QUELQUES EXTENSIONS DU THÉORÉME DE DÉDUCTION

par J. PORTE
(Universidad Nacional del Sur)

1. — *Systèmes formels.*

Parmi les structures mathématiques que les logiciens appelent "systèmes formels", el faut distinguer les *systèmes logistiques* (pour lesquels on spécifie tels systèmes particuliers d'axiomes et de règles de déduction) et les *systèmes thétiques* (définis par l'ensemble des thèses —ou "théorèmes"— sans que tel système d'axiomes et de règles soient compris dans le définition de la structure). Deux systèmes logistiques différents peuvent avoir les mêmes thèses: on dire qu'ils "engendrent" le même système thétique, ou encore qu'ils sont des "axiomatisations" différents de ce système thétique.

Une étape intermédiaire entre un système logistique et le système thétique qu'il engendre, est la relation de *déductibilité* du système logistique: Deux systèmes logistiques différents engendrant le même système thétique peuvent avoir ou non la même relation de dédutibilité. (1).

2. — *Théorèmes de déduction et de détachement.*

Etant donnée une relation de déductibilité, $\Vdash$, et une fonction binaire δ, qui transforme les couples de formules en formules, on dira qu'on a *le théorème de déduction pour* δ *relativement à* $\Vdash$ si

(1) $$\Gamma, x \Vdash y \rightarrow \Gamma \Vdash \delta(x, y)$$

où x, y sont des formules quelconques, et où Γ est une suite finie quelconque de formules (en particulier Γ peut être vide). (2)

On dira qu'on a le *théorème de détachement pour* δ *relativement à* $\Vdash$ si on a la réciproque de (1), à savoir

(2) $$\Gamma \Vdash \delta(x, y) \rightarrow \Gamma, x \Vdash y$$

(1) Il est équivalent de considérer la relation de déductibilité ou la fonction "conséquence" (voir Tarski 1930a et Tarski 1930b).

(2) Ici "$\rightarrow$" (respectivement: "$\rightleftarrows$") n'est qu'une abréviation pour "si... alors" (respectivement: "si et seulement si").

Il est facile de voir que (2) équivaut à

$$x , \delta (x , y) \Vdash y \tag{3}$$

ce qui explique le nom de détachement.

Dans la littérature, plusieurs exemples de théorème de déduction et de théorème de détachement on été étudiés, avec, en général

$$\delta (x , y) = x \supset y$$

où $\supset$ est l'implication du calcul propositionnel classique, du calcul propositionnel intuitionniste, ou d'une forme du calcul des prédicats du premier ordre.

La propriété (3) est souvent prise comme règle de déduction d'un système logistique; elle s'appelle alors "règle de détachement" (pour δ).

Ecrivons "$\vdash_s x$" pour indiquer que x est une thèse du système logistique S (j'écrirai "$\vdash x$" quand il n'y a pas d'ambiguité), c'est-à-dire, $\Vdash_s$ (écrit "$\Vdash$" s'il n'y a pas d'ambiguité) étant la déductibilité engendrée par le système logistique:

$$\vdash_s x \rightleftarrows \varnothing \Vdash_s x$$

où $\varnothing$ est la suite vide de formules de S.

Supposons (ce qui est le cas en général), que toutes les règles de déduction du système logistique S puissent s'écrire

$$f_1 (z_1 \ldots z_k) , \ldots f_l (z_1 , \ldots z_k) \Vdash g (z_1 , \ldots z_k)$$

où k, l sont des nombres naturels — dépendant de chaque règle et où $z_1, \ldots z_k$ sont des formules quelconques de S et où $f_1, \ldots f_2$, g sont des fonctions qui transforment les k-uples de formules en formules.

On a alors:

Théorème 1: le théorème de déduction pour δ relativement a $\Vdash$ est une conséquence de la conjonction des conditions suivantes (où $x, y, \ldots z_1 \ldots z_k$ sont des formules quelconques):

(4)
- (a) $\vdash \delta (x , x)$
- (b) $y \Vdash \delta (x , y)$
- (c) $\delta (x . f_1 (z_1 , \ldots z_k)), \ldots \delta (x , f_l (z_1, \ldots z_k))$ $\Vdash \delta (x , g (z_1 \ldots z_k)$ por chacune des règles de déduction [3],

[3] En particulier, si la règle de détachement pour δ est la seule règle de déduction, (c) se réduit à $\delta (x, \delta (y , z)), \delta (x , y) \Vdash \delta (x, z)$.

Demostration: Soit $\mathcal{X}$ un ensemble fini quelconque de formules. Il faut démontrer que, pour toutes formules x, y on a (4)

$$y \in Cn(\mathcal{X} \cup \{x\}) \longrightarrow \delta(x, y) \in Cn\,\mathcal{X}$$

ou encore

(5) $$Cn(\mathcal{X} \cup \{x\}) \subseteq \mathcal{U}.$$

en posant

(6) $$\mathcal{U} = \{u \mid \delta(x, u) \in Cn\,\mathcal{X}\}$$

$Cn\ (\mathcal{X} \cup \{x\})$ est, par définition le plus petit ensemble qui (i) contient x comme élément, (ii) contient $\mathcal{X}$ et les axiomes commes parties et (iii) est fermé pour les règles de déductions. Supposons que $\mathcal{U}$ (qui dépend de x et de $\mathcal{X}$) satisfasse à ces trois propriétés; il est équivalent d'écrire d'après la définition de $\mathcal{U}$;

(7)
(a′) $\delta(x, x) \in Cn\ \mathcal{X}$
(b′) $y \in \mathcal{X} \longrightarrow \delta(x, y) \in Cn\ \mathcal{X}$
(c′) $\delta(x, f_1(z_1, \ldots z_k) \in Cn\ \mathcal{X}$ et ...
et $\delta(x, f_l(z_1, \ldots z_k)) \in Cn\ \mathcal{X} \longrightarrow \delta(x, g(z_1, \ldots z_k))$
$\in Cn\ \mathcal{X}$

Mais les conditions (4) et (7) sont équivalentes. (7) $\longrightarrow$ (4) comme on le voit en prenant des cas particuliers des formules (7):

$$\mathcal{X} = \varnothing \text{ por (a′)}, \quad \mathcal{X} = \{y\} \text{ pour (b′)},$$
$$\mathcal{X} = \{f_1(z_1, \ldots z_k), \ldots f_l(z_1 \ldots z_k)\}$$

por les conditions (c′). Réciproquement, (4) $\longrightarrow$ (7) immédiatement (d'après les propriétés générales de $\Vdash$ ou de Cn)

Théorème 2: Si le théorème de détachement por δ relativement à $\Vdash$ est vrai, alors le théorème de déduction (pour δ relativement à $\Vdash$) est équivalent aux conditions (4).

En effet des théorèmes de détachement et de déduction, on tire immédiatement la condiction (4) — (c′).

Remarque. . On peut montrer par un contre-exemple que les conditions (7) ne sont pas équivalentes au théorème de déduction quand le théorème de détachement n'est pas valable.

(4) Cn est l'ensemble des conséquences de χ.

3. — *Applications diverses.*

(a) Calcul propositionnel classique:

On peut le formular avec l'implication ($\supset$) et la négation ($\neg$) comme seuls connecteurs primitifs, la règle de détachement pour la fonction δ

$$\delta(x, y) = x \supset y$$

étant la seule règle de déduction primitive (voir par exemple Church 1956, système P). Pour démontrer le théorème de déduction, il suffit de démontrer

$$(8) \quad \left| \begin{array}{l} \vdash x \supset x \\ \quad x \Vdash y \supset x \\ \quad x \supset y,\ x \supset (y \supset z) \Vdash x \supset z \end{array} \right.$$

(ce qui se trouve dans tous les manuels).

(b) Divers calculs non classiques: En particulier calcul propositionnel intuitionniste, le calcul implicationnel classique (partie en $\supset$, sans negatio, du calcul propositionnel classique), le calcul implicationnel intuitionniste (partie en $\supset$ du calcul intuitionniste). Résultat identique à celui du cas ci-dessus).

Remarque: Dans les cas (a) et (b), si les calculs (systèmes logistiques) sont formulés avec une règle de substitution, le théorème de déduction n'est plus valable: en effet, on a alors, par exemple (p_1 et p_2 étant des variable propositionnelles distinctes):

$$\text{et} \left| \begin{array}{l} p_1 \Vdash p_2 \\ \text{non} \vdash p_1 \supset p_2 \end{array} \right.$$

Dans les manuels on trouve souvent un "théorème de déduction" énoncé et démontré pour de tels calculs: cela résulte de ce que les auteurs donnent aux mots "déduction" et "déductibilité" des sens plus spécualisés et plus complexes que le sens général adopté ici (voir par exemple Church 1956, § 13).

(c) Calcul trivalent de Lukasiewicz [5]:

Dans une formulation de ce calcul utilisant la règle de détachement comme seule règle de déduction, on a le théorème de déduc-

[5] Voir Łukasiewicz et Tarski 1930, (ou Tarski 1956, ch IV).

tion pour la fonction δ défine par (6):

$$\delta(x,\ y) = x \supset (x \supset y) \quad (^7)$$

Il suffit de vérifier

$$\left| \begin{array}{l} \vdash x \supset x \\ \quad x \Vdash y \supset (y \supset x) \\ \quad x \supset (x \supset y),\ x \supset (x \supset (y \supset z)) \Vdash x \supset (x \supset z) \end{array} \right.$$

ce qui est une conséquence de la validité des formules

$$\left| \begin{array}{l} \quad x \supset x \\ \quad x \supset (x \supset (y \supset x)) \\ (x \supset (x \supset y)) \supset (x \supset (x \supset (y \supset z))) \supset (x \supset (x \supset z))) \end{array} \right.$$

(vérification facile).

4. — *Application aux calculs modaux.*

Le calcul modal S4, considéré comme systène thétique, avec la négation ($\neg$) l'implication ($\supset$) et la nécessité (N) comme seuls connecteurs primitifs, peut être engendré par l'un quelconque des deux systèmes logistiques ci-dessous: S 4.1 et S 4.2 (8)

$$\text{S 4.1} \left| \begin{array}{ll} A_1^1: & \vdash N(x \supset (y \supset x)) \\ A_2^1: & \vdash \mathrm{N}((x \supset (y \supset z)) \supset ((x \supset y) \supset (x \supset z))) \\ A_3^1: & \vdash \mathrm{N}((\neg\, x \supset \neg\, y) \supset (y \supset x)) \\ A_4^1: & \vdash N(N(x \supset y) \supset (Nx \supset Ny)) \\ A_5^1: & \vdash N(Nx \supset NNx) \\ A_6^1: & \vdash N(Nx \supset x) \\ A_7^1: & \vdash Nx \supset x \\ R_1^1: & \quad x,\ x \supset y \Vdash_1 y \end{array} \right.$$

(6) Voir Church 1956, § 19.8.
(7) C'est-à-dire $\delta(x,\ y) = CxCxy$ avec la notation de Łukasiewicz.
(8) S 4.2 est le système défini dans Gödel 1933; S 4.1 est analogue au système défini dans McKinsey-Tarski 1948. Pour démontrer que ces deux systèmes logistiques ont les mêmes thèses, utiliser les méthodes de Tarski et McKinsey.

$$\text{S 4.2}\quad\left|\begin{array}{ll}
A_1^2: & \vdash x \supset (y \supset x) \\
A_2^2: & \vdash (x \supset (y \supset z)) \supset ((x \supset y) \supset (x \supset z)) \\
A_3^2: & \vdash (\neg\, x \supset \neg\, y) \supset (y \supset x) \\
A_4^2: & \vdash N(x \supset y) \supset (Nx \supset Ny) \\
A_5^2: & \vdash Nx \supset NNx \\
A_6^2: & \vdash Nx \supset x \\
R_1^2: & \quad x,\ x \supset y \Vdash_2 y \\
R_2^2: & \quad x \Vdash_2 Nx
\end{array}\right.$$

On a alors les résultats suivants:

a) Théorème de déduction relativement à $\Vdash_1$, pour δ_1 définie par

$$\delta_1(x,\ y) = x \supset y$$

Trivial: appliquer à §4.1 les méthodes qui ont servi pour le calcul propositionnel classique (c'est-à-dire démontrer les formules (8) ci-dessus).

b) Théorème de déduction, relativement à $\Vdash_2$, pour δ_2 définie par

$$\delta_2(x,\ y) = Nx \supset y$$

il suffit de démontrer

$$\left|\begin{array}{l}
\vdash x \supset x \\
\quad y \Vdash_2 Nx \supset y \\
\quad Nx \supset y,\ Nx \supset (y \supset z) \Vdash_2 Nx \supset z \\
\quad Nx \supset y \Vdash_2 Nx \supset Ny
\end{array}\right.$$

Les trois premières formules sont analogues aux formules (8), et se démontrent de la même façon: pour la dernière formule on a successivement

$$\left|\begin{array}{ll}
Nx \supset y & \text{par hypothèse} \\
N(Nx \supset y) & \text{par } R_2^2 \\
NNx \supset Ny & \text{par } A_4^2 \text{ et } R_1^2 \\
Nx \supset NNy & \text{qui est } A_5^2 \\
Nx \supset y & \text{par transitivité (9)}
\end{array}\right.$$

(9) La transitivité est la propriété: $a \supset b,\ b \supset c \Vdash_2 a \supset c$; qui se démontre par A_1^2, A_2^2 et R_1^2 comme dans le calcul propositionnel classique.

Remarque 1: Les déductibilités $\Vdash_1$ et $\Vdash_2$ sont différentes; autrement, on tirerait de R_2^2 et du théorème de déduction pour δ_1:

$$\vdash x \supset Nx \qquad \text{(pour toute formule } x\text{)}$$

ce qui est faux.

Remarque 2: On peut axiomatiser S 4 en utilisant comme seule règle de déduction la règle de détachement pour δ_2.

Remarque 3: Tous les résultats obtenus pour S 4 s'étendent à S 5: il suffit de remplacer A_5^1 (respectivement A_5^2) par

$$\vdash N(\neg Nx \supset N \neg Nx)$$

(respectivement: $\vdash \neg Nx \supset N \neg Nx$).

5. — *Application au calcul des predicats.*

Les résultats relatifs à S 5 s'étendent, avec quelques modifications, au calcul des prédicats du premier ordre. Ce calcul est souvent axiomatisé avec deux règles: le règle de détachement (comme R_1^1 ou R_1^2) et la "règle de généralisation" (qui rappelle R_2^2). Mais il existe des applications du calcul des prédicats qui utilisent la règle de détachement seule (voir en particulier Quine 1940 et Quine 1951): dans un tel système on a immédiatement le théorème de déduction pour la fonction δ définie par $\delta(x, y) = x \supset y$.

Dans un système utilisant aussi la règle de généralisation (par exemple le système F^1 de Church 1956, ch III), on a le théorème de déduction pour chacune des fonction δ_γ défines par

$$\delta(x, y) = \gamma(x) \supset y$$

où γ est une fonction de cloture. Une "fonction de cloture" est une fonction telle que, x étant une formule quelconque, $\gamma(x)$ est la formule close (c'est-à-dire sans variable libre) qu'on obtient en préfixant à x des quantificateurs universels. Suivant l'ordre dans lequel ces quantificateurs sont inscrits, on obtient diverses fonctions de cloture, dont les plus connues sont la cloture de Quine (Quine 1940 §14), la cloture de Berry (Berry 1941, voir aussi Quine 1951), et la cloture de Fitch (Fitch 1941).

Paris, mars 1961 — [Le texte qui précède est le développement d'une communication présentée aux *Sesiones Matemáticas* organisées par la *Unión Matemática Argentina,* à Buenos-Aires et La Plata en Septembre 1960].

REFERENCES

BERRY (George D. W.). — On Quine's axioms of quantification. *Journal of Symbolic Logic*, vol 6 (1941), pp. 23-27.

CHURCH (Alonzo). — *Introduction to mathematical Logic*, Vol 1, Princeton (University Press), 1956.

FITCH (Fréderic B). — Closure and Quine's *101 — *Journ. of Symb. Logic*, vol 6 (1941), pp. 18-22.

GÖDEL (Kurt). — Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalkül. *Ergebnisse eines mathematische Kolloquiums*. Heft 4 (1933), pp. 39-40.

ŁUKASIEWICZ (Jan) und TARSKI (Alfred). — Untersuchungen über den Aussagenkalkül. *Comptes-rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, Vol 23 (1930), classe III, pp. 30-50. [Cité d'après la traduction anglaise, qui est la chapitre IV de Tarski 1956].

MCKINSEY (J. C. C.) and TARSKI (Alfred). — Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting. *Journ. of Symb. Logic*, vol 13 (1948), pp. 1-15).

QUINE (Willard van Orman). — *Mathematical Logic* — Cambridge, Mass. (Harvard University Press), 1940.

Id. Revised edition 1941.

TARSKI (Alfred). — Uber einige fundamentale Begriffe der Metamathematik — *C. R. de la Soc. des Sciences et des Lettres de Varsovie*, vol 23 (1930), ch. III, pp. 22-29 [cité d'après la traduction anglaise, qui est le ch. III de Tarski 1956].

TARSKI (Alfred). — Fundamentale Begriffe der Methodologie der deductiven Wissenschaften — *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol 37 (1930), pp. 361-404. [Cité d'après la traduction anglaise, qui est le ch. V de Tarski 1956].

TARSKI (Alfred). — *Logic, Semantics, Metamathematics* (papers from 1923 to 1938). Oxford (Clarendon Press), 1956.