FORMULE DE PLANCHEREL ET GROUPES DE LIE

par A. PEREIRA GOMES
(Instituto de Física e Matemática, Universidad do Recife)

Cette note est un éxposé rapide des idées essentielles qui ont amené Harish-Chandra à une formule de Plancherel explicite concernant les groupes de Lie semi-simples complexes [1], [2]. Il ne peut donc être question de donner ici les détails éxigés par un traitement rigoureux de la question. Cet aperçcu n'a d'autre but que de mettre en relief, pour des non espécialistes en ce domaine, certains aspects actuels de l'Analyse Harmonique et les méthodes fécondes de cet Auteur.

1. *Position du problème.* — G étant un groupe localement compaet unimodulaire séparable (ou de type dénombrable), soit $\widehat{G}$ le groupe dual de G. Pour $\chi \in \widehat{G}$ soit U_χ une représentation unitaire irréductible de G dans $L^2(G, dg)$, de caractère χ (deux telles représentations étant équivalentes si et seulement si elles ont le même caractère, nous identifions les représentations qui ont le même caractère). Soit $\mathscr{D}(G)$ l'espace des fontions idéfiniment différentiables à support compact; pour $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(G)$, posons

$$H_\chi(\varphi) = \int_G U_\chi(g)\ \varphi(g)\ dg$$

où dg est la mesure invariante sur G. L'opérateur $H_\chi(\varphi)$ est du type de Hilbert-Schmidt et a une trace; on sait qu'il existe alors une mesure positive $d\mu(\chi)$ sur $\widehat{G}$ telle que

$$\int_G \varphi(g)\ \overline{\psi(g)}\ dg = \int_{\widehat{G}} Tr\,(U_\chi(\varphi)\ U_\chi(\psi)^*)\ d\mu(\chi)\,;$$

cette formule de Pancherel étant valable pour φ, ψ dans $\mathscr{D}(G)$, on peut faire son prolongement par continuité à $L^2(G, dg)$.

La question important à résoudre est la determination explicite d'une telle mesure $d\mu$ sur $\hat{G}$. Gelfand et Naimark ont donné une solution réputée assez compliquée, pour le groupe unimodulaire $SL(n, C)$, en 1950, [5]. Gelfand et Graev ont trouvé une autre méthode, qu'ils ont appliquée à la solution du problème relatif à ce groupe unimodulaire et aux groupes orthogonal et sympléctique, [6].

La solution la plus générale est certainement celle de Harish-Chandra. Sa méthode n'est pas applicable aux cas des groupes semi-simples réels; il en a fait une adaptation pour le groupe $SL(2, R)$, [4]. Mais le problème pour le cas général demeure ouvert.

2. *Deduction de la formule de Plancherel.* — Soient G un groupe de Lie semi-simple complexe, connexe, $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie de G, f une sous-algèbre de Cartan de $\mathcal{G}$; représentons par α les racines de $\mathcal{G}$ relatives à f et soit $\{ H_\alpha, X_\alpha \}$ une base de Weyl de $\mathcal{G}$. D'après le théorème de Cartan-Mostow-Iwasawa, nous avons la décomposition de $\mathcal{G}$ en somme directe:

$$\mathcal{G} = f^+ \oplus \mathcal{N} \oplus k_0$$

où k_0 est une forme réelle compacte de $\mathcal{G}$, f^+ est une sous-algèbre de f engendrée sur le corps des réels par les H_α et $\mathcal{N}$ est une sous-algèbre nilpotente de $\mathcal{G}$, engendrée par les X_α, avec $\alpha > 0$.

Désignons par K, A, A^+, A^-, N les sous-groupes de G engendrés respectivement par k_0, f, f^+, $f^- = i f^+$, $\mathcal{N}$; tous ces groupes sont fermés et connexes, A est abélien, K compact maximal, $A^- = K \cap A$ et on a pour G la décomposition

$$G = A^+ NK;$$

c'est à dire que tout g s'écrit de façon unique $g = a^+ nk$, avec $a^+ \varepsilon A^+$, $n \varepsilon N$, $k \varepsilon K$. Posons $AN = T$; T est un sous-groupe résoluble et $G = TK$, $T \cap K = A^-$. Harish-Chandra a montré que toute représentation irréductible de G est équivalente à une représentation induite par une représentation de T.

Le problème qui nous occupe équivaut à la décomposition de la représentation régulière de G en somme continue de représentations irréductibles. Ainsi, on va considérer une famille continue de représentations irréductibles de G dans des espaces hilbertiens $\mathcal{H}_\lambda$, qui jouent la rôle de composantes de la représentation régulière de G dans la somme continue des $\mathcal{H}_\lambda$. De telles représentations irréductibles $U_\lambda : G \longrightarrow \mathcal{H}_\lambda$ sont définies comme des représentations induites par certaines représentations du sous groupe résoluble T. Et il suffit, pour obtenir la formule de Plancherel, de considérer des représentations unidimensionnelles de T. [1]

Soit $\lambda : T \longrightarrow 0^*$ une représentation unidimensionnelle de T et considérons l'espace $\mathcal{H}_\lambda$ des fonctions x sur G telles que

$$x(tk) = \lambda(t)\, x(k) \ , \ \int_K |x(k)|^2\, dk < \infty ,$$

dk étant la mesure invariante de K, que nous supposons normalisée de façon que $\int_K dk = 1$. Il est clair que ces fonctions sont determinées par les fonctions sur K telles que $x(a^- k) = \lambda(a^-)\, x(k)$, où $k \in K$, $a^- \in A^- = K \cap T = K \cap A$.

Pour chaque λ, on prend la représentation régulière $U_\lambda : G \longrightarrow \mathcal{H}_\lambda$, définie par l'identité en $g \in G$:

$$U_\lambda(g)\, x = x_g, \quad \text{où} \quad x_g(g') = x(g' g) ;$$

U_λ est une représentation irréductible de G (induite par la représentation λ de T) et pour qu'elle soit unitaire il suffit de se restreindre aux représentations λ telles que $|\lambda(t)|^2 = \beta(t)$, où $\beta(t)$ est le quotient des mesures invariantes à droite $d\mu_r(t)$ et à gauche $d\mu_l(t)$ de T; on prendra donc $\lambda(t) = \beta(t)^{1/2}\, \chi(t)$, $\chi(t)$ étant un caractère de T; en fait il suffit que ce soit vérifié sur A, c'est à dire que

$$\lambda(a) = \beta(a)^{1/2}\, \chi(a) ;$$

dorénavant nous écrirons donc U_χ au lieu de U_λ.

La représentation U_χ se prolonge par continuité à l'algèbre de G posant, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(G)$,

$$U_\chi(\varphi) = \int_G U_\chi(g)\, \varphi(g)\, dg ,$$

c'est à dire que, pour tout $x \in \mathcal{H}_\lambda$.

$$U_\chi(\varphi)\, x(g) = \iint_{T\times K} x(k)\, \lambda(t)\, \varphi(g^{-1} tk)\, d\mu_1(t)\, dk .$$

[1] Nous suivons ici un exposé de R. Godement sur les groupes semi-simplise complexes, fait a Paris en 1958.

D'apres un théorème de Harish-Chandra [3], $U_\chi(g)$ étant irréductible, l'opérateur $U_\chi(\varphi)$ possède une trace. D'autre part, la formule antérieure s'écrit

$$U_\chi(\varphi)\; x(g) = \int_K \Phi_\chi(k_1, k)\; x(k)\; dk$$

en posant

$$\Phi_\chi(k_1, k) = \int_T \varphi(k_1^{-1} tk)\; \lambda(t)\; d\mu_1(t),$$

ce qui montre que $U_\chi(\varphi)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt. Sa trace est donnée par la relation

$$T_r\, U_\chi(\varphi) = \int_K \Phi_\chi(k, k)\; dk.$$

On peut voir que $d\mu_1(t) = da\; dn$, où da et dn sont les mesures invariantes sur A et N, respectivement, convenablement normalisées; et si l'on fait

$$F_\varphi(a) = \beta(a)^{1/2} \iint_{N\times K} \varphi(k^{-1} ank)\; dk\; dn$$

on trouve finalement

$$T_r\, U_\chi(\varphi) = \int_A F_\varphi(a)\; \chi(a)\; da = \hat{F}_\varphi(\chi);$$

c'est la transformée de Fourier de F_φ, qui va jouer le rôle de la transformée de Fourier de φ dans le cas classique.

On peut remarquer que si on met

$$\varphi'(g) = \int_K \varphi(k^{-1} gk)\; dk$$

la fonction φ' est invariante par K, et

$$F_\varphi(a) = (a)^{1/2} \int_N \varphi'(an)\; dn = F_{\varphi'}(a).$$

Nous admettrons donc, en plus, que φ est invariante par K et poserons simplement

$$F_\varphi(a) = \beta(a)^{1/2} \int_N \varphi(an)\; dn;$$

$F_\varphi(a)$ est à support compact et nous avons la formule

$$F_\varphi(a) = \int_{\hat{A}} T_r\, U_\chi(\varphi)\; \overline{\chi(a)}\; d\chi .$$

On est ramené alors à determiner une mesure positive $d\mu(\chi)$ sur $\hat{A}$ telle que, 1 désignant l'unité de G, on ait

$$\varphi(1) = \int_{\hat{A}} \hat{F}_\varphi(\chi)\; d\mu(\chi) = \int_{\hat{A}} T_r\, U_\chi(\varphi)\; d\mu(\chi)\,; \qquad (1)$$

en effet, on voit de suite que pour une fonction φ définie par

$$\varphi(g) = \int_G \varphi_1(gg')\; \overline{\varphi_2(g')}\; dg',$$

on obtient

$$U_\chi(\varphi) = U_\chi(\varphi_1)\; U_\chi(\varphi_2)^*,$$

où

$$U_\chi(\varphi_2)^* = \int_G U_\chi(g)^*\; \overline{\varphi_2(g)}\; dg\,;$$

la formule (1) nous donne alors la Formule de Plancherel:

$$\varphi(l) = \int_G \varphi_1(g)\; \overline{\varphi_2(g)}\; dg = \int_{\hat{A}} T_r\,(U_\chi(\varphi_1)\; U_\chi(\varphi_2)^*)\; d\mu(\chi).$$

3. *Une relation fondamentale.* — Pour établir la formule (1), la méthode consiste à passer du groupe G à son algèbre de Lie $\mathcal{G}$ moyennant l'application exponentielle $X \longrightarrow \exp X = g$, qui applique isomorphiquement un voisinage V de l'origine de $\mathcal{G}$ en un voisinage W de l'unité de G. On démontre qu'il est possible de choisir un V qui soit invariant par la groupe AdK et de se restreindre ensuite aux fonctions φ dont le support est dans l'image W d'un tel V. Ceci veut dire que l'on considère sur $\mathcal{G}$ les fonctions ϕ telles que $\phi(X) = \varphi(\exp X)$, pour tout $X \in V$, nulles en dehors de V; alors $\phi \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$, $\phi(0) = \varphi(1)$, $(Adk\, X) = \phi(X)$ si $k \in K$.

Il s'agit d'abord de determiner F_φ à l'aide de ϕ, donc de calculer $\int_N \varphi(an)\; dn$ moyennant une intégral sur l'algèbre de Lie $\mathcal{N}$ et d'obtenir $\beta(a)$ à partir de f.

Posons $a = \exp H$, $H \in \mathfrak{f}$; si H est un élément régulier de $\mathcal{G}$, on peut écrire

$$an = \exp (H + Z), \text{ avec } Z \in \mathcal{N};$$

en effet, la correspondance $Z \to (\exp H)^{-1} \exp (H + Z) = n$ est une application analytique, biunivoque et régulière de $\mathcal{N}$ sur son image N dans G; donc

$$\varphi (an) = \phi (H + Z)$$

$$\int_N \varphi (an) = \int_{\mathcal{N}} \phi (H + Z) \, J \, dZ,$$

J étant le jacobien de la différentielle de cette application et dZ la mesure euclidienne sur $\mathcal{N}$. On obtient

$$J = \prod_{\alpha > 0} \left| \frac{1 - \exp (-\alpha (H))}{\alpha (H)} \right|^2 \quad \text{(indépendant de } Z)$$

$$\beta (a) = \prod_{\alpha > 0} | \exp (\alpha (H)) |^2,$$

et on arrive donc à l'expression

$$F_\varphi (a) = \prod_{\alpha > 0} \left| \frac{\exp (\alpha (H)/2 - \exp (-\alpha (H)/2}{\alpha (H)} \right|^2 \int_{\mathcal{N}} \phi (H + Z) \, dZ$$

Si on observe que le coefficient de l'intégral du second membre est égal à

$$\left| \det^C_{\mathcal{G}} \frac{1 - \exp (-AdH)}{AdH} \right| = \Delta (H),$$

en faisant, pour $X \in \mathcal{G}$, $\Theta (X) = \Delta (H) \, \phi (X)$, l'expression antéreiure devient

$$F_\varphi (a) = \int_{\mathcal{N}} \Theta (H + Z) \, dZ$$

et on a $\Theta (0) = \phi (0) = \varphi (1)$, avec $\Theta \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$.

Il s'agait maintenant de calculer $\Theta(0)$, ce qu'on fait au moyen de la transformation de Fourier dans $\mathcal{G}$. Si on désigne par $Re < X, Y >$ la partie réelle de la forme de Killing de $\mathcal{G}$ et par, dX la mesure euclidienne de $\mathcal{G}$, la transformée de Fourier de la fonction Θ est

$$\widehat{\Theta} (Y) = \int_{\mathcal{G}} \Theta (X) \exp (-iRe < X, Y >) \, dX,$$

et on a

$$\Theta(0) = \int_{\mathcal{G}} \widehat{\Theta}(Y)\, dY.$$

Pour le calcul du second membre on utilise la formule d'intégration

$$\int_{\mathcal{G}} \psi(X)\, dX = \iint_{\mathfrak{f} \times \mathcal{H}} \psi(H + Z) \prod_{\alpha > 0} |\alpha(H)|^2\, dH\, dZ$$

valable pour toute fonction ψ absolument intégrable et invariante par AdK.

On obtient

$$\Theta(0) = \iint \widehat{\Theta}(H + Z) \prod_{\alpha > 0} |\alpha(H)|^2\, dH\, dZ.$$

Si on définit un opérateur différentiel D sur $\mathcal{G}$ en posant

$$D = \prod_{\alpha > 0} D_\alpha \overline{D_\alpha},$$

où

$$D_\alpha F(X) = \frac{\partial}{\partial z} F(X + zH_\alpha)|_{z=0}$$

$$D_\alpha F(X) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} F(X + zH_\alpha)|_{z=0}$$

z étant une variable complexe, on peut montrer que

$$\widehat{D\Theta}(X) = \prod_{\alpha > 0} |\alpha(H)|^2\, \widehat{\Theta}(X)$$

et écrire

$$\Theta(0) = \iint \widehat{D\Theta}(H + Z)\, dH\, dZ.$$

On montre ensuite que

$$\iint \widehat{D\Theta}(H + Z)\, dH\, dZ = \int D\,\Theta(Z)\, dZ$$

et par conséquent

$$\Theta(0) = \int_{\mathcal{H}} D\,\Theta(Z)\, dZ = D \int_{\mathcal{H}} \Theta(Z)\, dZ,$$

puisque Θ est à support compact.

On arrive ainsi à la relation fondamentale

$$\varphi(1) = D \prod_{\alpha > 0} \left| \exp(\alpha(H)) \right| \int_N \varphi((\exp H) n)\, dn \Big|_{H=0}$$

qui permet d'obtenir l'expression (1). En effet, notant encore D l'opérateur différentiel induit sur le groupe G, par l'opérateur D sur $\mathcal{G}$, on peut écrire plus brièvement

$$\varphi(1) = DF_\alpha(a) \,|_{a=1}:$$

une simple application de la théorie de la transformation de Fourier au groupe abélien A montre que

$$DF_\varphi(a) \,|_{a=1} = \int_{\hat{A}} \hat{F}_\varphi(\chi)\, m(\chi)\, d\chi,$$

où on a fait $m(\chi) = D\chi(a) \,|_{a=1}$ et $d\chi$ étant la mesure invariante sur $\hat{A}$. Du fait que $\hat{F}_\varphi(\varphi) = Tr\, U_\chi(\varphi)$ il en résulte, finalement:

$$\varphi(1) = \int_{\hat{A}} Tr\, U_\chi(\varphi)\, m(\chi)\, d\chi,$$

qui est la formule (1) cherchée.

Ajoutons seulement, pour terminer, que les caractères χ peuvent s'exprimer en fonction de r paramètres entiers et r paramètres réels ($r = \dim f$), à savoir, les valeurs prises par deux formes linéaires λ, ν sur les éléments d'une base H_j, $1 \leq j \leq r$, de f; on a signalé que tout élément de f s'écrit de façon unique $H = H^+ + H^-$, avec $H^+ \varepsilon f^+$, $H^- \varepsilon f^-$; alors si $\chi(a) = \exp(\lambda(H^-) + i\,\nu(H^+))$ on montre que

$$m(\chi) = \prod_{\alpha > 0} |(\lambda(H_\alpha) + i\nu(H_\alpha))|^2;$$

$m(\chi)\, d\chi$ est donc bien une mesure positive.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Harish-Chandra, *Proc. Nac . Ac. Sc* USA, 37 (1951), 813-818.
[2] — — *Trans. Am. Math. Soc.*, 76 (1954), 485-528.
[3] — — *Trans. Am. Math. Soc.*, 76 (1954).
[4] — — *Proc. Nat. Ac. Sc.*, 38 (1952).
[5] Gelfand et Naimark, *Trudy Mat. Inst. Steklov*, 36 (1950).
[6] Gelfand et Graev, *Am. Math. Soc. Translations* (serie 2), 9 (1955).