

ALGUNAS OBSERVACIONES SOBRE MULTIPLICADORES Y SU APLICACIÓN A LOS NÚCLEOS SINGULARES ⁽¹⁾

por JUAN CARLOS MERLO

(Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires)

§ 1. *Introducción*

En la teoría de los núcleos singulares de convolución se estudia cuáles son las condiciones que debe satisfacer una sucesión funcional k_n para que se verifique la relación $k_n * f \rightarrow f$ para determinadas funciones f , y donde la convergencia se entiende en sentido puntual o en norma L^p . Es bien sabido que la teoría engloba como casos particulares a ciertos núcleos clásicos, importantes en las aplicaciones, como ser los núcleos de Dirichlet, Poisson, etc. Sin embargo, generalmente sólo se suelen dar condiciones suficientes para la convergencia, pero no necesarias.

En este trabajo prescindiremos de la convergencia puntual, y daremos condiciones necesarias y suficientes para la convergencia en norma. Más aún, nos proponemos hacer ésto no sólo para L^p , sino para los espacios de Sobolev L^p_r , y además generalizando el problema para núcleos μ_n que sean medidas de Radon.

Por el momento, daremos una idea del método a seguir, prescindiendo de todo rigor. Si T_n es el operador definido mediante

$$T_n f = \mu_n * f,$$

bajo ciertas condiciones se cumple

$$\widehat{T_n f} = h_n \widehat{f}$$

—donde $\wedge$ designa la transformada de Fourier, y $h_n = \widehat{\mu_n}$ — que muestra que T_p es un operador multiplicador. (cf. § 2).

El problema puede plantearse pues a grandes rasgos de esta manera: averiguar cuándo T_n está bien definido y es un operador continuo de L^p_r en L^p_r , y converge hacia el operador identidad.

⁽¹⁾ Múltiples sugerencias del profesor Dr. Mischa Cotlar han hecho posible la redacción de esta nota, por lo cual el autor le expresa su sincero agradecimiento.

Entonces se trata pues de un caso particular del problema siguiente: a) dada una función h , averiguar qué condiciones debe cumplir para ser un multiplicador de L^p en L^q ; b) si $T_n = T(h_n)$ es el correspondiente operador de h_n , averiguar cuándo T_n converge fuertemente.

Naturalmente, el problema a) ofrece muchas dificultades, y está sin resolver aún para el caso de multiplicadores de L^p en L^p . En el presente trabajo hacemos lo siguiente.

En § 3 tratamos el problema a) y reducimos el caso de los espacios de Sobolev al de los espacios L^p , agregando además algunas consideraciones acerca de estos últimos.

En § 4 estudiamos la topología fuerte en los espacios de multiplicadores, para resolver el problema b).

En § 5 aplicamos los resultados anteriores para resolver el problema de los núcleos singulares de convolución.

Por último, en § 6, resolvemos el mismo problema para la convergencia en L_1 de núcleos generados por sistemas ortogonales en forma un tanto desligada de lo anterior, sin hacer uso de la teoría de multiplicadores.

§ 2. Notaciones y Generalidades.

Encararemos el problema en el espacio euclídeo m -dimensional R_m .

x designa un punto de

$$R_m : x = (x_1, \dots, x_m), \text{ y } |x| = \left\{ \sum_{h=1}^m x_h^2 \right\}^{1/2}$$

Si a es una n -upla: $a = (a_1, \dots, a_m)$, será $[a] = \sum_{h=1}^m a_h$.

En x^λ , si x es un número, λ lo será también; si $x = (x_1, \dots, x_m)$, entonces $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, y $x^\lambda = x_1^{\lambda_1} \dots x_m^{\lambda_m}$.

En particular:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda = \frac{\partial^{[\lambda]}}{\partial x_1^{\lambda_1} \dots \partial x_m^{\lambda_m}} ; f^\lambda = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda f = \frac{\partial^\lambda f}{\partial x^\lambda} .$$

Si T es un operador de L^p en L^q , $\|T\|_{p,q}$ —o bien $\|T\|_p$ si $p = q$ — designa su norma, que también escribiremos $\|T\|$ cuando no haya lugar a confusión.

(f.g) designa al producto escalar.

Si $1 \leq p \leq \infty$, p^* designa al conjugado de p , es decir

$$p^{-1} + p^{*-1} = 1.$$

El símbolo $*$ también designa al producto de convolución.

Recordamos que $f \in L_l^p$ ($1 \leq p < \infty$, $l = 0, 1, 2, \dots$) si y sólo si $f^k \in L^p$, $[k] = 0, 1, \dots, l$ (derivadas en el sentido de las distribuciones), y que L_l^p puede ser normando mediante

$$\|f\|_{p,l} = \sum_{j=0}^l \left\| \left\{ \sum_{[\lambda]=j} |f^\lambda|^2 \right\}^{1/2} \right\|_p.$$

El símbolo $\xrightarrow{p,l}$ indica convergencia en norma L_l^p ; $\xrightarrow{p}$ convergencia en L^p .

Designaremos

$$\widehat{f}(x) = \mathcal{F} f(x) = \int_{R_m} e^{ix \cdot t} f(t) dt,$$

donde $x \cdot t = \sum_{h=1}^m x_h t_h$, a la transformada de Fourier de la función f definida en R_m . $\mathcal{F}$ es un operador bien definido en L^p ($1 \leq p \leq 2$) y por consiguiente también en L_l^p , para l natural.

Si $1 \leq p, q \leq 2$, (L^p, L^q) es el conjunto de operadores multiplicadores de L^p en L^q , es decir: $T \in (L^p, L^q)$ si y sólo si $\|T\|_{p,q} < \infty$, y además existe una función h tal que para toda $f \in L^p$ se cumple $\widehat{Tf} = h \widehat{f}$. En tal caso se dice que h es un multiplicador de L^p en L^q , en símbolos:

$$h \in \{L^p, L^q\}.$$

El operador Λ ("raíz cuadrada del laplaciano") está definido mediante

$$\widehat{\Lambda f} = |x| \widehat{f}, \quad (2.1)$$

y las propiedades siguientes son bien conocidas (cf. [2], pág. 908; o [1], pág. 4 y 45 y sgtes.):

(2.2) Si $1 \leq p < \infty$, $l \geq 1$, entonces Λ es acotado de L_l^p en L_{l-1}^p ;

(2.3) $\Lambda^2 = -\Delta$, donde Δ indica el laplaciano;

(2.4) Si $1 \leq p \leq 2$, $f \in L^p$, $g \in L^p$, $\widehat{g} = |x|^s \widehat{f}$, s natural, entonces $f \in L_s^p$ y $\Lambda^s f = g$.

Utilizaremos luego un importante teorema que da una condición suficiente para que una función sea un multiplicador, demostrado originariamente por Marcinkiewicz [6], para series de Fourier. La forma siguiente, para transformadas de Fourier, se debe a Mijlin (enunciado en [3], pág. 337).

(2.5) TEOREMA (Marcinkiewicz-Mijlin). *Sea h una función tal que:*

- a) *h es continua en todo R_m ;*
 - b) $\frac{\partial^m h}{\partial x_1 \dots \partial x_m}$ *existe en todo punto, y h tiene derivadas continuas;*
 - c) $|x|^{[s]} h^s \in L^\infty$ *para $0 \leq [s] \leq m$.*
- Entonces $h \in \{L^p, L^p\}$, para $1 < p < \infty$.*

§ 3. Multiplicadores $\{L_l^p, L_s^q\}$

Comenzaremos extendiendo, de manera obvia, la definición de multiplicador a los espacios de Sobolev. Recordemos que la transformación de Fourier está bien definida en esos espacios, si

$$1 \leq p, q \leq 2.$$

(3.1) DEFINICIÓN. *Sea $1 \leq p, q \leq 2$; $l, s = 0, 1, 2, \dots$. Un operador $T: L_l^p \rightarrow L_s^q$ se llama operador multiplicador de L_l^p en L_s^q , en símbolos: $T \in (L_l^p, L_s^q)$, cuando es acotado y además existe una función h tal que para toda $f \in L_l^p$ se cumple*

$$\widehat{Tf} = h \widehat{f}. \quad (3.2)$$

En tal caso, se dice que h es un multiplicador de L_l^p en L_s^q , en símbolos:

$$h \in \{L_l^p, L_s^q\}.$$

Antes de entrar a determinar estos espacios, es menester disponer de algunos resultados auxiliares. En primer lugar, mostraremos que se puede aproximar a la función unidad mediante transformadas de L_l^1 , en el sentido siguiente:

(3.3) LEMA. *Sea l un número natural. Existe una función $\phi \in L_l^1$ tal que para algún $\varepsilon > 0$ se cumple $\widehat{\phi}(x) = 1$ para todo $|x| < \varepsilon$.*

Basta tomar, por ejemplo:

$$\phi(x) = \prod_{i=1}^m \frac{\cos x_i - \cos 2x_i}{\pi x_i^2}$$

de donde resulta:

$$\widehat{\phi}(x) = \prod_{i=1}^m Y(x_i),$$

con

$$Y(x_i) = \begin{cases} 1 & , |x_i| \leq 1, \\ 2 - |x_i| & , 1 \leq |x_i| \leq 2, \\ 0 & , |x_i| \geq 2. \end{cases}$$

El lema siguiente muestra que no es imprescindible imponer explícitamente la condición de acotación en la definición de multiplicador, y permitirá simplificar algunas demostraciones posteriores.

(3.4) LEMA. Sea $1 \leq p, q \leq 2$; $l, s = 0, 1, 2, \dots$. Si $T: L_l^p \rightarrow L_s^q$, y además existe una función h tal que para toda $f \in L_l^p$ es $\widehat{Tf} = \widehat{hf}$, entonces T es acotado, y por consiguiente es un operador multiplicador.

En virtud del teorema del gráfico cerrado, basta probar que T es un operador cerrado. Sea pues $f_n \xrightarrow{p,l} f$ y $Tf_n \xrightarrow{q,s} g$; hay que probar que $\widehat{g} = \widehat{hf}$. Por hipótesis es $\widehat{Tf_n} = \widehat{hf_n}$, y además $\widehat{f_n} \xrightarrow{p,*} \widehat{f}$. Entonces existe una subsucesión —que por brevedad seguimos notando f_n — tal que $\widehat{f_n} \rightarrow \widehat{f}$ p.p., de donde $\widehat{hf_n} \rightarrow \widehat{hf}$ p.p. Análogamente resulta —para alguna subsucesión— $\widehat{Tf_n} \rightarrow \widehat{g}$ p.p. En consecuencia $\widehat{g} = \widehat{hf}$ p.p., c.q.d.

El lema siguiente será imprescindible en lo que sigue.

(3.5) LEMA. Sea l natural y $1 < p \leq 2$. Toda $f \in L^p$ se puede escribir $f = f_0 + \Lambda^l f_1$, con $f_0, f_1 \in L_l^p$ (la descomposición no es única).

Sea ϕ una función que cumple las hipótesis del lema (3.3). Si definimos:

$$f_0 = f * \phi,$$

será $f_0 \in L_l^p$ por el teorema de Young, y además $\widehat{f_0} = \widehat{f} \widehat{\phi}$.

Poniendo:

$$F_1 = |x|^{-l} (\widehat{f} - \widehat{f_0}),$$

será $F_1(x) = 0$ si $|x| < \varepsilon$ y $|x|^l F_1 = \widehat{g}$, con $g = f - f_0 \in L^p$.

Entonces:

$$\widehat{f} = \widehat{f_0} + |x|^l F_1.$$

Definimos la función α mediante $\alpha(x) = |x|^{-1}$ si $|x| > \varepsilon$, completándola en $|x| \leq \varepsilon$ de manera que cumpla hipótesis del teorema (2.5), lo cual es obviamente factible.

La igualdad $|x|^l F_1 = \widehat{g}$, $g \in L^p$, teniendo en cuenta que $\widehat{g}(x) = 0$ si $|x| < \varepsilon$, podemos escribirla

$$F_1 = \alpha \widehat{g}.$$

Entonces, por (2.5) concluimos que $F_1 = \widehat{f_1}$, con $f_1 \in L^p$.

Reemplazando:

$$\widehat{f} = \widehat{f_0} + |x|^l \widehat{f_1}.$$

En virtud de (2.4) resulta $f_1 \in L_l^p$; entonces

$$f = f_0 + \Lambda^l f_1,$$

y f_0 y f_1 cumplen los requisitos exigidos, c.q.d.

Observación: Si $p = 2$, la demostración adquiere una gran simplificación conceptual, pues no es necesario usar (2.5). Además, como (2.5) no es válido para $p = 1$, no sabemos si (3.5) se mantiene en ese caso. Probablemente exista alguna demostración independiente de (2.5) y más sencilla.

Ahora estamos ya en condiciones de demostrar el resultado más importante de este parágrafo.

(3.6) TEOREMA. Sea $1 < p \leq 2$, $1 \leq q \leq 2$; $l, s = 0, 1, 2, \dots$. Para que $h \in \{L_l^p, L_s^q\}$, $s \geq l$, es necesario y suficiente que $|x|^\alpha h \in \{L^p, L^q\}$, para todo $\alpha = 0, 1, \dots, s - l$. Para que $h \in \{L_l^p, L_s^q\}$, $s \leq l$, es necesario y suficiente que $(1 + |x|^{l-s})^{-1} h \in \{L^p, L^q\}$. En el caso $p = 1$, las condiciones son suficientes por lo menos.

Observaciones. En particular, si $p = q = 2$, es bien sabido que $\{L^2, L^2\} = L^\infty$. Entonces la condición en el caso $s \geq l$ se puede reducir a $h \in \{L^2, L^2\}$, $|x|^{s-l} h \in \{L^2, L^2\}$. No sabemos si en los demás casos vale una simplificación análoga.

También resulta en particular que $\{L_l^p, L_l^q\} = \{L^p, L^q\}$, para todo l natural, es decir: los espacios de Sobolev son invariantes respecto a los operadores multiplicadores; esta circunstancia ya es conocida (cf. [1], pág. 41).

El hecho de que si $p = 1$ no sabemos si la condición es necesaria, se debe, como resultará en el curso de la demostración, a que ignoramos si (3.5) es válido en ese caso.

DEMOSTRACIÓN DE (3.6)

a) Caso $s \geq l$; suficiencia.

Sea $f \in L_l^p \subset L^p$. Como $h \in \{L^p, L^q\}$, existe $g \in L^q$ tal que

$$\widehat{g} = h \widehat{f}.$$

Además, $\Lambda^\lambda f = |x|^\lambda \widehat{f}$, $0 \leq \lambda \leq l$, y $\Lambda^\lambda f \in L_{l-\lambda}^p \subset L^p$, por (2.2).
Reemplazando:

$$\widehat{g} = |x|^{-\lambda} h \Lambda^\lambda f,$$

de donde

$$|x|^\sigma \widehat{g} = |x|^{\sigma-\lambda} h \Lambda^\lambda f.$$

Para $0 \leq \sigma - \lambda \leq s - l$, o sea $\lambda \leq \sigma \leq s - (l - \lambda)$, es $|x|^{\sigma-\lambda} h \in \{L^p, L^q\}$, por hipótesis. Variando λ de 0 a l , σ puede tomar valores $0 \leq \sigma \leq s$. Entonces, como $\Lambda^\lambda f \in L^p$, existirá $g_\sigma \in L^q$ tal que

$$\widehat{g}_\sigma = |x|^{\sigma-\lambda} h \Lambda^\lambda f.$$

Comparando: $\widehat{g}_\sigma = |x|^\sigma \widehat{g}$, $0 \leq \sigma \leq s$; entonces, por (2.4), resulta $\Lambda^\sigma g \in L_{l-\sigma}^p$, $g \in L_s^p$.

Aplicando el lema (3.4) resulta la tesis.

b) Caso $s \geq l$; necesidad.

Sea $h \in \{L_l^p, L_s^q\}$ y $f \in L^p$. Entonces $f = f_0 + \Lambda^l f_1$, con $f_0, f_1 \in L_l^p$, por (3.5). Si $0 \leq \alpha \leq s - l$, se tiene:

$$\begin{aligned} |x|^\alpha h f &= |x|^\alpha h f_0 + |x|^{l+\alpha} h f_1 = |x|^\alpha \widehat{g_0} + |x|^{l+\alpha} \widehat{g_1} = \\ &= \widehat{\Lambda^\alpha g_0} + \widehat{\Lambda^{l+\alpha} g_1} = \widehat{g}, \end{aligned}$$

con $g_0, g_1 \in L_s^q$ por hipótesis.

O sea, $|x|^\alpha h f = \widehat{g}$, con $g \in L^q$, puesto que $0 \leq \alpha \leq s - l \leq s$, $0 \leq l + \alpha \leq s$, y por lo tanto:

$$\Lambda^\alpha g_0, \Lambda^{l+\alpha} g_1 \in L^q.$$

Aplicando (3.4) resulta la tesis.

c) Caso $l \geq s$; suficiencia.

Sea $f \in L_l^p$.

$$\widehat{hf} = h(1 + |x|^{l-s})^{-1} (\widehat{f} + \widehat{\Lambda^{l-s}f}) = \widehat{g_0} + \widehat{g_1} = \widehat{g},$$

con $g_0, g_1 \in L_q$, por ser $f, \Lambda^{l-s}f \in L^p$.

Sea $0 \leq \sigma \leq s$.

$$\begin{aligned} |x|^\sigma \widehat{g} &= |x|^\sigma \widehat{hf} = h(1 + |x|^{l-s}) (\widehat{\Lambda^\sigma f} + \widehat{\Lambda^{l-(s-\sigma)}f}) = \\ &= \widehat{g_{\sigma,0}} + \widehat{g_{\sigma,1}} = \widehat{g_\sigma}, \end{aligned}$$

con $g_{\sigma,0}, g_{\sigma,1} \in L_q$, puesto que $0 \leq \sigma \leq s \leq l, 0 \leq l - (s - \sigma) \leq l$, y por lo tanto $\Lambda^\sigma f, \Lambda^{l-(s-\sigma)}f \in L^p$.

Entonces $|x|^\sigma \widehat{g} = \widehat{g_\sigma}, 0 \leq \sigma \leq s$. Por (2.4), resulta $\Lambda^\sigma g \in L^q$ y $g \in L_s^q$.

Aplicando (3.4) resulta la tesis.

d) Caso $l \geq s$; necesidad.

Sea $h \in \{L_l^p, L_s^q\}$ y $f \in L^p$. Entonces, por (3.5), $f = f_0 + \Lambda^l f_1$, con $f_0, f_1 \in L_l^p$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} h(1 + |x|^{l-s})^{-1} \widehat{f} &= h(1 + |x|^{l-s})^{-1} \widehat{f_0} + h|x|^l(1 + |x|^{l-s})^{-1} \widehat{f_1} = \\ &= (1 + |x|^{l-s})^{-1} \widehat{g_0} + |x|^l(1 + |x|^{l-s})^{-1} \widehat{g_1} = (1 + |x|^{l-s})^{-1} \widehat{g_0} + \\ &\quad + |x|^{l-s}(1 + |x|^{l-s})^{-1} \widehat{\Lambda^s g_1}, \end{aligned}$$

con $g_0, g_1 \in L_s^q$.

Pero por (2.5) es $(1 + |x|^{l-s})^{-1}, |x|^{l-s}(1 + |x|^{l-s})^{-1} \in \{L^q, L^q\}$, y entonces

$$h(1 + |x|^{l-s})^{-1} \widehat{f} = \widehat{g},$$

con $g \in L^q$. Aplicando (3.4), resulta la tesis, c.q.d.

Como vemos, el problema de la determinación de los $\{L_l^p, L_s^q\}$ se reduce a determinar los $\{L^p, L^q\}$. En este último aspecto, los siguientes resultados son conocidos.

(3.7) TEOREMA. $h \in \{L^2, L^2\}$ si y sólo si $h \in L^\infty$, y en tal caso es $\|T\|_{2,2} = \|h\|_\infty$.

(3.8) TEOREMA. $h \in \{L^1, L^1\}$ si y sólo si h es la transformada de Fourier-Stieltjes de una medida regular finita μ .

$$h(x) = \widehat{\mu}(x) = \int_{R_m} e^{ix \cdot t} d\mu(t),$$

y se cumple

$$\|T\|_{1,1} = \int_{R_m} |d\mu(t)|$$

(3.9) TEOREMA. Si $2 > p > q$, $h \in \{L^p, L^q\}$ implica $h = 0$ p.p.

La demostración de (3.7) es sumamente sencilla. La de (3.8) puede verse, para $m = 1$, en [5], pág. 569/70, Ch. XXI, Sec. 21.2. En cuanto a (3.9), ha sido demostrado recientemente por Hörmander ⁽¹⁾.

Concluiremos esta sección con algunas observaciones sobre otros espacios $\{L^p, L^q\}$.

El caso en que $p > 2$ presenta el inconveniente de que la transformada de Fourier no está definida —salvo como distribución— en todo L^p . Si $1 \leq p < \infty$, designaremos t^p al subconjunto de L^p cuyas transformadas de Fourier son distribuciones que coinciden con funciones de L^{p*} ; es sabido que t^p es denso en L^p , y si $p \leq 2$ es $t^p = L^p$.

Admitiremos la siguiente

(3.10) DEFINICIÓN. Sea $1 \leq p, q < \infty$. Diremos que $h \in \{L^p, L^q\}$ si para toda $f \in t^p$ es $\widehat{Tf} = h\widehat{f}$, con $Tf \in t^q$, y además T es acotado (por lo cual se extiende a todo L^p de manera única).

Si $p, q \leq 2$, esta definición se reduce a (3.1). Si $p > 2$, no vale el lema (3.4), y la condición de acotación de T hay que imponerla explícitamente.

(3.11) TEOREMA. Sea $r^{-1} = p^{-1} - q^{-1}$. Si $1 \leq p \leq 2, 2 \leq q \leq \infty$, entonces $\{L^p, L^q\} \supset L^r$. Si $2 \leq p \leq q < \infty$, entonces $\{L^p, L^q\} \subset L^r$. En particular, $\{L^2, L^q\} = L^r$, para $2 \leq q < \infty$.

Introduciremos la notación auxiliar siguiente: $h \in \{L^p, L^q\}_0$ cuando se cumple (3.10) excepto eventualmente en lo que se refiere a la acotación de T .

Probaremos en primer lugar que si $2 \leq p \leq q < \infty$, entonces $\{L^p, L^q\}_0 \subset L^r$.

(1) Según comunicación oral de A. P. Calderón al autor.

Sea $h \in \{L^p, L^q\}_0$ y $f \in t^p$. Entonces $Tf = g \in L^q$ y $\widehat{g} = \widehat{hf}$. Como $\widehat{g} = L^{q*}$ y $t^{p*} = L^{p*}$, resulta

$$\int_{R_m} |h|^{q*} F dx < \infty$$

para toda $F \in L^{p*/q*}$. Y como $(p^*/q^*)^* = r/q^*$, resulta la anterior afirmación.

Veremos ahora que si

$$1 \leq p \leq q, \quad 2 \leq q \leq \infty,$$

entonces

$$\{L^p, L^q\}_0 \supset L^r.$$

Sea $h \in L^r$ y $f \in t^p$. Entonces un cálculo sencillo muestra que $G = \widehat{hf} \in L^{q*}$. Como $q \geq 2$, existirá $g \in L^q$ tal que $\widehat{g} = G$, lo cual prueba lo que queríamos. Además, teniendo en cuenta (3.4) resulta que si además es $p \leq 2$, entonces $\{L^p, L^q\} \supset L^r$.

Por otra parte, también resulta inmediatamente que si $2 \leq p \leq q < \infty$, entonces $\{L^p, L^q\}_0 = L^r$.

La tesis está incluída en estas consideraciones, c.q.d.

El inconveniente principal que presenta la definición (3.10) es que la relación $\{L^p, L^q\} = \{L^{q*}, L^{p*}\}$ no se mantiene válida con ella. Puesto que si así fuera, aplicándola en (3.11) resultaría $\{L^p, L^q\} \subset L^r$ cuando $1 < p, q \leq 2$, lo cual es falso, según puede demostrarse utilizando el ejemplo de los operadores potenciales ([3], pág. 71, 73, 111, 181).

§ 4. Convergencia en espacios de multiplicadores.

Introduciremos la topología fuerte en los espacios de multiplicadores. Por tratarse de espacios vectoriales, basta definir la convergencia a cero.

(4.1) DEFINICIÓN. Sea $T_n \in \{L_t^p, L_s^q\}$, $n = 1, 2, \dots$. Se dice que $T_n \rightarrow 0$ (fuertemente) si para toda $f \in L_t^p$ se cumple $T_n f \xrightarrow{q*} 0$. Si h_n es el multiplicador correspondiente a T_n , diremos en tal caso que $h_n \rightarrow 0$ en $\{L_t^p, L_s^q\}$.

Es nuestro propósito caracterizar en forma simple esta topología para algunos de los espacios considerados en § 3. Primeramente demostraremos un resultado de tipo general.

(4.2) TEOREMA. Sea $1 \leq p, q \leq 2$; $l, s = 0, 1, 2, \dots$ Entonces $\{L_l^p, L_s^q\}$ es completo.

Sea h_n una sucesión fundamental. Es decir, para toda $f \in L_l^p$ es $\widehat{g_n} - \widehat{g_m} = (h_n - h_m)\widehat{f}$ y $\|g_n - g_m\|_{q,s} \rightarrow 0$ cuando $n, m \rightarrow \infty$.

Puesto que L_s^q es completo, existe $g \in L_s^q$ tal que $g_n \xrightarrow{q,s} g$, de donde resulta:

$$\|\widehat{g_n} - \widehat{g}\|_{q^*,s} = \|\widehat{h_n f} - \widehat{g}\|_{q^*,s} \rightarrow 0.$$

Sea en particular $f_0 \in L_l^p$ una función tal que $\widehat{f_0}(x) \neq 0$ p.p.x. Entonces definimos p.p.:

$$h = \widehat{g_0} / \widehat{f_0}.$$

El teorema quedará demostrado, con $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = h$, en $\{L_l^p, L_s^q\}$, si probamos que, para cualquier $f \in L_l^p$, definiendo

$$h_f = \begin{cases} \widehat{g/f}, & f(x) \neq 0, \\ h & , f(x) = 0, \end{cases}$$

resulta $h_f = h$ p.p. Basta considerar el caso $\widehat{f}(x) \neq 0$.

Por definición se cumple

$$\widehat{h_n f_0} \xrightarrow{q^*} \widehat{h f_0}$$

de manera que existe una sucesión n_i tal que

$$h_{n_i} \rightarrow h \text{ p.p.}$$

Para toda $f \in L_l^p$ sabemos que $\|\widehat{h_n f} - \widehat{g}\|_{q^*} = \|\widehat{h_n f} - \widehat{h_f f}\|_{q^*} \rightarrow 0$, de donde

$$\widehat{h_{n_i} f} \xrightarrow{q^*} \widehat{h_f f}.$$

Entonces existe una subsucesión n_{ij} tal que

$$h_{n_{ij}} \rightarrow h_f \text{ p.p.x tal que } \widehat{f}(x) \neq 0.$$

Pero $h_{n_i} \rightarrow h_0$ p.p., como ya vimos, de donde resulta $h_f = h_0$ p.p., c.q.d.

Un teorema de Dixmier (cf. [4] afirma que todo subespacio de operadores fuertemente cerrado es débilmente cerrado. En consecuencia:

(4.3) COROLARIO. Sea $1 \leq p, q \leq 2$; $l, s = 0, 1, 2 \dots$. Entonces $\{L_l^p, L_s^q\}$ es débilmente cerrado.

Daremos ahora algunos resultados auxiliares.

El lema siguiente es conocido.

(4.4) LEMA. Sea $1 \leq p \leq q \leq 2$. Si $T \in (L^p, L^p)$, entonces $T \in (L^q, L^q)$ y $\|T\|_{q,q} \leq \|T\|_{p,p}$.

Por ser T de tipo convolución, es acotado de L^{p*} en L^{p*} , y $\|T\|_{p^*,p^*} = \|T\|_{p,p}$. Aplicando el teorema de convexidad de Riesz resulta la desigualdad de la tesis. Además resulta $T \in (L^q, L^q)$, extendiéndolo por linealidad, c.q.d.

(4.5) TEOREMA. Sea $1 \leq p \leq q \leq 2$. Si $T_n \rightarrow 0$ en (L^p, L^p) entonces $T_n \rightarrow 0$ en (L^q, L^q) .

Por el teorema de Banach-Steinhaus, se tiene $\|T_n\|_p < A$, de donde, por (4.4), resulta $\|T_n\|_q < A$. Siendo la sucesión T_n acotada, basta probar que $T_n f \xrightarrow{q} 0$ en un conjunto denso de L^q .

Escribiendo $q = tp + (1-t)2$ —para algún t —, resulta

$$\begin{aligned} \|T_n f\|_q^q &= \int_{R_m} |T_n f|^{tp} |T_n f|^{(1-t)2} dx \leq \\ &\leq \left\{ \int_{R_m} |T_n f|^p dx \right\}^t \cdot \left\{ \int_{R_m} |T_n f|^2 dx \right\}^{1-t} \leq \|T_n f\|_p^{tp} (A \|f\|_2)^{2(1-t)} \end{aligned}$$

Como el primer factor converge a cero, resulta la tesis, c.q.d.

El lema siguiente es esencialmente conocido. Aquí le daremos una forma conveniente para nuestros propósitos, y sólo lo usaremos posteriormente en el caso $p = 2$.

(4.6) LEMA. Sea $1 \leq p < \infty$. Para que $h_n f \xrightarrow{p} 0$, $n = 1, 2, \dots$, para toda $f \in L^p$, es necesario y suficiente que:

a) $\|h_n\|_\infty < M$;

b) $h_n \rightarrow 0$ en medida sobre compactos.

Supongamos que valen a) y b). Sea n_i cualquier sucesión que tiende a infinito. Por b), existirá una subsucesión n_{ik} tal que $h_{n_{ik}} \rightarrow 0$ p.p. (no provoca dificultades el hecho de que la convergencia en medida sea sobre compactos), y por lo tanto, para toda $f \in L^p$ será $h_{n_{ik}} f \rightarrow 0$ p.p. Por a), la convergencia es mayorada; entonces:

$$h_{n_{ik}} f \xrightarrow{p} 0,$$

y como n_i era cualquier sucesión, resulta la tesis.

Recíprocamente, sea $h_n f \xrightarrow{p} 0$ para toda $f \in L^p$. Entonces $\|h_n f\|_p < M_f$, de donde resulta fácilmente que

$$\int_{R_m} |h_n|^p g \, dx < M_g$$

para toda $g \in L^1$. Aplicando Banach-Steinhaus, resulta a).

Eliendo en particular a f función característica de un conjunto de medida finita, resulta b), c.q.d.

A continuación comenzaremos a caracterizar la topología fuerte.

(4.7) TEOREMA. $h_n \rightarrow 0$ en $\{L^2, L^2\}$ si y sólo si:

a) $\|h_n\|_\infty < M$;

b) $h_n \rightarrow 0$ en medida sobre compactos.

Si valen a) y b) resulta, por el teorema de Plancherel —llamando $\widehat{h_n f} = \widehat{g}$ —:

$$\|g_n\|_2 = \|\widehat{g_n}\|_2 = \|\widehat{h_n f}\|_2 \rightarrow 0$$

para toda $f \in L^2$, que es la tesis.

Recíprocamente, si $h_n \rightarrow 0$ en $\{L^2, L^2\}$, por Plancherel será $\|\widehat{h_n f}\|_2 \rightarrow 0$ para toda $f \in L^2$. Aplicando (4.6) y Plancherel resulta la tesis, c.q.d.

Puesto que no se conocen los espacios $\{L^p, L^p\}$, $1 < p < 2$, no cabe esperar una respuesta satisfactoria para caracterizar la topología. En el siguiente teorema la caracterización supone el conocimiento de la norma del operador multiplicador, lo cual hace que no sea de gran utilidad, excepto tal vez en el caso $p = 1$, para el cual $\|T\|_1$ está dada por (3.8). Designaremos δ_a al múltiplo positivo de la función característica de $|x| < a$ tal que $\|\delta_a\|_1 = 1$.

(4.8) TEOREMA. Sea $1 \leq p < 2$, $T_n \in (L^p, L^p)$ y h_n los correspondientes multiplicadores. Para que $h_n \rightarrow 0$ en $\{L^p, L^p\}$, es necesario y suficiente que:

a) $\|T_n\|_p < A$;

b) $\|T_n \delta_a\|_p \rightarrow 0$ para todo $a > 0$.

Sea $h_n \rightarrow 0$ en $\{L^p, L^p\}$. La condición a) resulta por Banach-Steinhaus; b) es obvia.

Recíprocamente, si valen a) y b), en virtud de a) basta probar que $T_n f \xrightarrow{p} 0$ para toda f de un subconjunto denso, por ejemplo, el conjunto C_0 de funciones continuas nulas fuera de un compacto. Pero toda $f \in C_0$ se aproxima por funciones $g = \delta_a * f$. Entonces, teniendo en cuenta que $T_n(\delta_a * f) = T_n \delta_a * f$ —lo cual se prueba transformando Fourier—, resulta:

$$\|T_n(\delta_a * f)\|_p = \|T_n \delta_a * f\|_p \leq \|T_n \delta_a\|_p \|f\|_1,$$

y como $\|f\|_1 < \infty$, resulta la tesis en virtud de b), c.q.d.

En el caso $p = 1$, la caracterización puede darse de una manera ligeramente distinta a la del teorema precedente. Para enunciarla, introduciremos previamente algunas definiciones.

(4.9) DEFINICIÓN. f_n converge débilmente hacia f en el infinito, si dados $\varepsilon > 0$ y $E \subset R_m$, existe un $n_0 = n_0(\varepsilon, E)$ tal que para todo $n > n_0$ se cumple:

$$\left| \int_{|x| > n_0} [f_n(x) - f(x)] \Omega_E(x) dx \right| < \varepsilon,$$

donde Ω_E es la función característica de E .

(4.10) DEFINICIÓN. Las funciones f_n tienen integrales uniformemente pequeñas en el infinito, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que para todo $n > n_0$ se cumple:

$$\int_{|x| > n_0} |f_n(x)| dx < \varepsilon.$$

Esbozaremos ahora la demostración del

(4.11) TEOREMA. Sea $T_n \in (L^1, L^1)$, y h_n los correspondientes multiplicadores. Para que $h_n \rightarrow 0$ en $\{L^1, L^1\}$, es necesario y suficiente que:

- a) $\|T_n\|_1 < A$;
- b). $h_n \rightarrow 0$ en medida sobre compactos;
- c) $T_n \delta_a \rightarrow 0$ débilmente en el infinito.

Además, la condición c) puede reemplazarse por:

- c₁) los $T_n \delta_a$ son uniformemente pequeños en el infinito, para todo $a > 0$.

La necesidad de a) resulta por Banach-Steinhaus; la de b) resulta de (4.5) y (4.7), y c) es obvio.

Para probar c_1) en base a a), b), c), basta ver que $T_n \delta_a \xrightarrow{1} 0$ para todo $a > 0$.

Un teorema de Vitali-Dunford-Pettis afirma que si una sucesión $g_n \in L^1$ verifica:

1) $\|g_n\|_1 < A$; 2) $\int_E g_n(x) dx$ converge para todo $E \subset R_m$; 3) g_n converge en medida sobre compactos; entonces g_n converge en L^1 . No ofrece dificultad probar que $T_n \delta_a$ cumple esas condiciones, y resulta c_1).

Para completar el teorema basta probar que a), b), c_1) implican (4.8). Lo cual es así, pues $T_n \delta_a$ converge en L^2 , y en consecuencia en L^1 en todo compacto, y como fuera del compacto las integrales de $T_n \delta_a$ son uniformemente pequeñas, resulta que $T_n \delta_a$ converge en L^1 , c.q.d.

Ahora consideraremos el caso de los espacios de Sobolev, y tal como hicimos en § 3, reduciremos el problema a los espacios $\{L^p, L^q\}$.

(4.12) TEOREMA. Sea $1 < p \leq 2$, $1 \leq q \leq 2$; $l, s = 0, 1, 2, \dots$. Para que $h_n \rightarrow 0$ en $\{L_l^p, L_s^q\}$, $s \geq l$, es necesario y suficiente que $|x|^\alpha h_n \rightarrow 0$ en $\{L_l^p, L_l^q\}$, para $\alpha = 0, 1, \dots, s-l$. Para que $h_n \rightarrow 0$ en $\{L_l^p, L_s^q\}$, $s \leq l$, es necesario y suficiente que $(1 + |x|^{l-s})^{-1} h_n \rightarrow 0$ en $\{L_l^p, L_l^q\}$. Si $p = 1$, las condiciones son suficientes por lo menos.

a) Caso $s \geq l$; suficiencia.

Sea $f \in L_l^p$. Tenemos $\widehat{g_n} = \widehat{h_n f}$, con $g_n \in L_s^q$ y $\widehat{\Lambda^\sigma g_n} = |x|^{\sigma-\lambda} \widehat{h_n}$, $0 \leq \sigma \leq s$, $0 \leq \lambda \leq l$.

Como $\Lambda^\lambda f \in L^p$, por hipótesis es $\Lambda^\sigma g_n \xrightarrow{q} 0$, de donde $g_n \xrightarrow{q,s} 0$.

b) Caso $s \geq l$; necesidad.

Si $f \in L^p$, será por (3.5) $f = f_0 + \Lambda^l f_1$, con $f_0, f_1 \in L_l^p$. Entonces:

$$\begin{aligned} |x|^\alpha \widehat{h_n f} &= |x|^\alpha \widehat{h_n f_0} + |x|^{\alpha+l} \widehat{h_n f_1} = |x|^\alpha \widehat{g_{0,n}} + |x|^{\alpha+l} \widehat{g_{1,n}} = \\ &= \widehat{\Lambda^\alpha g_{0,n}} + \widehat{\Lambda^{\alpha+l} g_{1,n}} = \widehat{G_n}, \end{aligned}$$

con $g_{0,n}, g_{1,n} \in L_s^q$.

Como $0 \leq \alpha \leq s - l \leq s$, $0 \leq \alpha + l \leq s$, será $\Lambda^\alpha g_{0,n}$, $\Lambda^{\alpha+l} g_{1,n} \xrightarrow{q} 0$. O sea $G_n \xrightarrow{q} 0$.

c) Caso $s \leq l$; suficiencia.

Sea $f \in L_l^p$. Tenemos $\widehat{g_n} = h_n \widehat{f}$, con $g \in L_s^q$. Sea $0 \leq \sigma \leq s$. Entonces:

$$\Lambda^\sigma \widehat{g_n} = |x|^\alpha h_n \widehat{f} = h_n (1 + |x|^{l-s})^{-1} (\widehat{\Lambda^\sigma f} + \widehat{\Lambda^{l-(s-\sigma)} f}).$$

Como $\Lambda^\alpha f$, $\Lambda^{l-(s-\sigma)} f \in L_p$, puesto que $0 \leq \sigma \leq s \leq l$ y $0 \leq l - (s - \sigma) \leq l$, resulta $\Lambda^\sigma g_n \xrightarrow{q} 0$ por hipótesis, es decir: $g_n \xrightarrow{q,s} 0$.

d) Caso $s \leq l$; necesidad.

Si $f \in L_p$, será $f = f_0 + \Lambda^l f_1$, con $f_0, f_1 \in L_l^p$. Entonces:

$$\begin{aligned} h_n (1 + |x|^{l-s})^{-1} \widehat{f} &= (1 + |x|^{l-s})^{-1} h_n \widehat{f_0} + (1 + |x|^{l-s})^{-1} |x|^l h_n \widehat{f_1} = \\ &= (1 + |x|^{l-s})^{-1} \widehat{g_{0,n}} + (1 + |x|^{l-s})^{-1} |x|^l \widehat{g_{1,n}} = \\ &= (1 + |x|^{l-s})^{-1} \widehat{g_{0,n}} + (1 + |x|^{l-s})^{-1} |x|^{l-s} \widehat{\Lambda^s g_{1,n}}, \end{aligned}$$

con $g_{0,n}, g_{1,n} \xrightarrow{q} 0$ en L_s^q por hipótesis, y por consiguiente $g_{0,n}, \Lambda^s g_{1,n} \xrightarrow{q} 0$. Pero por (2.5) es

$$(1 + |x|^{l-s})^{-1}, (1 + |x|^{l-s})^{-1} |x|^{l-s} \in \{L^q, L^q\},$$

de donde resulta

$$h_n (1 + |x|^{l-s})^{-1} \widehat{f} = \widehat{G_{0,n}} + \widehat{G_{1,n}} = \widehat{G_n},$$

con $G_n \xrightarrow{q} 0$, c.q.d.

§ 5. Núcleos singulares en L_l^p

Aplicaremos los resultados precedentes a la teoría de núcleos singulares. Designaremos con μ_n a una sucesión de medidas de Radon, y daremos condiciones necesarias y suficientes para que para toda $f \in L_l^p$ se verifique $\mu_n * f \rightarrow f$ en la norma de L_l^p . En particular, para μ_n medidas absolutamente continuas, obtendremos resultados para los núcleos singulares usuales.

Como en general μ_n no será de masa total finita, la expresión $f_n = \mu_n * f$ no tendrá sentido. Si en cambio designamos $\mu_{n,N}$ a la

restricción de μ_n en la esfera de radio N , la expresión

$$f_{n,N} = T_{nN}f = \mu_{n,N} * f$$

estará bien definida, y es natural definir a f_n como límite en la norma del espacio correspondiente. En resumen, aceptamos la siguiente

(5.1) DEFINICIÓN. Sea μ_n , $n = 1, 2, \dots$, una sucesión de medidas de Radon en R_m . Diremos que μ_n aproxima a la distribución δ en L_l^p ($1 \leq p < \infty$, $l = 0, 1, 2, \dots$) cuando para toda $f \in L_l^p$ se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \mu_{n,N} * f = f,$$

en la norma de L_l^p .

Asimismo, puede tratarse el caso en que $f \in L_l^p$ y la convergencia se toma en otro L_s^q . Los casos no triviales sólo se presentan si $p = q$ y $s \leq l$.

Señalemos que, siendo $\mu_{n,N}$ de masa total finita, existe su transformada de Fourier.

La conexión de la teoría de multiplicadores con la de núcleos singulares está contenida en el siguiente

(5.2) LEMA. Sea $1 \leq p, q \leq 2$; $l, s = 0, 1, 2, \dots$. Para que para toda $f \in L_l^p$ se cumpla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \mu_{n,N} * f = f$$

en la norma de L_s^q , es necesario y suficiente que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} T_{nN} = I$$

(= operador identidad) en (L_l^p, L_s^q) , es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \widehat{\mu_{n,N}} = 1$$

en $\{L_l^p, L_s^q\}$.

En virtud de que $\widehat{\mu_{n,N}} \in \{L_l^p, L_s^q\}$ implica $\widehat{\mu_n} \in \{L_l^p, L_s^q\}$ por la completitud (4.2), el lema es obvio.

Entonces, si aplicamos (5.2) a cada resultado de § 3 y § 4, quedará resuelto el problema de los núcleos singulares en cada caso, que resumimos en el siguiente enunciado.

(5.3) TEOREMA.

1.º) μ_n aproxima a δ en L^1 si y sólo si:

a) $\int_{R_m} |d\mu_n(t)| < A$ (ó $\|K_n\|_1 < A$ en el caso de continuidad absoluta);

b) $\mu_n * \delta_a \xrightarrow{1} \delta_a$, para todo $a > 0$.

2.º) μ_n aproxima a δ en L^2 si y sólo si:

a) $\|\hat{\mu}_{n,N}\|_\infty < M$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\mu}_{n,N} = 1$ en medida sobre compactos.

3.º) μ_n aproxima a δ en L_s^2 para funciones de L_l^2 ($l \geq s$) si y sólo si:

a) $\|\hat{(\mu}_{n,N} - 1)(1 + |x|^{l-s})^{-1}\|_\infty < M$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\mu}_{n,N} = 1$ en medida sobre compactos.

4.º) μ_p aproxima a δ en L_l^p si y sólo si μ_n aproxima a δ en L^p . ($1 < p \leq 2$).

Sólo consignamos los resultados que creemos de más fácil aplicación, pero podrían agregarse otros. La demostración de (5.3) es inmediata; tal vez lo único que convenga señalar es que en 1.º no aparecen los núcleos “cortados” $\mu_{n,N}$ porque la masa total debe ser finita. Insistimos en que las condiciones obtenidas no sólo son suficientes, sino también necesarias.

La aplicación de (5.3) a los núcleos singulares usuales k_n , donde $d\mu_n(t) = k_n(t) dt$, no ofrece dificultad. Así, 1.º expresa que k_n debe ser casi positivo y que debe aproximar en L^1 a las funciones δ_a . Respecto a 2.º), es fácil ver que todos los núcleos casi positivos —y en particular los positivos: Poisson, Fejer, Weierstrass, Landau, etc.— verifican la condición, y aún otros que no son tales, como el de Dirichlet, que verifica la propiedad más débil

$$\left| \int_{a_n}^{b_n} k_n(t) dt \right| < A.$$

Sin embargo, otros núcleos del mismo tipo, como ser

$$k_n(t) = [1 - I_{\lambda/n}(t)] \frac{\cos nt}{|t|}, \quad (m = 1)$$

donde λ es la raíz (única) de

$$\int_{\lambda}^{\infty} \frac{\cos u}{u} du = \frac{1}{2},$$

no cumple la condición, y por lo tanto no aproxima a δ en L^2 . E, mismo par de ejemplos —el de Dirichlet y el último núcleo—, siendo ambos de tipo Fejer — $k_n(t) = n h(nt)$ —, prueba que tampoco puede afirmarse nada en general para la convergencia en L^2 de ese tipo de núcleos. Consideraciones paralelas pueden hacerse para las demás afirmaciones del teorema.

§ 6. Núcleos generados por sistemas ortogonales.

En esta sección nos apartamos de la teoría de multiplicadores. Consideraremos núcleos singulares

$$k_n(x, t) = \sum_{h=0}^n \varphi_h(x) \bar{\varphi}_h(t)$$

generados por un sistema $\{\varphi_h(x)\}$, $h = 0, 1, 2, \dots$ ortonormal en una región $E \subset R_m$; tales núcleos, en general, no serán de convolución. Resolveremos el problema de la convergencia en $L^2(E)$, y como esta equivale a la completitud del sistema $\{\varphi_n\}$, podemos expresar el resultado de la manera siguiente:

(6.1) TEOREMA. Para que el sistema ortonormal $\{\varphi_h\}$ $h = 0, 1, 2, \dots$ sea completo en $L^2(E)$, $E \subset R_m$, es necesario y suficiente que para todo cubo $V_{a,b} = \{t; a_i < t < b_i; i = 1, \dots, n\}$,

$$\int_{V_{a,b}} k_n(x, t) dt$$

converja en medida hacia la función característica del cubo.

En particular, en lo que respecta a la suficiencia, basta pedir —por ejemplo, si $m = 1$ — que k_n sea un núcleo singular en el sentido usual:

$$\int_a^b k_n(x, t) dt \rightarrow 1$$

para todo $(a, b) \in x$. Por ejemplo: como el núcleo de Dirichlet verifica obviamente esta condición, se obtiene una rápida demostración de la completitud del sistema trigonométrico.

DEMOSTRACIÓN DE (6.1).

Puesto que la convergencia en L^2 implica convergencia en medida, la necesidad es inmediata.

Respecto a la suficiencia ⁽¹⁾, observemos en primer lugar que como $\varphi_h \in L^2$, para toda $f \in L^2$ existe su aproximante f_n .

Basta probar, en virtud del teorema de Steklov, que la igualdad de Parseval se cumple en un conjunto denso de $L^2(E)$, por ejemplo, el constituido por las funciones escaleras. Una tal función se escribe:

$$f(x) = \sum_{i=1}^l \lambda_i \Omega_{V_i}(x),$$

donde λ_i = constantes, $l < \infty$, y Ω_{V_i} es la función característica de un cubo V_i .

En virtud de las hipótesis resulta inmediatamente que las aproximantes f_n de f convergen hacia ésta en medida, y por consiguiente existirá una subsucesión n_i tal que

$$f_{n_i} \rightarrow f \text{ p.p. } x \in E.$$

Aplicando el teorema de Fatou de paso al límite bajo el signo de integral a la sucesión $|f_{n_i}(x)|^2$, tenemos:

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &\leq \sup_{n_i} \|f_{n_i}\|_2^2 = \sup_{n_i} \left\| \sum_{j=0}^{n_i} \varphi_j(x) (f, \varphi_j) \right\|_2^2 = \\ &= \sup_{n_i} \sum_{j=0}^{n_i} |(f, \varphi_j)|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |(f, \varphi_j)|^2. \end{aligned}$$

En virtud de la desigualdad de Bessel queda excluido el signo $<$, y por lo tanto resulta la igualdad de Parseval, y con ella la tesis, c.q.d.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. P. CALDERÓN, *Integrales singulares y sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales hiperbólicas*. (Cursos y seminarios de Matemática; F. C. E. y N.; Univ. de Buenos Aires; Fascículo 3; 1960).
- [2] A. P. CALDERÓN and A. ZYGMUND, *Singular integral operators and differential equations*. (American Jour., vol. LXXIX, N.º 4, 1957; pág. 901-921).

⁽¹⁾ Una observación del prof. J. P. Kahane ha permitido simplificar la demostración.

- [3] M. COTLAR, *Condiciones de continuidad de operadores potenciales y de Hilbert*. (Cursos y seminarios de Matemática; F. C. E. y N.; Univ. de Buenos Aires; Fascículo 2; 1959).
- [4] N. DUNFORD and J. T. SCHWARTZ, *Linear operators*, Part. I: General Theory. (Pure and applied mathematics, volume VII, Interscience Publishers, Inc., New York).
- [5] E. HILLE and R. S. PHILLIPS, *Functional analysis and semi-groups*. (American Math. Society, Colloquium publications, volume XXXI, revised edition).
- [6] J. MARCINKIEWICZ, *Sur les multiplicateurs des séries de Fourier*. (Studia Mathematica, vol. 8, 1939, pág. 78-91).