EL AXIOMA DE ELECCIÓN Y LA EXISTENCIA DE SUBGRUPOS CONMUTATIVOS MAXIMALES

por GREGORIO KLIMOVSKY
(Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires)

1. *Introducción.* El objeto de este trabajo es demostrar que el axioma de elección, al que llamaremos "Z", es lógicamente equivalente a la afirmación simultánea de los dos siguientes enunciados E y F:

E: *En todo grupo existe un subgrupo conmutativo maximal* (1).

F: *En todo grupo existe un subconjunto maximal respecto de la propiedad de que, si un elemento g del grupo está en él, y g no es idéntico a su inverso g^{-1}, entonces g^{-1} no está en él.*

En la demostración de esta equivalencia se utiliza, en lugar de F, el siguiente enunciado H:

H: *Para toda familia no vacía* K *de pares no ordenados disyuntos dos a dos, existe un conjunto Y que interseca a cada miembro de* K *exactamente en un elemento.*

El enunciado H constituye un caso particular del axioma de elección en el que, en lugar de permitir que los miembros de la familia K posean números cardinales arbitrarios —no nulos—, se exige que el número cardinal de cada uno de los elementos de K sea constantemente igual a 2. Mostowski ha demostrado (2) que

(1) "Maximal" se entiende aquí, como en los otros enunciados en que se emplea este vocablo, en el sentido de "incapaz de ampliación" dentro del grupo conservando la propiedad indicada —en el enunciado E, esta propiedad es la de ser subgrupo conmutativo—. No se excluye el caso trivial en que el aludido subgrupo coincide con el grupo dado.

(2) En [5], pág. 164, teorema VII. Pues si H implicara Z, como Z implica Z_n —donde Z_n es el axioma de elección restringido al caso en que todos los miembros de la familia K poseen el mismo cardinal natural n— para cualquier número natural n, tendríamos que H implicaría Z_n, lo cual, según dicho teorema, sólo puede suceder si $n = 2$ o $n = 4$. En nuestro trabajo nos mantendremos dentro de una teoría "intuitiva" de conjuntos. Pero no existe dificultad alguna en trasladar nuestros razonamientos dentro de un sistema axiomático para la teoría de conjuntos, del tipo empleado por Mostowski en su memoria.

H es estrictamente más débil que Z. No hay dificultad en mostrar que H es lógicamente equivalente a F(3), de lo cual se desprende que F es también estrictamente más débil que Z. E, como indicamos a continuación, es una consecuencia inmediata de Z; no poseemos datos acerca de si E es o no estrictamente más débil que Z. Es obvio que F no implica a E, pues lo contrario involucraría que F, es decir, H, implica la conjunción lógica de E y F (o sea, Z, de acuerdo con lo que demostraremos en este trabajo), lo cual iría en contra de lo establecido por Mostowski.

En lo que sigue, si A y B son enunciados, designaremos con "$A.B$" a la conjunción lógica de A y B. En particular, nuestro cometido será demostrar que Z es lógicamente equivalente a $E.F$. Para ello será suficiente mostrar que Z implica $E.F$, que $E.H$ implica Z y que F implica H.

Z implica $E.F$. Esta implicación es inmediata, reduciéndose a la aplicación de uno de los enunciados equivalentes al axioma de elección, el "lema" de Zorn (4). Pues la familia de los subgrupos conmutativos de un grupo dado, ordenada mediante la relación de inclusión, es un conjunto parcialmente ordenado inductivo superiormente, de donde, en virtud del lema, debe existir un elemento maximal que es el subgrupo cuya existencia se afirma en E. Lo propio ocurre con los subconjuntos de un grupo dado que poseen la propiedad de que, si un elemento del grupo está en él, el inverso, si es distinto de él, no está. (5) Por consiguiente, Z implica E y Z implica F, de donde se tiene que Z implica $E.F$.

$E.H$ implica Z. El establecimiento de esta implicación requiere el examen previo de ciertas propiedades de las sucesiones finitas de elementos, cosa que se efectúa a continuación.(6)

(3) No emplearemos en este trabajo el hecho de que H implica F. Tal implicación es obvia, pues si consideramos la familia K de todos los pares no ordenados constituídos por un elemento de un grupo dado y su inverso —cuando este inverso es distinto del elemento en cuestión—, entonces la intersección de la unión conjuntística de K con el conjunto Y aludido en H, si se agregan todos los elementos del grupo que coinciden con su inverso, proporciona el subconjunto del grupo cuya existencia se afirma en F.

(4) Ver [7].

(5) El conjunto maximal cuya existencia se afirma en F no puede ser nulo, ya que el subconjunto vacío del grupo dado, si bien satisface vacuamente la propiedad en cuestión, puede ampliarse agregándole la unidad del grupo, con lo que se obtiene otro subconjunto con la propiedad aludida.

(6) El examen de varias de estas propiedades se efectúa detalladamente con el único fin de garantizar que no se emplea forma alguna, débil o fuerte, del axioma de elección en la demostración de las mismas. Varios de los métodos que aquí se emplean pueden abreviarse considerablemente —p. ej., para el establecimiento del lema 4, véase [3], pág. 91 y siguientes—; pero se prestan mejor para su generalización a casos como los estudiados a partir del párrafo 8.

2. *Sucesiones.* Una *sucesión* es una función cuyo dominio está constituído por el conjunto de todos los números naturales positivos menores o iguales que algún número natural n eventualmente nulo; n es la *longitud* de la sucesión.(7) Si n es cero, la sucesión se dice *nula* y la designaremos con "e". Los valores de la función son los *componentes* de la sucesión; en particular, el valor de la función para un número i será el "i-ésimo componente" de la sucesión (como es obvio, el i-ésimo componente puede ser idéntico al j-ésimo componente, aún si i no es igual a j). Si todos los componentes están en un conjunto A, diremos que la función es una "sucesión de elementos de A" o, brevemente, una "sucesión en A". Si la longitud es 1, diremos que la sucesión es "*unitaria*"; mediante un abuso de lenguaje, identificaremos con frecuencia a una tal sucesión con su único componente. En lo que sigue utilizaremos las letras minúsculas "r", "s",..., etc., para designar sucesiones cualesquiera.

Sean t y u dos sucesiones de longitud m y n respectivamente. Con "tu" designamos la sucesión de longitud $m + n$, cuyo valor para i es $t(i)$, si $1 \leqq i \leqq m$, y es $u(i - m)$ si $m + 1 \leqq i \leqq m + n$; si t es e, tu es u, y si u es e, tu es t. tu se dirá el "producto" o "concatenado" de t y u (obviamente, si t es una sucesión en A y u es una sucesión en B, tu es una sucesión en $A \cup B$). Se ve sin dificultad que la operación que acabamos de definir, la operación de *concatenación,* es asociativa; el conjunto de todas las sucesiones de elementos de un conjunto A resulta ser un semigrupo respecto de esa operación, en el que e es la unidad (es el semigrupo libre con unidad engendrado por A como conjunto de generadores libres).

Diremos que la sucesión s es parte de la sucesión t si existen sucesiones u y v, eventualmente nulas, tales que t es usv; su v es nula diremos que s es un *resto* de t y, si u es nula, que s es un *inicial* de t. Naturalmente, de estas definiciones resulta que t es parte (resto, inicial) de t; diremos en este caso que t es la parte (resto, inicial) "*impropia*" de t; las demás partes de t se dirán "*propias*". La sucesión nula e también es parte, resto e inicial de t; pero, salvo que indiquemos expresamente lo contrario, supondremos siempre, al hablar de partes, resto o iniciales, que se trata de sucesiones no nulas. Diremos además, si la longitud de t es n y $1 \leqq k < n$, que

(7) Es decir, "sucesión" se entiende en este trabajo únicamente en el sentido de "sucesión finita". Y "finito" se entenderá siempre en el sentido de "tener número cardinal natural", si se aplica a conjuntos.

el k-ésimo componente de t y el $k+1$ — ésimo componente de t son *consecutivos* en t. Si $1 \leqq k < j \leqq n$, el k-ésimo componente se dirá *anterior* (en la sucesión) al j-ésimo componente, y éste *posterior* a aquel.

3. *Conversiones*. Sean ahora A y B dos determinados conjuntos disyuntos, y sea φ una función biunívoca con dominio de valores igual a B y con dominio igual a A. Si "a" designa un elemento de A, entonces "a^*" designa a $\varphi(a)$; pero si "a" designa un elemento de B, entonces "a^*" designa a $\varphi^{-1}(a)$. En lo que sigue, y mientras no digamos nada en contra, nos ocuparemos únicamente de sucesiones de elementos de $A \cup B$, y llamaremos S al semigrupo con unidad que estas constituyen respecto de la operación de concatenación.

Sean entonces dos sucesiones t y u de S. Diremos que "t es *reductible* a u" si existen dos sucesiones r y s, eventualmente nulas, y un elemento $a \varepsilon A \cup B$ tal que $t = raa^*s$ y $u = rs$; en tal caso diremos también que "u es *expandible* en t". Las operaciones que transforman t en u y u en t (cualesquiera sean t y u, siempre que satisfagan la condición que acabamos de exponer) se denominan "*reducción*" y "*expansión*" respectivamente. Si, dados r y s, existe una expansión o una reducción de r en s, entonces diremos que "r es *inmediatamente convertible* en s" y escribiremos "$r \sim s$"; diremos tamnién que estamos ante una "conversión inmediata" de r en s. Sea ahora una sucesión $t_1, t_2, \ldots, t_n$ de elementos de S, $n \geqq 1$; diremos que es una "*conversión*" —en particular, una "conversión de t_1 en t_n"— si, para cada i tal que $1 \leqq i < n$, se cumple $t_1 \sim t_{i+1}$; escribiremos "$t_1 \approx t_n$" para indicar que existe una conversión de t_1 en t_n (en particular, cualquiera sea $t \varepsilon S$, $t \approx t$).

Puede verse sin dificultad, sobre la base de las definiciones dadas, que si $t, u, v \varepsilon S$ y $t \sim u$ entonces $tv \sim uv$ y $vt \sim vu$. De aquí se tiene que si $t \approx u$ entonces $tv \approx uv$ y $vt \approx vu$; pues existirá una sucesión de elementos de S, $t_1, t_2, \ldots, t_n$, $1 \leqq n$, tal que $t_i \sim t_{i+1}$ para todo i tal que $1 \leqq i < n$, donde $t_1 = t$ y $t_n = u$, por lo que, visto lo dicho más arriba, será $t_1v \sim t_2v \sim \ldots \sim t_nv$, o sea $t_1v \approx t_nv$, y $vt_1 \sim vt_2 \sim \ldots \sim vt_n$, de donde $vt \approx vt$. Además, si $t \approx u$ y $v \approx w$, será $tv \approx uw$, pues $tv \approx uv \approx uw$. La relación $\approx$ es, pues, pues, una relación de equivalencia sobre el semigrupo S, compatible respecto de la operación de concatenación; ello permite definir el semigrupo cociente $S/\approx$, cuyos elementos son las clases de equivalencia de S respecto de $\approx$, donde —si denotamos con "$[t]$" la clase de equivalencia que contiene a un $t \in S$— el producto de dos clases $[t]$ y $[u]$ es $[tu]$ y $[e]$ es la unidad. Por otra parte, si para todo $t \in S$ hacemos $t^* = a_n{}^* a_{n-1}{}^* \ldots a_2{}^* a_1{}^*$, siempre que $t = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$ $(1 \leqq n)$ y los $a_i \in A \cup B$, es fácil ver que $tt^* \approx e \approx t^*t$; es decir, $S/\approx$ resulta ser un grupo en el que $[e]$ es la unidad y cada elemento $[t]$, $t \in S$, posee un inverso $[t]^* = [t^*]$; es el grupo libre engendrado por A como conjunto de generadores libres.

4. *Indices.* Sea $t_1, t_2, \ldots, t_n$ una conversión de t_1 en t_n $(1 < n)$. A cada una de las conversiones inmediatas de algún t_i en t_{i+1} (para cualquier i tal que $1 \leqq i < n$) que constituyen la conversión dada la llamaremos "una conversión inmediata de la conversión" y, si se trata de una reducción (expansión), "una reducción (expansión) de la conversión". Una conversión inmediata de la conversión dada —*v.g.*, la que va de t_j a t_{j+1} $(1 \leqq j < n)$— se dirá "posterior" a otra —p. ej., la que va de t_i a t_{i+1} $(1 \leqq i < n)$— si $j < i$.

El *índice* de una conversión es, por definición, el número de sus expansiones para las que existen reducciones posteriores. Vamos a demostrar la siguiente proposición:

LEMA 1: *Dada una conversión de t en w cuyo índice es m, $m > 0$, existe otra cuyo índice es m—1.*

Sea $t_1, t_2, \ldots, t_n$ una conversión de t en w cuyo índice m es mayor que cero. Existirán entonces números i para los que $1 \leqq i < n$, la conversión inmediata de t_i en t_{i+1} es una expansión, y existe un j, $i < j < n$ (esto último muestra que n debe ser $\geqq 2$) tal que la conversión inmediata de t_j en t_{j+1} es una reducción. Consideremos el mayor de tales i; llamémoslo k. Entonces la conversión inmediata de t_k en t_{k+1} es una expansión, y la de t_{k+1} en t_{k+2} es una reducción. Pero ello quiere decir que existen dos sucesiones u, v (eventualmente nulas) y un elemento x de $A \cup B$ tales que $t_k = uv$ y $t_{k+1} = uxx^*v$, y que existen dos sucesiones r, s (eventualmente nulas) y un elemento y de $A \cup B$ tales que $t_{k+1} = ryy^*s$ y $t_{k+2} = rs$. Si $u = r$, ello quiere decir que $x = y$ y $v = s$; luego $t_k = t_{k+2}$ y la conversión dada puede transformarse en otra suprimiéndose los términos t_{k+1} y t_{k+2}, ya que, si la conversión dada finalizaba en t_{k+2}, deberá ser $t_{k+2} = w$ y la nueva conversión finalizará en $t_k = w$, a menos que exista en la conversión dada el componente t_{k+3}, de donde el paso que va en la nueva conversión desde t_k a t_{k+3} es idéntico al que iba en la primitiva conversión desde t_{k+2} a t_{k+3}; de cualquier modo, la conversión así obtenida es también una conversión de t a w donde el número de expansiones seguidas de reducciones ha disminuído en una unidad. O sea que, en este caso, el lema es cierto.

Si la longitud de r es menor que la longitud de u disminuída en una unidad, entonces existirá z, eventualmente nula, tal que $u = ryy^*z$; será entonces $t_k = ryy^*zv$, $t_{k+1} = ryy^*zxx^*v$ y $t_{k+2} = rzxx^*v$. Si definimos $t'_{k+1} = rzv$, se ve que t_k es reductible a t'_{k+1} y que t'_{k+1} es expandible en t_{k+2}. Por consiguiente, si en la conversión dada reemplazamos t_{k+1} por t'_{k+1}, obtenemos otra conversión de t en w. Si t_{k+2} es el último término de la conversión dada, o si para todo l tal que $k + 2 \leqq l < n$ la conversión inmediata de t_l en t_{l+1} es una expansión, entonces en la nueva conversión el número de expansiones que admiten reducciones posteriores ha disminuído en una unidad respecto de la conversión original; es decir, el lema es cierto también en este caso. Pero puede suceder que, para todo l tal que $k + 2 \leqq l < n' \leqq n$, la conversión inmediata de t_l en t_{l+1} en la dada conversión sea una reducción, en cuyo caso, en la nueva conversión, la expansión de t'_{k+1} en t_{k+2} continúa precediendo reducciones y el índice es ahora el mismo que antes. Pero, en la nueva conversión, el mayor número h tal que $1 \leqq h < n - 1$, para el que la conversión de t_h en t_{h+1} es una expansión que admite reducciones posteriores, es mayor en una unidad respecto del número correspondiente de la conversión dada. Observemos también que en este caso la longitud de la nueva conversión es la misma que la dada, es decir, n. A idénticas consideraciones nos veríamos llevados, razonando "simétricamente", si la longitud de s fuera menor que la de v disminuída en una unidad.

Si la longitud de r es exactamente la de u disminuída en una unidad, entonces existirá un elemento o de $A \cup B$ tal que $u = ro$. Pero entonces $t_{k+1} = roxx^*v$; como además $t_{k+1} = ryy^*s$ resulta ser $o = y$, $x = y^*$ (y $x^*v = s$). Puesto que x^* resulta ser y^{**}, tendremos $x^* = y$, como resulta fácil ver si se tiene en cuenta el carácter involutivo de la operación $*$, de acuerdo con su definición. Luego $t_k = ryv$, $t_{k+1} = ryy^*yv$ y $t_{k+2} = ryv$. O sea, $t_k = t_{k+2}$ y podemos aplicar lo dicho para el caso $u = r$. Lo análogo se aplica al caso en que la longitud de s es exactamente la de v disminuída en una unidad.

Todo lo expuesto muestra que, cualquiera sea el caso, es posible construir de modo inequívoco (sin emplear ninguna forma fuerte o débil del axioma de elección), a partir de la conversión dada, otra en la que el índice es $m-1$ o m; además, si el índice se mantiene igual a m, la longitud deberá mantenerse igual a n, pero el número h arriba aludido habrá aumentado en una unidad respecto del número correspondiente de la sucesión dada. En esta última circinstancia podemos reiterar todo el procedimiento cuantas veces sea necesario. Pero este proceso debe terminar forzosamente en una etapa en la que el índice m disminuye en una unidad, pues de lo contrario tendríamos que la longitud n de las conversiones de t en w que se van obteniendo se mantiene constante, en tanto que h va aumentando estrictamente, lo que es un absurdo si se recuerda que $h < n-1$. Por consiguiente, el lema 1 queda demostrado.(8)

Una consecuencia inmediata del lema 1 es la de que, si reiteramos el procedimiento mediante el cual, dada una determinada conversión de t en w, obtenemos otra cuyo índice es menor en una unidad que el de la conversión primitiva, debemos obtener, al cabo de un número finito de pasos (y de una manera inequívoca que no presupone el empleo de forma alguna —fuerte o débil— del axioma de elección), una conversión de t en w cuyo índice es cero. O sea:

LEMA 2. *Si t es convertible en w, debe existir una conversión de t en w en la que ninguna reducción es posterior a alguna expansión.*

5. *Formas normales.* Diremos ahora que una sucesión (cuyos componentes son, como antes, miembros de $A \cup B$) está en *forma normal* si no puede reducirse a ninguna otra sucesión —es decir, si no posee dos componentes consecutivos, uno de ellos igual a un cierto x y el otro igual a x^*. Dada una sucesión s, diremos que "*t es una forma normal de s*" si $s \approx t$ y t está en forma normal Naturalmente, dada s, siempre existen formas normales de s, las que se obtienen suprimiendo pares consecutivos de componentes x y x^*, proceso que debe acabar en un número finito de pasos, ya que la longitud va disminuyendo dos unidades en cada paso. Por otra parte, fácil es ver que, si t y t' son formas normales de un mismo s, deberá ser $t \approx t'$. De aquí se tiene:

LEMA 3. *Si t y t' son formas normales de una misma sucesión s, entonces debe existir una conversión de t en t' cuyas conversiones inmediatas sean todas expansiones.*

(8) El procedimiento utilizado en esta demostración es análogo a los empleados en la teoría de la λ-conversión. Véase [1], capítulo II, y [2], capítulos 3 y 4.

Pues será $t \approx t'$, por lo cual, en virtud del lema 2, existirá una conversión $t_1, t_2, \ldots, t_n$ de t en t' en la que ninguna expansión está seguida por alguna reducción. Pero, como $t_1 = t$ está en forma normal, la conversión de t_1 en t_2 debe ser forzosamente una expansión. Por consiguiente, todas las demás conversiones inmediatas deben ser también expansiones, ya que de otro modo tendríamos que la expansión de t_1 en t_2 admitiría reducciones posteriores.

Notemos ahora que si t y t' son formas normales de s, y si consideramos una de las conversiones $t_1, t_2, \ldots, t_n$ cuya existencia se afirma en el lema 3, entonces $t_n, t_{n-1}, \ldots, t_2, t_1$ es una conversión de t' en t cuyas conversiones inmediatas son todas reducciones. Pero, si $n > 1$, la conversión inmediata de t_n en t_{n-1} sería una reducción aplicada a una forma normal $t' = t_n$, lo que no es posible. Luego $n = 1$ y $t = t'$. De aquí se tiene

LEMA 4. *Cada sucesión posee una única forma normal.*

Gracias al lema 4, podemos ahora hablar de *la forma normal* de una sucesión s. Notemos que nada impide que, en ciertos casos, la tal forma normal sea la sucesión vacía e. Además, puesto que la forma normal es única, el proceso de supresión de elementos consecutivos x y x^* en una sucesión s, a partir del primer par de componentes de este tipo comenzando desde la izquierda, y continuando análogamente, garantiza la obtención constructiva de dicha forma normal, sin emplear ninguna forma fuerte o débil del axioma de elección.

6. *Forma normal de un producto de formas normales.* Sean t y u dos sucesiones en $A \cup B$, ambas en forma normal. Sea w la forma normal de tu. Deberá existir una conversión de tu en w; de acuerdo con el lema 2, esta conversión puede tomarse de modo que ninguna reducción sea posterior a alguna expansión. Pero, si la longitud de tal conversión es mayor que uno —lo que debe ocurrir necesariamente si tu no está en forma normal—, todas las conversiones inmediatas deben ser reducciones, ya que de otro modo la última sería una expansión, lo que iría en contra del hecho de que el último término de la conversión, w, está en forma normal. Pero, para poder aplicar una reducción a tu, puesto que t y u están en forma normal, deberá ser $t = t_1 t_2 \ldots t_n$ $(1 \leqq n)$, $u = u_1 u_2 \ldots u_m$ $(1 \leqq m)$, donde los t_i y u_j son elementos de $A \cup B$, y $u_1 = t_n^*$. Luego, si la conversión de tu en w tiene longitud mayor que 1 y si, de acuerdo con lo dicho

más arriba, tiene la forma $k_1, k_2, \ldots, k_l$ $(1 < l)$, donde $k_1 = tu$, $k_l = w$, y la conversión inmediata de k_i en k_{i+1} es una reducción para todo i, $1 < i < l$, entonces, si es cierto para un $i \leqq l-2$ que $t_n = u_1{}^*$, $t_{n-1} = u_2{}^*, \ldots, t_{n-i+1} = u_i{}^*$, será $k_1 = t_1 \ldots t_n u_1 \ldots u_m$, $k_2 = t_1 \ldots t_{n-1} u_2 \ldots u_m \ldots$, $k_i = t_1 \ldots t_{n-i+1} u_i \ldots u_m$, $k_{i+1} = t_1 \ldots t_{n-i}$ $u_{i+1} \ldots u_1$. Como los iniciales y restos de formas normales están también en forma normal, $t_1 \ldots t_{n-i}$ y $u_{i+1} \ldots u_m$ no admiten reducciones; pero, como la conversión inmediata de k_{i+1} en k_{i+2} es una reducción, deberá ser $t_{n-i} = u_{i+1}{}^*$. Por inducción se tiene que debe ser $t_{n-h} = u_{h+1}{}^*$ para todo h tal que $0 \leqq h < l - 1$ (lo que indica que debe ser $n \geqq l - 1$ y $m \geqq l - 1$). O sea:

LEMA 5. *Sean t, u, w tres sucesiones en forma normal tales que $tu \approx w$. Si la longitud de w es la de t más la de u, entonces $w = tu$. En caso contrario, deben existir t', u' y s en forma normal, s no vacía, tales que $t = t' s^*$, $u = su'$ y $w = t' u'$.*

De aquí se tiene que, si la longitud de w no es la de t más la de u, debe ser menor que la suma de tales longitudes; en este último caso t y u deben ambas ser no nulas. Pero w podría tener longitud cero aún cuando ni t ni u fueran nulas; en este caso t' y u' deben ser nulas, de donde se tiene que $t = s^*$ y $u = s$. Por consiguiente:

LEMA 6. *Si t y u son sucesiones en forma normal y $tu \approx e$ entonces $t = u^*$.*

7. *Primeros componentes de sucesiones.* Sean ahora t y u dos sucesiones no vacías cualesquiera, en forma normal, y sea $tu \approx ut$. En general, esto puede suceder siendo el primer componente de t distinto del primero de u. Por ejemplo, si $t = a$ $(a \varepsilon A \cup B)$ y $u = a^*a^*$, entonces $tu \approx a^* \approx ut$; análogamente si $t = a$ y $u = a^*$. Pero consideremos el caso en que t y u tienen igual longitud y la forma normal de tu (que, por definición de forma normal y por el lema 4, debe ser igual a la forma de ut) no es e. Descartemos el caso $t = u$, en que obviamente los primeros componentes antes aludidos son idénticos; ello implica descartar, de acuerdo con el lema 5, el caso en que la longitud de w —la forma normal de tu— es igual a la de tu (pues como w es forma normal de tu y ut, sería $w = tu = ut$; pero, puesto que t posee la misma longitud que u, resultaría $t = u$, en contra del hecho de que no deseamos considerar este ultimo caso). Existirán entonces, siempre de acuerdo con el lema 5, sucesiones t', u' y s, $s \neq e$, tales que $t = t's^*$, $u = su'$ y $w = t'u'$;

además u' no es vacía, pues de lo contrario $u = s$, y como t tiene la misma longitud que u, sería $t = s^*$, o sea $t = u^*$ y $tu \approx e$, en contra de nuestra suposición acerca de la forma normal de tu; por igual razón, tampoco t' es vacía. En forma análoga, y utilizando una vez más el lema 5, se establece la existencia de u'', t'', z, $z \neq e$, tales que $u = u''z^*$, $t = zt''$ y $w = u''t''$ (pues la longitud de ut es la de tu, o sea mayor que la de w); razonando como antes se vería que t'' y u'' no son vacías. Pero de $w = t'u' = u''t''$ sale que el primer componente de t es idéntico al primer componente de u. De igual modo podría mostrarse que el último componente de t es idéntico al último componente de u. Luego:

LEMA 7. *Si t y u son sucesiones no vacías en forma normal, de igual longitud, tales que la forma normal de tu no es e y $tu \approx ut$, entonces el primer (último) componente de t es idéntico al primer (último) componente de u.*

Supongamos que u sea una sucesión en forma normal, cuya longitud es distinta de cero. Se ve fácilmente que no es posible que $uu \approx e$. Pues lo contrario, de acuerdo con el lema 6, indicaría que $u = u^*$. Pero, si $u = u_1u_2 \ldots u_n$, entonces sería $u^* = u_n{}^*u_{n-1}{}^* \ldots u_1{}^*$. Si $n = 2m$, entonces sería, para cada i tal que $1 \leqq i \leqq m$, $u_i = u_{n-i+1}{}^*$ y en particular $u_m{}^* = u_{m+1}$, de donde resultaría que u no está en forma normal, en contra de lo supuesto. Pero si $n = 2m + 1$, entonces sería $u_{m+1} = u_{m+1}{}^*$, lo que no es posible pues A y B son conjuntos disyuntos. Por consiguiente:

Lema 8: *Si* u *es una sucesión no nula en forma normal, entonces* u *no es convertible en* u*.

Consideremos ahora una clase M no vacía de sucesiones en forma normal, todas de igual longitud no nula, y tales que, cualesquiera sean u, $t \in M$, $tu \approx ut$. Pueden presentarse los siguientes casos: a) que el producto de dos elementos cualesquiera de M tenga en todos los casos forma normal distinta de e; entonces, de acuerdo con el lema 7, todos los miembros de M poseen el mismo primer componente y el mismo último componente; b) que existan en M dos sucesiones t y u tales que $tu \approx e$; entonces, por el lema 6, $t = u^*$ y, por el lema 8, t y u deben ser no idénticas y no convertibles la una en la otra. Nótese que, si existe en M algún miembro v distinto de t y de u, deberá ser tv no convertible en e (pues de otro modo sería —por el lema 6— $t = v^*$ y $u = v$)

y uw no convertible en e (pues —también por el lema 6— tendríamos $u = v^*$ y $v = t$); pero entonces, por el lema 7, el primer (último) componente de v debe ser el mismo que el de t y el de u. Pero, si el primer componente de u es a, entonces el último de u^* es a^*. O sea: si existe v distinto de t y de u, entonces el primer componente de t será a y el último será a^*. Resumiendo: si M tiene más de dos elementos y uno de ellos, t, es tal que t^* también está en M, entonces, si t comienza con un primer componente a, su último componente debe ser a^*; luego, lo propio ocurre con t^* y con los demás elementos de M (nada impide en esta circunstancia que, dado $v \in M$, $v \neq t$, $v \neq t^*$, la sucesión v^* también esté en M). Por consiguiente, si existe en M un t tal que $t^* \in M$, y hay en M una sucesión con último componente distinto de a^*, donde a es su primer componente, entonces $M = \{t, t^*\}$. De aquí se tiene:

Lema 9: *Sea* M *un conjunto no vacío de sucesiones en forma normal, todas de igual longitud no nula, tal que si* t, u $\in$ M *entonces* tu $\approx$ ut. *Entonces todos los elementos de* M *tienen el mismo primer (último) componente, salvo cuando hay en* M *un elemento* t *tal que* i) t* $\in$ M, ii) *el primer componente de* t, a, *es distinto de* b*, *donde* b *es el último de* t: *en este último caso* M $= \{$t, t*$\}$.

8. *La familia* K. Estamos ahora en condiciones de ocuparnos de la implicación del enunciado Z a partir de la conjunción lógica $E.H$. Sea entonces una familia cualquiera K, no vacía, de conjuntos no vacíos disyuntos dos a dos; vamos a mostrar que, aceptando E y H, es posible establecer la existencia de un conjunto que interseca a cada miembro de K exactamente en un elemento. Para ello consideremos al conjunto $A = \bigcup$K y una función biunívoca φ cualquiera con dominio igual a A, cuyo dominio de valores sea un conjunto B disyunto con A (9). Como en el párrafo 3, si "a" designa un elemento de A, entonces "a^*" designa a $\varphi(a)$;

(9) En este trabajo los razonamientos se desarrollan dentro de lo que se llama "teoría intuitiva de conjuntos". Si se extrema el rigor debemos reemplazar tal teoría por algún sistema axiomático de la teoría de conjuntos. Como es sabido, existen varias axiomatizaciones no equivalentes entre sí. En algunas de ellas existen conjuntos universales, por lo cual podría suceder que A fuera universal y no existiera B disyunto con A. Pero en tal caso puede reemplazarse A por el producto cartesiano de A por $\{1\}$ —el conjunto unitario del número uno—, lo cual permite tomar como conjunto B al producto cartesiano de A por $\{2\}$ —el conjunto unitario del número dos—; esto equivale a razonar con la familia K' de los productos cartesianos de los X, $X \in$K, por $\{1\}$, en lugar de razonar con K. Pero la existencia de un selector para K' implica obviamente la de un selector de K, por lo cual el reemplazo es indiferente en lo que respecta a nuestro razonamiento.

pero si "a" designa a un elemento de B, entonces "a^*" designa a $\varphi^{-1}(a)$. Con "S" nos referimos al semigrupo de todas las sucesiones (incluso la nula) de elementos de $A \cup B$. Si $s \varepsilon S$, y además $s = a_1 a_2 \ldots a_n$, entonces s^* es la sucesión $a_n^* a_{n-1}^* \ldots a_1^*$. Las nociones de "*reducción*" y "*expansión*" se definen exactamente como en el párrafo aludido. Sean dos sucesiones t y u de S. Diremos que hay una "*conmutación inmediata* de t en u" si existen dos sucesiones r y s, eventualmente nulas, y dos elementos a y b de $A \cup B$ tales que $t = rabs$, $u = rbas$, $a \varepsilon X \cup \varphi(X)$, $b \varepsilon Y \cup \varphi(Y)$, $X \varepsilon \mathrm{K}$, $Y \varepsilon \mathrm{K}$ y $X \neq Y$. La operación que trasforma t en u se denomina "*conmutación inmediata*". Si, dados r y s, existe una expansión, una reducción o una conmutación inmediata de r en s, entonces diremos que "r es *inmediatamente convertible* en s" y escribiremos, como en el párrafo 2, "$r \sim s$"; diremos también que estamos ante una "*conversión inmediata*" de r en s. La noción de "*conversión*" y la notación "$r \approx s$" se introducen como antes, partiendo de la noción de "conversión inmediata".

9. *Partes primas*. Consideremos $s \varepsilon S$. Diremos que la sucesión t es una "*parte pura*" de s si es una parte [10] de s cuyos componentes son todos elementos de $X \cup \varphi(X)$ para algún $X \varepsilon \mathrm{K}$. Una parte pura t de s será una "*parte pura maximal*" de s si no existe una parte pura u de s tal que t sea parte propia de u. Una parte de s será una "*parte prima*" de s si es una parte pura maximal de s cuyos componentes pertenecen todos a $X \cup \varphi(X)$ para algún $X \varepsilon \mathrm{K}$, y hay un inicial v de s, y un resto w de s, tal que $s = vtw$ y ningún componente de v o de w está en $X \cup \varphi(X)$. Diremos que s está en "*forma canónica*" si existen $s_1, s_2, \ldots, s_n$ tales que cada s_i $(1 \leqq i \leqq n)$ es una parte prima de s y además es $s = s_1 s_2 \ldots s_n$. Si s está en forma canónica y la única parte prima de s es la parte impropia, entonces diremos que$s$ es una "*forma canónica prima*"; si los componentes de s son elementos de $X \cup \varphi(X)$, $X \varepsilon \mathrm{K}$, entonces s es "una forma canónica prima correspondiente a X". Si s es una forma canónica prima correspondiente a un $X \varepsilon \mathrm{K}$, y $a \varepsilon A \cup B$, a no $\varepsilon X \cup \varphi(X)$, entonces $sa \approx as$; la demostración es por inducción en la longitud de s. Si la longitud de s es 1, es decir, si $s = b$, $b \varepsilon X \cup \varphi(X)$, enton-

[10] Es esencial en lo que sigue tener en cuenta que, salvo indicación expresa en contra, las "partes" a que se hace referencia en las definiciones y lemas que se exponen a continuación *no son nulas*.

ces $sa = ba$ y $as = ab$; pero $ab \approx ba$, pues $ab \sim ba$ por definición de "conversión inmediata". Si la afirmación es cierta para las sucesiones de longitud k, entonces, si s posee longitud $k + 1$, será $s = b_1 b_2 \ldots b_{k+1}$, donde $b_i \varepsilon X \cup \varphi(X)$ para todo i tal que $1 \leqq i \leqq k + 1$; de aquí se tiene que $sa = b_1 b_2 \ldots b_{k+1} a \approx b_1 b_2 \ldots b_k a b_{k+1}$ (por tratarse de una conmutación inmediata). Pero, por la hipótesis industiva, $b_1 b_2 \ldots b_k a b_{k+1} \approx a b_1 b_2 \ldots b_k b_{k+1}$. O sea, $sa \approx as$. Supongamos ahora tener s, forma canónica prima en $X \varepsilon$ K, t forma canónica prima en $Y \varepsilon$ K, $X \neq Y$. Si la longitud de t es uno, acabamos de ver que es $st \approx ts$. Si para todo par s, t de sucesiones que estén en las condiciones descritas y en donde t tenga longitud k se cumple que $st \approx ts$, entonces esto último deberá ser cierto para los pares en que t posea longitud $k + 1$. Pues será $t = t_1 t_2 \ldots t_k t_{k+1}$; entonces, por hipótesis inductiva y por el caso antes considerado, será $st = st_1 t_2 \ldots t_k t_{k+1} \approx t_1 t_2 \ldots t_k s t_{k+1} \approx t_1 t_2 \ldots t_k t_{k+1} s \approx ts$. De aquí se tiene, por inducción:

Lema 10: *Dadas dos sucesiones s y t en* A $\cup$ B, *tales que s es una forma canónica pura en* X ε *K, t una forma canónica pura en* Y ε *K y* X $\neq$ Y, *debe cumplirse* $st \approx ts$.

Queremos ahora saber si, dada una sucesión $s \varepsilon S$, existe otra t en forma canónica tal que $s \approx t$. Si la longitud de s es 1, esto es obvio bastando tomar $t = s$, pues s está en forma canónica. Supongamos que la conversión a una forma canónica sea cierta para todas las sucesiones de S cuya longitud sea k, y consideremos el caso en que s tenga longitud $k + 1$. Ello quiere decir que $s = s'a$ ($a \varepsilon A \cup B$), donde s' es una sucesión cuya longitud es k. Pero entonces existirá t' en forma canónica, $t' \approx s'$, tal que $t' = s_1 s_2 \ldots s_n$, donde los s_i ($1 \leqq i \leq n$) son partes primas de t'. Pero entonces será $s \approx s_1 s_2 \ldots s_n a$. Si s_n es una forma canónica prima correspondiente a $X \varepsilon$ K y $a \varepsilon X \cup \varphi(X)$, entonces $s_n a$ es una forma canónica prima en X y $s_1 s_2 \ldots s_n a$ es una forma canónica prima convertible en s. Puede suceder que $a \varepsilon X \cup \varphi(X)$ y ningún s_i sea una forma canónica prima correspondiente a X; también en este caso $s_1 s_2 \ldots s_n a$ es una forma canónica convertible en s. Resta considerar el caso en que $a \varepsilon X \cup \varphi(X)$ y hay un $i \neq n$ ($1 \leq i < n$) tal que s_i sea una forma canónica prima en X. Eontnces, aplicando reiteradamente el lema 10, se tiene $s_1 s_2 \ldots s_n a \approx s_1 s_2 \ldots s_{n-1} a s_n \approx \ldots s_1 s_2 \ldots s_i a s_{i+1} \ldots s_n$; pero esta última sucesión está en forma canónica. Luego, por inducción, se tiene:

Lema 11: *Dada una sucesión s, existe otra t en forma canónica tal que* $s \approx t$.

En general, existen varias sucesiones convertibles en s y que están en forma canónica —p. ej., si tomamos una de ellas, t, y alteramos el orden mutuo de sus partes primas, utilizando el lema 10 (cosa posible si t no es una forma canónica prima), obtendremos otras formas canónicas de s—. Puede observarse que la demostración del lema 11 proporciona un método para obtener la forma canónica t utilizando solamente conmutaciones inmediatas. Recordando que s es una función con dominio en un conjunto de números naturales, es posible definir, para cada $X \in \mathrm{K}$ tal que existen componentes de s pertenecientes a $X \cup \varphi(X)$, la sucesión $b_1, b_2, \ldots, b_m$ de todos los componentes de s pertenecientes a $X \cup \varphi(X)$ tomados en el orden creciente de los argumentos de quienes son valores (y tomándose un b_i, $1 \leq i \leq m$, aunque ya haya sido obtenido antes). En tal caso, la demostración del lema 11 muestra que $b_1 b_2 \ldots b_m$ es una parte prima de t, pues las conmutaciones inmediatas sólo permiten alterar el orden mutuo de elementos que no están en un mismo $Y \cup \varphi(Y)$ para un $Y \in \mathrm{K}$. Por consiguiente:

Lema 12: *La sucesión t aludida en el lema* 11 *puede obtenerse de manera que, si* $b_1, b_2, \ldots b_m$ *es la sucesión de todos los componentes de* s *pertenecientes a un* $X \cup \varphi(X)$, $X \in K$, *tomados en el orden de magnitud de los argumentos de quienes son valores, entonces* $b_1 b_2 \ldots b_m$ *es una parte prima de t.*

Puede observarse que si se toma un $X \in \mathrm{K}$, y se considera el conjunto S_X de todas las formas canónicas primas correspondientes a X, se obtiene un semigrupo respecto de la operación de concatenación, semigrupo al que llamaremos también S_X, que constituye un subsemigrupo de S, y que posee todas las propiedades del semigrupo que en el párrafo 3 habíamos designado con "S"; bastará identificar al conjunto que en el párrafo 3 habíamos llamado "A" con el X ahora considerado, así como el entonces llamado "B" con el $\varphi(X)$. Pues las reducciones y expansiones de antes lo son también ahora; pero como no hay conmutaciones inmediatas para elementos de $X \cup \varphi(X)$, el significado de "conversión inmediata" y de "conversión" empleados en el párrafo 8 coincide para S_X con el utilizado en el párrafo 3. Podremos emplear entonces todos los resultados establecidos antes del párrafo 8, entre ellas la existencia y unicidad de formas normales. Ello será utilizado ahora del siguiente modo: diremos que una sucesión $u \varepsilon S$ está en *"forma normal"* si no admite reducciones. Puede suceder que $s \varepsilon S$ esté en forma normal, sin que lo esté una de sus formas canónicas t. Si t esté en forma normal y en forma canónica, diremos que está en *"forma canónica normal"*. Se ve sin dificultad que si t está en forma canónica normal, entonces, si v es una parte prima de t que pertenece al subsemigrupo S_X para un $X \varepsilon$ K, v tiene forma normal en S_X. Si t es una sucesión en forma canónica normal y $s \approx t$, diremos que *"t es una forma canónica normal* de *s"*. Dada $s \varepsilon S$, existe por lo menos una forma canónica normal de s, la que se obtiene considerando la sucesión t proporcionada por el lema 12, y procediendo luego a reemplazar cada parte prima de t por su forma normal en S_X, en el sentido del párrafo 5, donde $X \varepsilon$ K es el conjunto de quien la parte prima es una forma canónica correspondiente. Pero, en general, existen varias formas canónicas normales de un $s \varepsilon S$; dada una de ellas, puede obtenerse otra alterando el orden mutuo de las partes primas de la dada (en caso de existir varias), por el lema 10. Puede verse que todas las formas canónicas normales de s se obtienen así. Es decir:

Lema 13: *Si t y t' son formas canónicas normales de s, entonces tienen las mismas partes primas y sólo difieren en el orden mutuo de las mismas.*

Pues, por ser $t \approx s$ y $t' \approx s$, será $t \approx t'$. Luego existirá una conversión $t_1, t_2, \ldots, t_n$ de t en t' ($t_1 = t$ y $t_n = t'$). Examinemos la conversión inmediata de t_i en t_{i+1} ($1 \leq i < n$). Definamos, para un dado $X \varepsilon$ K, el *"X-remanente"* de una sucesión v de S como el producto $b_1 b_2 \ldots b_m$ de la sucesión $b_1, b_2, \ldots, b_m$ de todos los componentes de v, tomados en el orden de magnitud de los argumentos de quienes son valores (según la función v), que sean miembros de $X \leq \varphi(X)$; denotaremos con "v_X" al X-remanente de v. Consideremos t_{iX} y t_{i+1X}; se ve sin dificultad que son idénticos o bien $t_{iX} \sim t_{i+1X}$; pues la conversión inmediata de t_i en t_{i+1} puede no afectar a t_{iX}, o, si la afecta, será por tratarse de una reducción o una expansión —ya que las conmutaciones inmediatas, como es evidente, no cambian los X-remanentes; pero entonces esa reducción o expansión debe ser una reducción o expansión de

t_{iX} en t_{i+1X}. Ello muestra que $t_{1X}, t_{2X}, \ldots, t_{nX}$ es una sucesión que, reemplazados los componentes consecutivos idénticos por uno solo de ellos, se convierte en una conversión de t_{1X} en t_{nX}. Pero como los X-remanentes de sucesiones en forma canónica normal son sucesiones en forma normal de S_X, se tiene, por el lema 4, que t_{1X} y t_{nX} coinciden. Luego t y t' tienen las mismas partes primas y sólo difieren en el orden.

10. *Construcción del selector de la familia* K. Siendo $\approx$ una relación de equivalencia en S compatible con la operación de concatenación, se ve que es posible pasar al cociente $S/\approx$, constituido por las clases de equivalencia Qs correspondientes a los elementos $s \varepsilon S$, donde $Qs.Qt$ se define como siendo igual a $Q(st)$. $S/\approx$ es un grupo cuya unidad es Qe, donde para cada elemento Qs existe un inverso $(Qs)^* = Q(s^*)$. Por el enunciado E, que estamos tomando como hipótesis, deberá existir un subgrupo conmutativo maximal V de $S/\approx$. Se ve fácilmente que si Qr, $Qs \varepsilon V$, entonces $rs \approx sr$; pues será $Qr.Qs = Qs.Qr$, es decir, $Q(rs) = Q(sr)$, que equivale a firmar $rs \approx sr$. Más aún, supongamos que r y s estuvieran en forma canónica, y que Qr y Qs estuvieran en V. Será $r = r_1 r_2 \ldots r_n$ y $s = s_1 s_2 \ldots s_m$, donde las r_i $(1 \leq i \leq n)$ son las partes primas de r y las s_i son las partes primas de s $(1 \leq i \leq m)$. Es fácil ver que $r_i s_j \approx s_j r_i$ para todo i tal que $1 \leq i \leq n$ y todo j tal que $1 \leq j \leq m$. Si r_i es la parte canónica prima correspondiente a $X \varepsilon$ K, s_j la parte canónica prima correspondiente a $Y \varepsilon$ K, y $X \neq Y$, entonces la afirmación es cierta por el lema 10. Supongamos que $X = Y$. Entonces $r_i s_j$ es el X-remanente de rs, y $r_j s_i$ el X-remanente de sr. Pero, como $rs \approx sr$, el X-remanente de rs debe ser convertible en el X-remanente de sr, según se ve mediante un razonamiento análogo al empleado en la demostración del lema 13. Por consiguiente:

Lema 14: *Si* r *y* s *están en forma canónica y* Qr ε V, Qs ε V, *entonces, si* r' *es una parte prima de* r *y* s' *es una parte prima de* s, r's' $\approx$ s'r'.

Supongamos que X ε K y que no exista s en forma canónina normal, $s \varepsilon S$, tal que $Qs \varepsilon V$ y haya una parte [10] prima s' de s que sea una forma canónica prima (normal) en X. Como X no es vacío, consideremos un elemento a cualquiera de X, y los elementos Qa y $Q(a^*)$ de $S/\approx$. Ni Qa ni $Q(a^*)$ pertenecen a V, pues lo contrario significaría la falsedad de nuestra suposición sobre X, ya que a y a^* son sucesiones en forma canónica normal que poseen partes primas (impropias) correspondientes a X. Sea $Qt \varepsilon V$, t en forma canónica normal; todas las partes primas de t no serán partes primas correspondientes a X. Supongamos que sea $t = t_1 t_2 \ldots t_n$ $(1 \leq i \leq n)$, donde las t son las partes primas de t. Entonces, por aplicaciones reiteradas del lema 10, se tiene $ta = t_1 t_2 \ldots t_n a \approx t_1 t_2 \ldots t_{n-1} a t_n \approx \ldots \approx a t_1 t_2 \ldots t_n = at$, y análogamente $ta^* \approx \approx a^*t$. Luego será $Qt \,.\, Qa = Qa \,.\, Qt$ y $Qt \,.\, Q(a^*) = Q(a^*) \,.\, Qt$. Como $Qa \,.\, Q(a^*) = Q(a^*) \,.\, Qa$, pues $Qa \,.\, Q(a^*) = Q(aa^*) = Qe$ y análogamente $Q(a^*) \,.\, Qa = Qe$, entonces, si llamamos T al conjunto de todas las sucesiones en forma canónica normal expresables como $u_1 u_2 \ldots u_m$ $(1 \leq i \leq m)$, donde cada u_i es a, a^* o es tal que $Qu_i \varepsilon V$, entonces la familia W de todos los Qu donde $u \varepsilon T$ constituye un subgrupo conmutativo de $S/\approx$ que contiene a V (pues para cada Qt de V existe $t' \varepsilon T$ tal que $Qt = Qt'$, por definición de forma canónica normal y el lema 13; pero W contiene propiamente a V, pues también contiene a Qa y $Q(a^*)$. Esto último contradice la maximalidad de V, de modo que muestra suposición inicial sobre X es falsa. De aquí se tiene:

Lema 15: *Para cada* X ε *K, existe al menos una sucesión en forma canónica normal s* ε S, *tal que* Q*s* ε V *y existe una forma canónica prima* s′ *correspondiente a* X *que es una parte prima de s.*

Sea ahora $X \varepsilon$ K. Consideremos al conjunto J de todas las formas canónicas primas normales t correspondientes a X para las que existe una sucesión s (dependiente de t) en forma canónica normal tal que $Qs \varepsilon V$ y t es una parte (10) prima de s. Por el lema 15, J no es vacío. Existirá entonces un número natural k tal que existen en J sucesiones de longitud k (11), pero no sucesiones de longitud menor que k. Sea M_x el conjunto de tales sucesiones de J de longitud k. Sea t y n dos elementos de M_x; existirán entonces sucesiones v y w en forma canónica normal tales que t es parte prima de v, u es parte prima de w, $Qv \varepsilon V$ y $Qw \varepsilon V$. Por el lema 14, será $tu \approx ut$. Consideremos el semigrupo S_x de todas las sucesiones cuyos componentes están en $X \cup \varphi(X)$. M_x resulta ser un conjunto no vacío de sucesiones de S_x en forma normal, de igual longitud no nula, tal que si t, $n \varepsilon M_x$ entonces

(11) De acuerdo con lo observado en la nota (10), k debe ser un número natural positivo.

$tu \approx ut$. Por el lema 9, todos los miembros de M_x poseen igual primer componente, salvo el caso en el que $M = \{v, v^*\}$ y el primer componente a de v no es igual a b, donde b^* es el último componente de v. Podemos entonces definir un conjunto U_x del siguiente modo: se toman todos los primeros componentes de miembros de M_x, distinguiéndose los siguientes casos: 1) hay un único primer componente a común a todos los miembros de M_x; entonces $U_x = \{a\}$ si $a \varepsilon X$ y $U_x = \{a^*\}$ si $a \varepsilon \varphi(X)$; 2) hay dos elementos a y b que son primeros componentes de miembros de M_x (serán respectivamente los primeros componentes de v y v^*, de acuerdo con lo dicho más arriba); entonces $U_x = \{a, b\}$ si $a, b \varepsilon X$, $U_x = \{a^*, b^*\}$ si $a, b \varepsilon \varphi(X)$, $U = \{a^*, b\}$ si $a \varepsilon \varphi(X)$ y $b \varepsilon X$, $U = \{a, b^*\}$ si $a \varepsilon X$ y $b \varepsilon \varphi(X)$. Se ve que $U_x \subset X$ y es un conjunto unitario o un par no ordenado según el caso. Sea U la familia de todos los U_x, $X \varepsilon \mathrm{K}$, que son pares no ordenados. Como estamos utilizando el enunciado H como hipótesis, existirá un conjunto Y que interseca a cada miembro de U exactamente en un elemento. Podemos ahora construir un conjunto "selector" de K, es decir, un conjunto que interseca a cada miembro de K exactamente en un elemento, del siguiente modo: para $X \varepsilon \mathrm{K}$ hagamos $P_x = U_x$ si U_u posee un único elemento, y $P_x = U_x \cap Y$ si U_x posee dos elementos. El conjunto $P = \bigcup_{x \varepsilon \mathrm{K}} P_x$ es el selector de la familia K cuya existencia se deseaba establecer. Puesto que la familia K es cualquiera, queda demostrado el enunciado Z a partir de los enunciados E y H.

11. *Demostración de que el enunciado* F *implica al* H. Para establecer esta implicación, consideremos ahora una familia K cualquiera no vacía de pares no ordenados disyuntos dos a dos. Sea $A = \bigcup \mathrm{K}$, y consideremos el conjunto de todas las sucesiones (eventualmente nulas) en A. Diremos que "s es *reductible* a t", $s, t \varepsilon S$ —donde S es el aludido conjunto de sucesiones en A—, si existen sucesiones r y u (eventualmente nulas), y elementos a y b de un mismo $X \varepsilon \mathrm{K}$, $a \neq b$, tales que $s = rabu$ y $t = ru$; en tal caso diremos que "t es *expansible* en s". "*Conversión inmediata*", "$\sim$", "*conversión*" y "$\approx$" se definen como en el párrafo 3. Si $a \varepsilon X \varepsilon \mathrm{K}$, entonces a^* es b, donde $b \varepsilon X$ y $a \neq b$. Si $s \varepsilon S$, s^* se define como en el párrafo 3. Como antes, se ve que la relación $\approx$ es una relación de equivalencia compatible con la ope-

ración de concatenación, de modo que si consideramos a S como semigrupo respecto a dicha operación, $S/\approx$ resulta ser un grupo en el que $[e]$, la clase de equivalencia que contiene a e, es la unidad, y para cada clase de equivalencia $[s]$, donde $s \in S$, existe un inverso $[s]^* = [s^*]$ (el producto de $[s]$ y $[t]$ se define, como siempre, haciéndolo igual a $[st]$). Por otra parte, puede verse sin dificultad que las demostraciones de los lemas 1 a 4 pueden repetirse sin mayor modificación, utilizando las sucesiones del actual semigrupo S. Esto permite introducir aquí, en forma anóloga a la efectuada en el párrafo 5, la noción de *"sucesión en forma normal"*; en particular, resultará, para toda sucesión s de S, existir una y sólo una sucesión en forma normal, t, tal que $s \approx t$: será *"la forma normal* de s". Consideremos un X de K, y sean a y b los dos elementos de X. Como a y b están en forma normal y son distintos, resultará ser $[a] \neq [b]$, pues lo contrario significaría que $a \approx b$, lo cual va en contra de la unicidad de la forma normal. Pero $b = a^*$, o sea que $[a]^* = [b]$; luego $[a]^* \neq [a]$. Pero, si aceptamos el enunciado F como hipótesis, existirá un conjunto V, subconjunto de $S/\approx$, tal que un elemento de $S/\approx$, distinto de su inverso, está en V si y sólo si su inverso no lo está; de aquí resulta en especial que, para el conjunto X antes mencionado, $[a]$ está en V si y sólo si $[b]$ no está en V. Definiendo $P_x = \{a\}$ si $[a] \in V$, o $P_x = [b]$ si $b \in V$, y definiendo $Y = \cup P_x$, se tiene que v es un conjunto que interseca a cada $X \in$ K exactamente en un elemento; o sea, hemos demostrado la existencia del conjunto Y mencionado en el enunciado H. Es decir, F implica H. Y con ello se cierra la cadena de implicaciones necesarias para establecer la equivalencia de Z con $E.F.$

12. *Equivalencias con axiomas "débiles" de elección.* Si se examinan las demostraciones anteriores, puede verse sin dificultad que el grupo $S/\approx$ mencionado en el párrafo 10 es isomorfo al producto directo débil (12) de los grupos $S_x/\approx$ (donde S_x es el sub-

(12) *Ver* [6], pág. 173, o [4], pág. 160. En este trabajo tomamos como definición de "producto directo débil" de una familia $\{G_i\}_{i \in I}$ de grupos, indicada por I, al conjunto de todas las funciones de I en la unión de los G_i, sujetas a la condición de que para cada una de tales funciones debe cumplirse que $f(i) \in G_i$, si f es la función; la operación del grupo se define estipulando que el producto $f \, . \, g$ de dos tales funciones es la función h definida así: $h(i) = f(^0) \, . \, g(i)$ para cada $i \in I$. La unidad es la función que a cada i de I hace corresponder la unidad del correspondiente grupo G_i; las funciones deben además satisfacer el requerimiento adicional de valer la unidad de G_i para todo i de I salvo a lo más un número finito.

semigrupo de S constituido por todas las sucesiones cuyos componentes están en $X \cup \varphi(X)$), $X \varepsilon$ K. Pues, dado $Qs \varepsilon S/\approx$, s puede expresarse en forma canónica normal $s_1 . s_2 ... s_n$, donde s_i $(1 \leq i \leq n)$ son primas; si tomamos $Qt \varepsilon S/\approx$ tal que $Qs = Qt$ entonces t debe admitir idéntica forma canónica normal, salvo el orden de las partes primas. Ello permite expresar unívocamente (salvo el orden de los factores) a Qs como producto $Qs_1 . Qs_2 ... Qs_n$. Ello permite hacer corresponder a Qs el elemento del producto directo débil de los $S_x/\approx$, $X \varepsilon$ K, caracterizado por ser una función que vale Qe para los X de K tales que no existe i $(1 \leq i \leq n)$ tal que Qs_i es un elemento de $S_x/\approx$, y por valer Qs_i para los $X \varepsilon$ K tales que hay un i $(1 \leq i \leq n)$ tal que $Qs \varepsilon S_n/\approx$ Sin dificultad se ve que si $Qs = Qt . Qu$, donde Qs, Qt, $Qu \varepsilon S/\approx$, entonces el producto de los elementos del producto directo débil que corresponden respectivamente a Qt y a Qu es el elemento que corresponde a Qs. Puede verse, en forma análoga, que igual situación se presenta con el grupo $S/\approx$ y la familia K utilizadas en el párrafo 11, si se altera la definición de "conversión inmediata", permitiendo la conmutación inmediata de elementos distintos cualesquiera pertenecientes a miembros diferentes de la familia K (la demostración de que F implica H no altera sustancialmente con este cambio, como el lector puede fácilmente verificar). De este modo, puede atenuarse la fuerza de los enunciados E y F restringiendo su contenido únicamente a ciertos grupos, los que resultan de ciertos productos directos débiles. El axioma de elección resultaría entonces equivalente a la conjunción lógica de los dos siguientes enunciados E' y F':

E': *En todo grupo que sea producto directo débil de alguna familia* $\{G_i\}_{i \varepsilon I}$ *de grupos de más de un elemento* ([13]), *indicada por un conjunto infinito* I *de índices, existe un subgrupo conmutativo maximal.*

F': *En todo grupo que sea producto directo débil de alguna familia* $\{G_i\}_{i \varepsilon I}$ *de grupos de más de un elemento, indicada por un con-*

([13]) El requerimiento de que los grupos no estén constituídos por un único elemento y de que el conjunto I sea infinito se formula con el único fin de que el enunciado E' no resulte trivialmente equivalente al E. Por otra parte, dado que la existencia de selectores para familias finitas es un teorema de la teoría de conjuntos que no requiere el empleo de ninguna forma fuerte o débil del axioma de elección, el único caso que importa es aquél en que K es infinito, que requiere el uso de productos directos débiles de infinitos factores.

junto infinito I de índices, existe un subconjunto maximal respecto de la propiedad de que, si un elemento g del grupo está en él y g no es idéntico a su inverso g^{-1}, entonces g^{-1} no está en él.

Debe entenderse que no se afirma que E y E' sean mutuamente equivalentes, ni tampoco que lo sean F y F'; sólo se afirma que el axioma de elección es equivalente a las conjunciones lógicas $E.F$, $E'F.'$, $E.F'$, $E'.F'$, $E.H$ y $E'.H$.

Si se desea investigar qué resta de estas equivalencias en el caso de considerar una de las formas "débiles" del axioma de elección, en lugar del axioma mismo, conviene notar que los productos directos débiles que aparecen en las demostraciones antes mencionadas tienen por conjunto de índices un conjunto cuyo cardinal es el mismo que el de la familia K cuyo selector deseamos construir. Por consiguiente, si llamamos Zm al enunciado que afirma la existencia de "selectores" para familias K de cardinal m (donde los miembros de K poseen cardinal cualquiera), $E'm$ y $F'm$ a enunciados análogos a E' y F' donde el conjunto I de índices posee cardinal m, y Hm al enunciado análogo al H donde la familia K posee cardinal m, se ve Zm resulta lógicamente equivalente a las conjunciones lógicas $E'm.F'm$ y $E'm.Hm$.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALONZO CHURCH, *The calculi of Lambda-Conversion*, Princeton Un. Press, 1941

[2] HASKELL B. CURRY-ROBERT FEYS, *Combinatory Logic*, Nort-Holland Publish ing Co., Amsterdam, 1958.

[3] MARSHALL HALL, Jr., *The theory of Groups*, Macmillan Co., New York, 1959.

[4] NATHAN JACOBSON, *Lectures in Abstract Algebra*, Van Nostrand Co., New York, Vol. 1, 1951.

[5] A. MOSTOWSKY, *Axiom of choice for finite sets*, Fundamenta Mathematicae, vol. XXXIII, 1945, págs. 137 a 168.

[6] OSCAR ZARISKI-PIERRE SAMUEL, *Commutative Algebra*, Van Nostrand Co., New York, 1958.

[7] MAX ZORN, *A remark on method in transfinite algebra*, Bull. Amer. Math. Soc. 41 (1935).