \bar{\varphi}) \times (\Phi, \varphi)]$$

correspondant à la multiplication latérale des transformations naturelles.

Dans la suite nous considérons le cas où la catégorie $\mathcal{C}$ est la catégorie $\tilde{\mathcal{E}}$ des applications d'un ensemble quelconque dans un ensemble quelconque. A un élément f de $\tilde{\mathcal{E}}$ est associé un ensemble $E = \alpha(f)$ et un ensemble $E' = \beta(f)$; $f(x)$ est défini pour tout $x \in E$ et on a $f(x) \in E'$. Un couple (g, f) d'éléments de $\tilde{\mathcal{E}}$ est composable si et seulement si $\alpha(g) = \beta(f)$, le composé gf étant défini par $(gf)(x) = g(f(x))$ pour $x \in \alpha(f)$. Les ensembles forment la classe des objets de $\tilde{\mathcal{E}}$, chaque ensemble correspondant à une unité $i(E)$, application identique de E. Les catégories $\mathcal{F}(\tilde{\mathcal{E}})$, $\mathcal{F}_\nu(\tilde{\mathcal{E}})$, $\mathcal{N}(\tilde{\mathcal{E}})$, $\mathcal{N}_\nu(\tilde{\mathcal{E}})$ seront désignées par $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_\nu$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}_\nu$ respectivement.

Une transformation naturelle $(\Phi', \tau, \Phi) \in \mathcal{N}$ sera appelée *injection naturelle* de Φ dans Φ' lorsque, pour tout ensemble E, l'application $\tau(E)$ est une injection de $\Phi(E)$ dans $\Phi'(E)$ (c'est-à-dire $\tau(E)\ (y) = \tau(E)\ (y')$ entraîne $y = y'$).

On désigne ici $\tau\ (i(E))$ par $\tau(E)$ et $\Phi\ (i(E))$ par $\Phi(E)$.

II. *Construction de foncteurs naturalisés.*

1. *Foncteur* $\mathcal{P}$:

Soit $f \in \tilde{\mathcal{E}}$, $\alpha(f) = E$, $\beta(f) = E'$. Désignons par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Pour tout $U \in \mathcal{P}(E)$, désignons par $f(U)$ l'ensemble des éléments $f(x)$ pour $x \in U$. Soit $\mathcal{P}(f)$ l'application $U \longrightarrow f(U)$; de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E')$. L'application $\mathcal{P}: f \longrightarrow \mathcal{P}(f)$ est un foncteur de $\tilde{\mathcal{E}}$ dans $\tilde{\mathcal{E}}$.

En posant $\mathcal{P}^0 = Id$ et $\mathcal{P}^n = \mathcal{P}^{n-1}\ \mathcal{P}$, on définit par récurrence le foncteur $\mathcal{P}^n$ pour tout entier naturel.

Le foncteur $\mathcal{P}$ est naturalisé par la fonction γ telle que $\gamma(E)$ soit l'application $x \longrightarrow \{x\}$ de E dans $\mathcal{P}(E)$, où $\{x\}$ est la partie de E dont x est le seul elément. Le foncteur naturalisé $(\mathcal{P}, \gamma)$ admet les puissances $(\mathcal{P},\gamma)^n = (\mathcal{P}^n, \gamma_n)$, où $\gamma_n(E) = \gamma_{n-1}(\mathcal{P}(E))\gamma(E)$, $(\mathcal{P}, \gamma)^0 = (Id, Id_0)$.

2. *Produit parallèle d'une famille de foncteurs naturalisés*:

Définition: *Soit* $(\Phi_i)_{i \in I}$ *une famille de foncteurs de* $\tilde{\mathcal{E}}$ *dans* $\tilde{\mathcal{E}}$, *où* I *est un ensemble d'indices. On appellera produit parallèle* $\prod_{i \in I} \Phi_i$ *de cette famille le foncteur associant à* $f \in \tilde{\mathcal{E}}$ *l'application* $\prod_{i \in I} \Phi_i(f)\colon (x_i)_{i \in I} \longrightarrow (\Phi_i(f)\,(x_i))_{i \in I}$ *de* $\prod_{i \in I} E_i$ *dans* $\prod_{i \in I} E_i'$, *où* $E_i = \Phi_i(E)$, $E_i' = \Phi_i(E')$, $E = \alpha(f)$, $E' = \beta(f)$.

En particulier, soit $\prod^I$ le foncteur $\prod_{i \in I} \Phi_i$, où $\Phi_i = Id$ quel que soit $i \in I$. $\prod^I(f)$ est l'application: $(x_i)_{i \in I} \longrightarrow (f(x_i))_{i \in I}$ de E^I dans E'^I. Ce foncteur est naturalisé par la fonction δ^I telle que $\delta^I(E)$ soit l'application diagonale $x \longrightarrow (x_i)_{i \in I}$, où $x \in E$ et $x_i = x$ pour tout $i \in I$.

Soit $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ une famille de foncteurs naturalisés. On a la transformation naturelle $(\prod_{i \in I} \Phi_i, \prod_{i \in I} \varphi_i, \prod^I)$, où $\prod_{i \in I} \varphi_i$ associe à E l'application $\prod_{i \in I} \varphi_i(E)$.

Définition: *On appellera produit parallèle* $\prod_{i \in I}(\Phi_i, \varphi_i)$ *de la famille* $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ *le foncteur naturalisé*:

$$(\prod_{i \in I} \Phi_i, \prod_{i \in I} \varphi_i, \prod^I)\ (\prod^I, \delta^I) = (\prod_{i \in I} \Phi_i, \prod_{i \in I} \varphi_i \,.\, \delta^I).$$

Si I ne contient qu'un seul élément i, le produit parallèle de la famille sera par définition le foncteur (Φ_i, φ_i) lui-même.

$\prod_{i \in I} \varphi_i \cdot \delta^I$ associe à E l'application $x \rightarrow (\varphi_i(x))_{i \in I}$, où $x \in E$.

Si l'on pose $\prod_{i \in I} (\Phi_i, \varphi_i) = (\Phi, \varphi)^I$ lorsque $(\Phi_i, \varphi_i) = (\Phi, \varphi)$ pour tout $i \in I$, on a $(\prod^I, \delta^I) = (Id, Id_0)^I$.

3. *Foncteurs limites*:

Pour tout ensemble I, l'ensemble $I \times I$ est muni d'une structure de groupoïde par la loi de composition $(j', i')\ (j, i) = (j', i)$ si et seulement si $i' = j$. Les unités sont les éléments (i, i) de la diagonale de $I \times I$. Une structure de préordre sur I est définie par la relation $(j, i) \in \Omega$, notée aussi $j < i$, où Ω est une sous-catégorie de $I \times I$ contenant la diagonale. Une structure d'ordre sur I correspond au cas où Ω n'admet pas d'autres éléments inversibles que les unités.

Définition: *Une famille préordonnée (resp. ordonnée) d'éléments d'une catégorie $\mathcal{C}$ est un foncteur covariant de Ω dans $\mathcal{C}$, où Ω est une sous-catégorie de $I \times I$ définissant un préordre (resp. un ordre) sur I.*

En particulier, soit θ un foncteur de Ω dans $\widetilde{\mathcal{E}}$, l'application correspondant à $(j, i) \in \Omega$ étant désignée par θ_{ji}. Supposons que le préordre sur I soit filtrant à gauche, c'est-à-dire pour $(j, i) \in I \times I$ il existe $k \in I$ tel que $k < i$, $k < j$. Soit E_i l'ensemble correspondant par θ à (i, i). L'ensemble somme $\sum_{i \in I} E_i$ est l'ensemble des couples (i, x), où $i \in I$, $x \in E_i$. Soit ρ la relation d'équivalence définie dans $\sum_{i \in I} E_i$ par: $(i, x) \sim (j, x') \pmod{\rho}$ lorsqu'il existe $k \in I$ tel que $k < i$, $k < j$ et $\theta_{ki}(x) = \theta_{kj}(x')$. La classe d'équivalence de (i, x) sera notée $\overline{(i, x)}$.

Définition: *On appelle limite inductive de la famille préordonnée θ l'ensemble $\lim \theta = (\sum_{i \in I} E_i)_{/\rho}$.*

Proposition: *Soient θ et θ' deux foncteurs de Ω dans $\widetilde{\mathcal{E}}$. A toute transformation naturelle (θ', τ, θ) correspond une application $\Psi^{\cdot}(\theta', \tau, \theta)$ de $\lim \theta$ dans $\lim \theta'$ définie par $\overline{(i, x)} \rightarrow \overline{(i, \tau(i)(x))}$, où $x \in E_i$. La fonction $\Psi^{\cdot}$ est un foncteur de $\mathcal{N}(\widetilde{\mathcal{E}}, \Omega)$ vers $\widetilde{\mathcal{E}}$.*

Considérons une famille préordonnée de transformations naturelles définie par un foncteur Θ de Ω dans $\mathcal{N}$ et soit $\Theta_{ji} = (\Phi_j, \tau_{ji}, \Phi_i)$. Pour tout ensemble E les applications $\tau_{ji}(E)$ forment une famille préordonnée $\tau(E)$. A tout $f \varepsilon \widetilde{\mathcal{E}}$ correspond la transformation naturelle $(\tau(E'), \Phi(f), \tau(E))$, où $E = \alpha(f)$, $E' = \beta(f)$, $\Phi(f)$ est la fonction $i \longrightarrow \Phi_i(f)$. Le fonction $f \longrightarrow (\tau(E'), \Phi(f), \tau(E))$ est un foncteur $\overline{\Phi}$. La foncteur $\Psi^{\cdot}$ de la proposition précédente associe à $(\tau(E'), \Phi(f), \tau(E))$ l'application $(\lim \Theta)(f)$ de $\lim \tau(E)$ dans $\lim \tau(E')$, où $\lim \Theta$ est le foncteur composé $\Psi^{\cdot}\,\overline{\Phi}$.

Définition: *Le foncteur* $\lim \Theta$ *est appelé limite de la famille de foncteurs* $(\Phi_i)_{i \varepsilon I}$ *par rapport à* Θ.

Supposons que $\overline{\Theta}$ soit un foncteur de Ω dans $\mathcal{N}_\nu$, définissant une famille préordonnée de transformations naturelles de foncteurs naturalisés. Posons $\overline{\Theta}_{ji} = ((\Phi_j, \varphi_j), \tau_{ji}, (\Phi_i, \varphi_i))$ où $\varphi_j = \tau_{ji} \cdot \varphi_i$, et $\Theta_{ji} = (\Phi_j, \tau_{ji}, \Phi_i)$. Pour tout $x \varepsilon E$, les éléments $(i, \varphi_i(E)(x))$ appartiennent à une classe d'équivalence dans $\sum\limits_{i \varepsilon I} \Phi_i(E)$ définissant un élément de $\lim \tau(E)$ que nous désignons par $\varphi(E)\,(x)$. Nous définissons ainsi une application $\varphi(E)$ de E dans $\lim \tau(E)$. L'application $\lim \Theta(f)$ applique $\varphi(E)\,(x)$ sur $\varphi(E')\,(f(x))$, car $\overline{(i, \varphi_i(E)(x))}$ est appliqué sur $\overline{(i, \Phi_i(f)\, \varphi_i(E)\,(x))}$; or $\Phi_i(f)\, \varphi_i(E) = \varphi_i(E')\, f$, relation qui exprime que (Φ_i, φ_i) est un foncteur naturalisé. Par suite $(\lim \Theta, \varphi)$ est un foncteur naturalisé, où φ associe à E l'application $\varphi(E)$.

Définition: *Le foncteur naturalisé* $(\lim \Theta, \varphi)$ *est désigné par* $\lim \overline{\Theta}$ *et s'appellera limite de la famille de foncteurs naturalisés* $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \varepsilon I}$ *par rapport à* Θ. *Si* I *ne contient qu'un seul élément* i, *le foncteur limite de la famille sera par définition le foncteur* (Φ_i, φ_i).

Pour tout $i \varepsilon I$, on a la transformation naturelle canonique de (Φ_i, φ_i) vers $(\lim \Theta, \varphi)$ définie par la fonction τ_i qui associe à l'ensemble E l'application $\tau_i(E)$: $y \longrightarrow \overline{(i, y)}$, où $y \varepsilon \Phi_i(E)$. On vérifie, en effet, les relations:

$$\tau_i(E')\ \Phi_i(f) = \lim \Theta\,(f)\ \tau_i(E) \text{ et}$$

$$\varphi = \tau_i \cdot \varphi_i. \text{ Si } j < i, \text{ on a } \varphi_i = \varphi_j \cdot \tau_{ji}.$$

4. *Limite d'une suite finie ou transfinie de foncteurs naturalisés:*

Soit $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \varepsilon I}$ une suite (finie on transfinie) de foncteurs naturalisés, c'est-à-dire une famille où I est une section de la classe des ordinaux formée par l'ensemble des nombres ordinaux i tels que $i < \mu$, $i \neq \mu$. Nous allons y associer une suite de foncteurs naturalisés $(\Psi^{\bullet}_i, \psi_i)_{i \varepsilon I}$ et pour chaque couple (i, j), où $i < j$, une transformation naturelle $\overline{\Theta}^I_{ji} = [(\Psi^{\bullet}_j, \psi_j), \tau_{ji}, (\Psi^{\bullet}_i, \psi_i)]$ vérifiant les conditions suivantes:

1. La fonction $\overline{\Theta}^I$: $(i, j) \longrightarrow \overline{\Theta}^I_{ji}$ est un foncteur contravariant de Ω dans $\mathcal{N}_\nu$, où Ω est la catégorie des couples (i, j) où $i < j$.
2. $(\Phi_0, \varphi_0) = (\Psi^{\bullet}_0, \psi_0)$.
3. $(\Psi^{\bullet}_{i+1}. \psi_{i+1}) = (\Phi_{i+1}, \varphi_{i+1}) \times (\Psi^{\bullet}_i, \psi_i) = (\Phi_{i+1} \Psi^{\bullet}_i, \varphi_{i+1} \Psi^{\bullet}_i . \psi_i)$, $\tau_{i+1 i} = \varphi_{i+1} \Psi^{\bullet}_i$.
4. Si $\lambda < \mu$ et si λ n'admet pas de précédent, soit J l'ensemble des j tels que $j < \lambda$, $j \neq \lambda$. Soit $\overline{\Theta}^J$ la restriction de $\overline{\Theta}^I$ aux couples (j, j'), où $j \varepsilon J$, $j' \varepsilon J$. Enfin soit $(\lim \Theta^J, \varphi^J)$ le foncteur naturalisé limite de la famille $(\Psi^{\bullet}_j, \psi_j)_{j \varepsilon J}$ relativement à $\overline{\Theta}^J$ et soit $[(\lim \Theta^J, \varphi^J), \tau_j, (\Psi^{\bullet}_j, \psi_j)]$ la transformation naturelle canonique de $(\Psi^{\bullet}_j, \psi_j)$ vers $(\lim \Theta^J, \varphi^J)$.A lors $(\Psi^{\bullet}_\lambda, \psi_\lambda) = (\Phi_\lambda, \varphi_\lambda) \times (\lim \Theta^J, \varphi^J)$ et $\tau_{\lambda j} = \varphi_\lambda \lim \Theta^J . \tau_j$; c'est-à-dire $\overline{\Theta}^I_{\lambda j}$ est le produit longitudinal de la transformation canonique de $(\Psi^{\bullet}_j, \psi_j)$, vers $(\lim \Theta^J, \gamma^J)$ par la transformation naturelle canonique (voir § 1) de $(\lim \Theta^J, \varphi^J)$ vers $(\Phi_\lambda, \varphi_\lambda) \times (\lim \Theta^J, \varphi^J)$.

Proposition: *Par induction transfinie, ces conditions définissent d'une façon unique* $\overline{\Theta}^I$.

Définition: *On appellera limite de la suite de foncteurs naturalisés* $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \varepsilon I}$ *le foncteur limite de la famille* $(\Psi^{\bullet}_i, \psi_i)_{i \varepsilon I}$ *relativement à* $\overline{\Theta}^I$. *Nous le noterons* $\lim (\Phi_i, \varphi_i)_{i \varepsilon I}$.

On définit d'une façon analogue la limite de la famille $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \varepsilon I}$ lorsque I est un ensemble bien ordonné quelconque.

Exemple: Par induction transfinie, on associe à tout ordinal μ le foncteur naturalisé $(\mathcal{P}^\mu, \gamma_\mu)$ de telle façon que les conditions suivantes soient réalisées:

1) $(\mathcal{P}^0, \gamma_0) = (Id, Id_0)$.
2) $(\mathcal{P}^{\lambda+1}, \gamma_{\lambda+1}) = (\mathcal{P}^\lambda, \gamma_\lambda) \times (\mathcal{P}, \gamma)$.
3) Si μ n'a pas d'ordinal précédent, considérons la famille $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \varepsilon I}$, où I est l'ensemble des ordinaux i tels que $i < \mu$, $i \neq \mu$ e t où $(\Phi_i, \varphi_i) = (\mathcal{P}, \gamma)$ pour tout $i \varepsilon I$. Alors $(\mathcal{P}^\mu, \gamma_\mu)$ est la limite de la famille $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \varepsilon I}$. En particulier, on a ainsi le foncteur $(\mathcal{P}^\omega, \gamma_\omega)$, ω étant le premier nombre ordinal transfini.

III. *Catégorie des foncteurs types.*

Définition: Appelons catégorie des foncteurs types la plus petite sous-catégorie $\mathcal{F}_\tau$ *de* $\mathcal{F}_\nu$ *vérifiant les conditions suivantes:*

1) $\mathcal{F}_\tau$ *contient* $(\mathcal{P}, \gamma)$.
2) $\mathcal{F}_\tau$ *contient le produit parallèle d'une famille quelconque de foncteurs naturalisés appartenant à* $\mathcal{F}_\tau$.
3) *Etant donnée une suite (finie ou transfinie)* $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$, *où* $(\Phi_i, \varphi_i) \in \mathcal{F}_\tau$ *quel que soit* $i \in I$, *alors* $\mathcal{F}_\tau$ *contient aussi la limite de cette suite.*

Pour tout ordinal μ on définit par induction transfinie une sous-catégorie $\mathcal{F}_\tau^\mu$ de $\mathcal{F}_\tau$ de telle façon que les conditions suivantes soient vérifiées:

1) $\mathcal{F}_\tau'$ est la sous-catégorie de $\mathcal{F}_\tau$ engendrée par $(\mathcal{P}, \gamma)$ et $(\prod^I, \delta^I)$, où I est un ensemble quelconque.

2) $\mathcal{F}_\tau^\mu$, pour $\mu \neq 1$, est la sous-catégorie de $\mathcal{F}_\tau$ engendrée par la réunion des $\mathcal{F}_\tau^\lambda$, où $\lambda < \mu$, $\lambda \neq \mu$, et des éléments suivants:

a) Le produit parallèle d'une famille quelconque $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$, où $(\Phi_i, \varphi_i) \in \bigcup_{\substack{\lambda < \mu \\ \lambda \neq \mu}} \mathcal{F}_\tau^\lambda$, pour tout $i \in I$, I étant un ensemble quelconque.

b) La limite d'une suite $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$, où $(\Phi_i, \varphi_i) \in \bigcup_{\substack{\lambda < \mu \\ \lambda \neq \mu}} \mathcal{F}_\tau^\lambda$, pour tout $i \in I$.

Si on suppose de plus dans a) et b) qu'il n'existe aucun $\lambda < \mu$, $\lambda \neq \mu$ tel que $(\Phi_i, \varphi_i) \in \mathcal{F}_\tau^{\lambda_i}$, $\lambda_i + 1 < \lambda$, pour tout $i \in I$, le produit parallèle de la famillle ou la limite de la suite $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ sera appelé *générateur canonique de type* μ. Les foncteurs $(\mathcal{P}, \gamma)$ et $(\prod^I, \delta^I)$ seront appelés générateurs canoniques de type 1.

Proposition: $\mathcal{F}_\tau$ *est la réunion des* $\mathcal{F}_\tau^\lambda$.

En effet, $\mathcal{F}_\tau$ contient $\mathcal{F}_\tau^\mu$ pour tout μ, car $\mathcal{F}_\tau$ contient $\mathcal{F}_\tau^1$; d'autre part, si $\mathcal{F}_\tau$ contient $\mathcal{F}_\tau^\lambda$ pour tout $\lambda < \mu$, $\lambda \neq \mu$, alors $\mathcal{F}_\tau$ contient $\mathcal{F}_\tau^\mu$. Inversement, soit une famille $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ telle que $(\Phi_i, \varphi_i) \in \mathcal{F}_\tau^{\lambda_i}$, pour tout $i \in I$. Alors l'ensemble des nombres transfinis λ_i admet un majorant μ. Donc $(\Phi_i, \varphi_i) \in \mathcal{F}_\tau^\mu$ pour tout $i \in I$ et le produit parallèle ou la limite de $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ appartient à $\mathcal{F}_\tau^{\mu+1}$.

On définit une catégorie restreinte $\hat{\mathcal{F}}_\tau$ de foncteurs types en ajoutant dans la définition de $\mathcal{F}_\tau$ les conditions suivantes: l'ensemble I de la condition 2) est dénombrable; de plus la section I de la condition 3) est la section des nombres finis $n < \omega$. On peut définir alors les sous-catégories $\hat{\mathscr{F}}^{\lambda}_{\tau}$, où λ est un ordinal quelconque de la deuxième classe (correspondant au cardinal $\aleph_0$). $\hat{\mathscr{F}}_{\tau}$ sera la réunion des $\hat{\mathscr{F}}^{\lambda}_{\tau}$ parce que tout ensemble dénombrable d'ordinaux de la deuxième classe est majoré par un ordinal de la deuxième classe. Las générateurs canoniques tels que I vérifie la condition restrictive sont les générateurs canoniques de $\hat{\mathscr{F}}_{\tau}$.

Proposition: *Pour tout foncteur type* $(\Phi, \varphi) \in \mathscr{F}_{\tau}$, *on a les propriétés suivantes*: a) *L'application* $\varphi(E)$ *est une injection de* E *dans* $\Phi(E)$, *pour tout ensemble* E; b) Φ *est un foncteur biunivoque de* E *sur une sous-catégorie de* E; c) (Φ, φ, Id) *est la seule injection naturelle de* Id *vers* Φ.

Si $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ est une famille de foncteurs naturalisés tels que $\varphi_i(E)$ soit une injection pour tout E, alors le produit parallèle $(\prod_{i \in I} \Phi_i, \prod_{i \in I} \varphi_i \cdot \delta^I)$ possède encore la même propriété.

Si de plus on a une famille preordonnée de transformations naturelles $\vec{\Phi}_{ji} = [(\Phi_j, \varphi_j), \tau_{ji}, (\Phi_i, \varphi_i)]$, alors la limite de $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ relativement à $\vec{\Theta}$ est un foncteur naturalisé $(\lim \Theta, \varphi)$ tel que $\varphi(E)$ soit une injection pour tout E. De plus si $\tau_{ji}(E)$ est une injection quels que soient i, j, E, alors dans la transformation naturelle canonique $[(\lim \Theta, \varphi), \tau_i, (\Phi_i, \varphi_i)]$ l'application $\tau\ (E)$ est une injection naturelle.

Soit $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ une suite de foncteurs naturalisés et supposons que $\varphi_i(E)$ soit une injection pour tout E et pour tout $i \in I$. Par induction transfinie, on démontre que pour la suite associée $(\Psi'_i, \psi_i)_{i \in I}$ définie plus haut $\Psi'_i\ (E)$ est encore une injection. On considère alors la famille ordonnée de transformations naturelles $\overline{\Theta}^I_{ji} = [(\Psi'_j, \psi_j), \tau_{ji}, (\Psi'_i, \psi_i)$. Le foncteur $\lim (\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$, qui est la limite de $(\Psi'_i, \psi_i)_{i \in I}$ relativement à $\overline{\Theta}^I$, est un foncteur (Φ, φ) tel que $\varphi\,(E)$ soit une injection. Remarquons de plus que $\tau_{ji}\,(E)$ est une injection naturelle.

Par induction transfinie, on démontre que $(\Phi, \varphi) \in \hat{\mathscr{F}}^{\lambda}_{\tau}$ possède la propriété a) quel que soit l'ordinal λ. Il en résulte que tout foncteur type possède la propriété a).

D'une manière analogue, on démontre la propriété b).

Pour démontrer la propriété c), on vérifie d'abord cette propriété pour les foncteurs (Id, Id_0) et $(\mathscr{P}, \gamma)$. La même suite de raisonnements par induction transfinie démontre alors la propriété pour un foncteur type quelconque.

Proposition: *La catégorie $\mathscr{F}_\tau$ est une catégorie libre ayant pour système libre de générateurs la classe des générateurs canoniques définis ci-dessus.*

La notion de catégorie libre est définie de la manière suivante:

Définition: *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, $\mathcal{C}_0$ la classe de ses unités, $\mathcal{B}$ un système de générateurs ne contenant aucune unité non isolée (c'est-à-dire la plus petite sous-catégorie contenant $\mathcal{B}$ est identique à $\mathcal{C}$). Alors $\mathcal{C}$ est une catégorie libre par rapport à $\mathcal{B}$ lorsqu' aucune unité de $\mathcal{C}$ n'est le composé de deux éléments distincts de $\mathcal{C}$ et que tout élément f de $\mathcal{C}$ qui n'est pas une unité se décompose d'une manière unique sous la forme $f = f_n f_{n-1} \ldots f_1$ où $f_i \in \mathcal{B}$. Dans ce cas $\mathcal{B}$ est appelé systeme libre de générateurs de $\mathcal{C}$. $\mathcal{B}$ est la classe des éléments "premiers" de $\mathcal{C}$.*

Remarque: $\mathcal{C}$ peut être considérée comme un graphe orienté, un élément $f \in \mathcal{C}$ étant appelé flèche (ou arête orientée) si f n'est pas une unité et sommet si f est une unité. $\mathcal{B}$ détermine alors un sous-graphe orienté. Une suite finie de fléches $(f_n, f_{n-1}, \ldots, f_1)$ telle que $\alpha(f_{p+1}) = \beta(f_p)$, pour $p < n$, sera appelée un chemin sur le sous-graphe orienté $\mathcal{B}$. La classe des sommets de $\mathcal{B}$ et des chemins orientés de $\mathcal{B}$ définit une catégorie $\mathscr{L}(\mathcal{B})$ pour la multiplication:

$$(g_p, \ldots, g_2, g_1)\,(f_n, \ldots, f_2, f_1) = (g_p, \ldots, g_1, f_n, \ldots, f_1)$$

si et seulement si $g_1 f_n$ est defini.

$$\begin{aligned} (f_n, \ldots, f_2, f_1)\, e &= (f_n, \ldots, f_1), \\ e'\,(f_n, \ldots, f_2, f_1) &= (f_n, \ldots, f_1), \end{aligned}$$

si et seulement si $e = \alpha(f_1)$, $e' = \beta(f_n)$.

Si $\mathcal{C}$ est libre par rapport à $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ est isomorphe à la catégorie $\mathscr{L}(\mathcal{B})$.

On voit aisément qu'il existe des catégories non libres; en particulier une sous-catégorie d'une catégorie libre n'est pas nécessairement libre.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie engendrée par une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}$ ne contenant aucune unité, alors $\mathcal{C}$ est une catégorie quotient de la catégorie $\mathscr{L}(\mathcal{B})$ des chemins sur le graphe $\mathcal{B}$.

Etant donné un graphe non orienté $\mathscr{K}$, on en déduit un graphe orienté $\mathcal{B}$ en faisant correspondre à chaque arête de $\mathscr{K}$ deux arêtes orientées, c'est-à-dire deux flèches désignées par f et f^{-1}. On définit le groupoïde libre $\overline{\mathscr{L}}(\mathscr{K})$ sur $\mathscr{K}$ en considérant la catégorie libre $\mathcal{C} = \mathscr{L}(\mathcal{B})$. Soit ρ la plus petite relation d'équivalence sur $\mathcal{C}_1$ compatible avec la loi de composition et telle que $f^{-1} f \sim \alpha(f)$, $ff^{-1} \sim \beta(f)$, $\alpha(f)$ et $\beta(f)$ désignant l'origine et l'extremité de la flèche f, considérée comme chemin élémentaire. Par passage au quotient, on définit sur $\mathcal{C}/\rho$ une multiplication pour laquelle $\mathcal{C}/\rho$ est un groupoïde, appelé groupoïde libre sur $\mathscr{K}$. On démontre que tout sous-groupoïde d'un groupoïde libre est un groupoïde libre.

Pour démontrer que la catégorie $\mathcal{F}_\tau$ est libre, on montre d'abord par induction transfinie que tout foncteur type est le produit d'un nombre fini de générateurs canoniques. Supposons démontrée la propriété suivante, pour deux générateurs canoniques distincts, (Φ, φ) et (Φ', φ') de type λ et λ' tels que $\lambda + 1 < \mu$, $\lambda' + 1 < \mu$: Les ensembles $\Phi(E)$ et $\Phi'(E')$, correspondants à deux ensembles quelconques E et E', sont distincts. Alors on voit que cette propriété est encore vérifiée pour deux générateurs canoniques distincts de types μ ou $< \mu$. Donc par induction transfinie la propriété est vérifiée pour deux générateurs canoniques distincts quelconques. Il en résulte facilement que deux produits distincts finis de générateurs canoniques sont distincts.

On démontre de même que la catégorie restreinte de foncteurs types $\hat{\mathcal{F}}_\tau$ est une catégorie libre par rapport à la sous-classe des générateurs canoniques de $\hat{\mathcal{F}}_\tau$.

D'après la dernière proposition du §1, à la catégorie $\mathcal{F}_\tau$ est associée une sous-catégorie $\mathcal{N}_\tau$ de $\mathcal{N}_\nu$, formée d'injections naturelles d'un foncteur type vers un foncteur type. Nous les appellerons *injections naturelles types*. Si $[(\Phi', \varphi'), \tau, (\Phi, \varphi)]$ est une injection naturelle type, nous écrivons $(\Phi, \varphi) < (\Phi', \varphi')$. On définit ainsi une relation d'ordre dans $\mathcal{F}_\tau$. Celle-ci peut aussi être définie de la manière suivante: $(\Phi', \varphi') = (\Psi, \psi) \times (\Phi, \varphi)$, où (Ψ, ψ) est un foncteur type. La fonction τ est déterminée par la donnée de (Φ, φ) et (Φ', φ').

IV. *Catégorie des transformations naturelles canoniques.*

Nous allons définir un groupoïde d'équivalences naturelles d'un foncteur type vers un foncteur type. Les générateurs de ce groupoïde sont les suivants:

1) Soit $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ une famille de foncteurs types. Soit $(I_j)_{j \in J}$ une famille de parties de I qui forment une partition de I. Soit $\prod_{i \in I_j} (\Phi_i, \varphi_i) = (\Psi_j, \psi_j)$. Considérons l'équivalence naturelle de $\prod_{i \in I} (\Phi_i, \varphi_i)$ vers $\prod_{j \in J} (\Psi_j, \psi_j)$ définie de la manière suivante: A l'ensemble E sera associée l'application biunvoque $\tau(E)$ de $\prod_{i \in I} \Phi_i(E)$ sur $\prod_{j \in J} \Psi_j(E)$ qui applique $(x_i)_{i \in I}$, où $x_i \in E_i$, sur $(y_j)_{j \in J}$, où $y_j = (x_i)_{i \in I_j}$. On vérifie que $[\prod_{j \in J} (\Psi_j, \psi_j), \tau, \prod_{i \in I} (\Phi_i, \varphi_i)]$ est bien

une équivalence naturelle. En particulier, soient $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \varepsilon I}$ et $(\Phi_j, \varphi_j)_{j \varepsilon J}$ deux familles de foncteurs types. A toute application biunivoque de J sur I correspond ainsi une équivalence naturelle de $\prod_{i \varepsilon I} (\Phi_i, \varphi_i)$ vers $\prod_{j \varepsilon J} (\Phi_j, \varphi_j)$.

2. Soit $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \varepsilon I}$ une suite de foncteurs types, où I est la section de la classe des ordinaux $i < \mu$ et $i \neq \mu$. Supposons qu'il existe une suite transfinie d'ordinaux λ_j où $j \varepsilon J$, section des ordinaux, telle que μ soit la somme de la suite (λ_j), où λ_j est l'ordinal correspondant à la section I_j. Alors pour tout $j \varepsilon J$ on a un isomorphisme $\tilde{j}$ de I_j sur un intervalle I_j' de I de telle façon que les I_j' forment une partition de I, un élément de I' étant plus petit qu'un élément de $I'_{j'}$ si $j < j'$. Posons $(\overline{\Phi}_j, \overline{\varphi}_j) = \lim (\Phi^j_i, \varphi^j_i)_{i \varepsilon I_j}$ où $(\Phi^j_i, \varphi^j_i) = (\Phi_{\tilde{j}(i)}, \varphi_{\tilde{j}(i)})$ pour $i \varepsilon I_j$. On a l'équivalence naturelle de $\lim (\Phi_i, \varphi_i)_{i \varepsilon I}$ vers $\lim (\overline{\Phi}_j, \overline{\varphi}_j)_{j \varepsilon I}$ définie par la fonction τ qui associe à E l'application biunvoque $\tau(E)$ qui applique la classe d'équivalence de (i', y), où $i' = \tilde{j}(i)$, $i \varepsilon I_j$, $y \varepsilon \psi_{i'}, (E)$, sur la classe d'équivalence de (j, z), où $z \varepsilon \overline{\Psi}_j(E)$ correspond à la restriction de $\overline{(i,' y)}$ à $\sum_{i \varepsilon I'_j} \Psi_i (E)$.

3) Si $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \leq n}$ est une suite finie de foncteurs types, on a l'équivalence naturelle de $\lim (\Phi_i, \varphi_i)_{i \varepsilon I}$ sur le produit $(\Phi_n, \varphi_n) \ldots (\Phi_0, \varphi_0)$ qui associe à l'ensemble E l'application biunivoque $\tau(E)$ qui applique la classe d'équivalence de (i, y) sur $z \varepsilon \Phi_n \ldots \Phi_0 (E)$, où $y \varepsilon \Psi_i(E)$ et où $z = \tau_{ni}(E)(y)$.

4) Si $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \varepsilon I}$ est une suite finie ou transfinie de foncteurs types, où $(\Phi_i, \varphi_i) = (Id, Id_0)$ pour tout $i \varepsilon I$, on a une équivalence naturelle de (Id, Id_0) vers $\lim (\Phi_i, \varphi_i)_{i \varepsilon I}$ en associant à l'ensemble E l'application: $x \longrightarrow \overline{(0, x)}$, $x \varepsilon E$, $\overline{(0, x)}$ étant la classe d'équivalence de $(0, x)$ correspondant à la famille d'applications $\tau_{ji}(E)$ qui interviennent dans la définition de $\lim (\Phi_i, \varphi_i)_{i \varepsilon I}$.

Les équivalences naturelles ainsi définies seront appelées *équivalences naturelles élémentaires*.

Soient $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \varepsilon I}$ et $(\Phi_i', \varphi_i')_{i \varepsilon I}$ deux familles de foncteurs types tels que l'on ait une équivalence naturelle $[(\Phi_i', \varphi_i'), \tau_i, (\Phi_i, \varphi_i)]$ pour tout $i \varepsilon I$. Alors on en déduit une équivalence naturelle $(\prod_{i \varepsilon I} (\Phi_i', \varphi_i'), \tau, \prod_{i \varepsilon I} (\Phi_i, \varphi_i))$, où $\tau(E)$ est l'application biunivoque: $(x_i)_{i \varepsilon I} \longrightarrow (\tau_i(E)(x_i))_{i \varepsilon I}$, $x_i \varepsilon \Phi_i(E)$. Cette équivalence sera appelée *produit parallèle* de la famille des équivalences données.

Supposons de plus que I soit une section de la classe des ordinaux. Alors on a une équivalence naturelle: [lim $(\Phi_i', \varphi_i')_{i \in I}$, τ, lim $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$], où $\tau(E)$ est l'application biunivoque: $\overline{(i, y)} \rightarrow \rightarrow \overline{(i, \tau_i(E)(y))}$, où $y \in \Psi'_i(E)$. Cette équivalence sera appelée *limite latérale* de la suite des équivalences données.

Soit I l'ensemble des nombres 0 et 1. Soit T l'équivalence élémentaire de lim $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ vers $(\Phi_1, \varphi_1) \times (\Phi_0, \varphi_0)$. Soit T' l'équivalence élémentaire de lim $(\Phi_i', \varphi_i')_{i \in I}$ vers $(\Phi_1', \varphi_1') \times (\Phi_0', \varphi_0')$. Posons $T_1 = [(\Phi_1', \varphi_1'), \tau_1, (\Phi_1, \varphi_1)]$ et $T_0 = [(\Phi_0', \varphi_0'), \tau_0, (\Phi_0, \varphi_0)]$. Soit $T_1 \square T_0$ la limite latérale de (T_0, T_1), $T_1 \times T_0$ désignant toujours le produit latéral de T_0 et T_1. Alors on démontre la relation:

$$T_1 \square T_0 = T'^{-1} (T_1 \times T_0)\, T$$

Définition: Soit $\mathcal{N}_c$ le plus petit sous-groupoïde de $\mathcal{N}_v$, relativement à la multiplication longitudinale, contenant: 1) les équivalences naturelles élémentaires; 2) le produit parallèle d'une famille d'éléments de $\mathcal{N}_c$; 3) le produit latéral de deux éléments de $\mathcal{N}_c$; 4) la limite latérale d'une suite (finie ou transfinie) d'éléments de $\mathcal{N}_c$. Soit $\mathcal{N}_c'$ la plus petite sous-catégorie de $\mathcal{N}_v$, relativement à la multiplication longitudinale, contenant; 1) les éléments de $\mathcal{N}_\tau$; 2) les éléments de $\mathcal{N}_c$; 3) le produit parallèle d'une famille d'éléments de $\mathcal{N}_c'$; 4) la limite latérale d'une suite (finie ou transfinie) d'éléments de $\mathcal{N}_c'$. Un élément de $\mathcal{N}_c$ (resp. $\mathcal{N}_c'$) sera appelé équivalence naturelle canonique (resp. injection naturelle canonique) d'un foncteur type vers un foncteur type.

V. *Foncteurs typiques.*

Soit (Φ, φ) un foncteur type. Rappelons que $\tilde{\mathcal{E}}$ est une catégorie inductive [2], les éléments induits par $f \in \tilde{\mathcal{E}}$ étant les restrictions de f. Si $f' < f$, c'est-à-dire si f' est une restriction de f, alors on a: $\Phi(f') < \Phi(f)$, $\varphi(\alpha(f')) < \varphi(\alpha(f))$, $\varphi(\beta(f')) < \varphi(\beta(f))$. Mais, en général, on a:

$$\Phi\left(\bigcup_{i \in I} f_i\right) \neq \bigcup_{i \in I} \Phi(f_i).$$

Les propriétés précédentes ne suffisent pas pour caractériser les foncteurs types. Il serait intéressant d'avoir une définition axiomatique des foncteurs types ne faisant pas intervenir les générateurs explicités.

Définition: *Un foncteur* Φ' *de* $\tilde{\mathscr{E}}$ *vers* $\tilde{\mathscr{E}}$ *sera dit déduit du foncteur* Φ *lorsqu'il existe une injection naturelle* (Φ, τ, Φ') *telle que, pour tout ensemble* E, *on ait* $\Phi'(E) \subset \Phi(E)$, $\tau(E)$ *étant l'injection canonique de* $\Phi'(E)$ *dans* $\Phi(E)$; *c'est-à-dire* $\Phi'(f)$ *est une restriction de* $\Phi(f)$, *pour tout* $f \in \tilde{\mathscr{E}}$; *on écrira* $\Phi' < \Phi$.

Un foncteur naturalisé (Φ', φ') *sera dit déduit de* (Φ, φ), *si* $\Phi'(f)$ *est une restriction de* $\Phi(f)$ *et si* $\varphi(E) = \tau(E)\ \varphi'(E)$, $\tau(E)$ *étant encore l'injection canonique de* $\Phi'(E)$ *dans* $\Phi(E)$; *on écrira* $(\Phi', \varphi') < (\Phi, \varphi)$.

Les relations ainsi définies sont des relations d'ordre compatibles avec la multiplication. Ainsi $\mathscr{F}$ est une classe inductive [2]: le plus petit élément de $\mathscr{F}$ est le foncteur 0 qui applique tout $f \in \tilde{\mathscr{E}}$ sur l'application identique de l'ensemble vide. En adjoignant à $\mathscr{F}_\nu$ cet élément 0, $\mathscr{F}_\nu$ devient une classe inductive. Les foncteurs naturalisés déduits d'un foncteur naturalisé $(\Phi, {}_*\varphi)$ ont pour intersection le foncteur naturalisé (Φ', φ') tel que $\Phi'(E)$ soit l'ensemble des points $\varphi(x)$, où $x \in E$.

Définition: *Si* (Φ, φ) *est un foncteur type, tout foncteur déduit de* Φ *sera appelé foncteur typique. Si* $(\Phi', \varphi') < (\Phi, \varphi)$, *alors* (Φ', φ') *sera appelé foncteur typique naturalisé. Soit* $\mathscr{F}_\tau'$ (*resp.* $\mathscr{F}_\tau''$) *la classe des foncteur typiques* (*resp. typiques naturalisés*).

Proposition: 1) $\mathscr{F}_\tau'$ (*resp.* $\mathscr{F}_\tau''$) *est une sous-classe de* $\mathscr{F}$ (*resp.* $\mathscr{F}_\nu$) *contenant avec un élément tout élément déduit.*

2) $\mathscr{F}_\tau'$ *est une sous-catégorie de* $\mathscr{F}$. *Pour toute famille* $(\Phi_i)_{i \in I}$ *où* $\Phi_i \in \mathscr{F}_\tau'$ *pour tout* $i \in I$, *le produit parallèle de la famille appartient à* $\mathscr{F}_\tau'$.

3) $\mathscr{F}_\tau''$ *est une sous-catégorie de* $\mathscr{F}_\nu$ *contenant avec toute famille* (*resp. suite*) *d'éléments de* $\mathscr{F}_\tau''$ *son produit parallèle* (*resp. sa limite*).

Soit $\mathscr{E}$ le groupoïde des applications biunivoques. Chaque foncteur type admet une restriction à $\mathscr{E}$, que nous appellerons encore foncteur type de $\mathscr{E}$ vers $\mathscr{E}$. Soit $\mathscr{F}_\tau(\mathscr{E})$ la catégorie de ces foncteurs types. Dans $\mathscr{F}(\mathscr{E})$ (resp. $\mathscr{F}_\tau(\mathscr{E})$), on définit encore la notion de foncteur deduit (resp. foncteur naturalisé déduit). En particulier, on définit comme précédemment les foncteurs typiques (resp. typiques naturalisés). Ils forment une sous-catégorie $\mathscr{F}_\tau'(\mathscr{E})$ (resp. $\mathscr{F}_\tau''(\mathscr{E})$) jouissant encore des propriétés indiquées dans la proposition précédente.

D'après les définitions de [1], un foncteur $\Phi' \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$ définit une espèce de structures sur $\mathcal{E}$. Le procédé régulier de définition d'une espèce de structures sur E consiste à prendre pour Φ' un foncteur typique; un tel foncteur sera, en général, déduit d'un foncteur type donné par un système d'axiomes. Chaque axiome du système définit un foncteur déduit et le système définit l'intersection de ces foncteurs déduits.

Le procédé de définition peut aussi faire intervenir des ensembles auxiliaires. Par exemple, soit $\wedge$ le foncteur de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui applique tout $f \in \mathcal{E}$ sur l'application identique de I. Soit Φ_1 le produit parallèle de $\wedge$ avec Id. On considère alors les foncteurs déduits de $\Phi\,\Phi_1$, où $(\Phi, \varphi) \in \mathcal{F}_\tau(\mathcal{E})$.

Soit $\mathcal{C}_i$ une catégorie munie d'un foncteur Φ_i vers $\tilde{\mathcal{E}}$ pour $i \in I$. Soit $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ la catégorie produit et p_i le foncteur projection de $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ sur $\mathcal{C}_i$. A l'aide des foncteurs $\Phi_i p_i$ et des foncteurs typiques on définit [1] aussi une classe de foncteurs de $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ vers $\tilde{\mathcal{E}}$ qu'on pourrait encore appeler foncteurs typiques.

Remarque: Pour une suite de foncteurs naturalisés, on peut définir la limite projective de la suite. Nous ne l'avons pas introduite comme générateur de la catégorie des foncteurs types, car elle se déduit d'un foncteur type.

REFERENCES

[1] Ehresmann, C., *Gattungen von lokalen Strukturen*, Jahresbericht d. D. M. V., 60, 1957, p. 49-77.

[2] *Catégories inductives et pseudo-groupes*, Ann. Inst. Fourier, 10, 1960, p. 307-336.

[3] Bourbaki, N., *Theorie des Ensembles*, Chap. 4, Structures, Hermann, A S I, 1258.

[4] Les notions de categorie libre et de grupoïde libre ainsi-que les résultats de la remarque p. 204 ont été obtenus en collaboration avec M. Hasse. Voir: Hasse, Maria, *Einige Bemerkungen über Graphen, Kategorien und grupoide*, Math. Nachrichten, 22, 1960