GEOMETRIA DEL ESPACIO DE LAS FASES (*)

por FEDERICO GAETA
Instituto de Física, San Carlos de Bariloche, Río Negro (Argentina)

a J. BALSEIRO in memoriam

RESUMEN

El espacio de las fases se puede caracterizar geométricamente como una variedad diferenciable (¹) V_{2n} (que en las aplicaciones físicas es cómodo suponer de clase C^∞ o analítica) con una forma cuadrática diferencial externa (²) ω no degenerada y cerrada (*V.* [4], [8]):

$$d\omega = 0$$

n es el número de grados de libertad —que suponemos finito— y por tanto $2n$ es la dimensión del espacio de las fases.

Brevemente: V_{2n} *es una variedad simpléctica.* (Cfr. *Synge* [14] en relación con el espacio riemanniano de las configuraciones).

El tensor de coeficientes de ω es antisimétrico (³); demostramos que sus componentes $a_{ij}\,(=-a_{ji})$ en cualquier sistema

* Recibido el 25 de mayo de 1961.

(¹) Véase [ ], [ ] ...., en la bibliografía final.

(²) Aplicamos sistemáticamente la técnica del cálculo diferencial externo de Poincaré-Cartan]3[, [8], [13], [5], que es mucho más que una "higher condensed notation" (v. Synge, [15]. Es un instrumento de investigación geométrica de primer orden, intrínseco como el cálculo tensorial, (puede considerarse incluso como un capítulo de este por su vinculación con los tensores antisimétricos) v. [15]. Aunque actualmente los físicos lo usen muy poco todavía — tuvo origen en la Física, después de los trabajos de Poincaré [11] sobre los invariantes integrales de los sistemas dinámicos.

(³) Se han considerado ya teorías físicas en las que se usan tensores g_{ij} no simétricos — incluso g_{ij} sin ninguna simetría (v. [9]. Hay algunas pequeñas diferencias en cuanto al signo — que no detallamos aquí. Ver las fórmulas correctas para "subir y bajar índices" en este caso general en dicho libro [9].

de coordenadas locales de V_{2n} pueden desempeñar un papel análogo al de los g_{ij} simétricos de un espacio de *Riemann.*

La geometría local correcta de la V_{2n} en un punto x de V_{2n} es la *simpléctica* [16] (4) de un modo análogo al caso riemanniano en que la geometría es localmente euclídea.

Muy frecuentemente en la Mecánica estadística se usa indebidamente la geometría enclídea en V_{2n} —tratado como si fuera un espacio euclídeo— y se usan conceptos métricos; distancias, ángulos, gradientes, etc., que no son invariantes por una transformación de contacto que transforman coordenadas canónicas en canónicas. Ver por ejemplo la autorizada obra de *Khinchin* [6]. Este defecto se señala en [1], pero no se corrige. En un curso monográfico del autor en el Instituto de Física de San Carlos de Bariloche, y en algunas sesiones de Seminario se ha expuesto como la geometría de la V_{2n} con la ω invariante permite dar sentido geométrico y físico invariante a todas las deducciones básicas que se precisan en Mecánica estadística, sin ninguna otra hipótesis suplementaria, de suerte que se puede prescindir de los conceptos euclídeos no invariantes señalados precedentemente.

El desarrollo completo será expuesto en una próxima memoria. Aquí, aprovechando esta reunión de la A. F. A. se exponen brevemente los resultados principales, pero con demostraciones completas basadas en el cálculo diferencial externo.

---

(4) H. Weyl explica en su libro [16], como introdujo el término "symplectic" como sucedáneo griego de *complejo* para evitar la confusión con los números complejos. El grupo simpléctico real homogéneo $Sp\ (\mathrm{B}n, R)$ es el subgrupo del $GL\ (n, R)$ que deja invariante una forma $A = \sum\limits_{i<j} a_{ij} \begin{vmatrix} x^i & x^j \\ y^i & y^j \end{vmatrix}$ antisimétrica no degenerada.

El significado geométrico de $A = O$ es que los vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$ son conjugados respecto a un complejo de bivectores. Pasando al P_{2n-1} proyectivo $A = O$ significa que la recta que une los dos puntos de coordenadas homogéneas x^i, y^j pertenece al complejo de rectas invariante de ecuación

$$\sum_{i<j} a_{ij}\, p^{ij} = o$$

donde $p_{ij} = \begin{vmatrix} x^i & x^j \\ y^i & y^j \end{vmatrix}$ son las coordenadas grassmannianas contravariantes de una recta del complejo.

1. SIGNIFICADO FISICO DE ω

En todo entorno de un punto x de V_{2n} puede representarse la ω en la forma canónica

$$(1.1) \qquad \omega = d\,p^1 \wedge d\,q^1 + d\,p^2 \wedge d\,q^2 + \ldots + d\,p^n \wedge d\,q^n$$

en coordenadas canónicas $(p^1, q^1, p^2, q^2, \ldots, p^n, q^n)$; ω es pues el integrando del invariante integral que en la notación antigua «incorrecta» se escribía

$$\iint_S \Sigma\, d\,p^i \wedge d\,q^i$$

extendida a cualquier superficie S del espacio de las fases.

Hay que hacer notar que la geometría de la V_{2n} es independiente de la «solicitación» a que se somete al sistema. Esta se puede caracterizar en el caso de un sistema holónomo conservador con ligaduras independientes del tiempo ([5]) por una función hamiltoniana H. Entonces debe ser un invariante iutegral *relativo*

$$\int_c \Sigma\, p\,d\,q - H\,d\,t$$

(válido sólo para una curva cerrada). La invariancia relativa de $\Sigma\, p\,d\,q - H\,d\,t$ en el caso de una transformación de contacto que no contenga el tiempo ([6]) equivale a la de $\tau = \Sigma\, p\,d\,q$ y se verifica $\omega = d\,\tau$. El teorema de *Stokes* generalizado [8], [12], [13]):

$$\int_{\partial\Gamma_{p+1}} \omega_p = \int_{\Gamma_{p+1}} d\,\omega_p$$

permite relacionar los invariantes integrales relativos con los absolutos.

([5]) Es posible —en principio— extender todo al caso relativista tratando t y H como variables conjugadas.

([6]) La asimetría desaparece en el caso relativista. Ver observación precedente.

2. LOS DEMAS INVARIANTES INTEGRALES Y EL TEOREMA DE LIOUVILLE.

Las potencias externas sucesivas de ω

$$\omega^{(h)} = \omega \wedge \omega \overset{h}{\smile} \ldots \wedge \omega$$

son nulas para $h > n$. Para $h = 1$, $\omega\,(^1) = \omega$, para $h = 1, 2, \ldots n$ se obtienen formas externas invariantes elementales. Si ω tiene la forma canónica (1.1) resulta

$$\omega^{(h)} = h\,! \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < ih} d\,p^{i_1} \wedge d\,q^{i_1} \wedge d\,p^{i_2} \wedge d\,q^{i_2} \wedge \ldots d\,p^{ih} \wedge d\,q^{ih}$$

Para $h = n$, $\dfrac{1}{n\,!}\,\omega^{(n)}$ es el elemento de volumen invariante

del espacio de las fases (teorema de *Liouville*) fundamental en Mecánica estadística.

3. MECANICA ANALITICA EN COORDENADAS NO CANONICAS

La técnica de subir y bajar índices componiendo con el tensor fundamental a_{ij} permite asignar a todo tensor de orden m componentes contravariantes, covariantes o mixtas de modo invariante por cambios de coordenadas locales. Este resultado —cuya interpretación geométrica es una polaridad intrínseca entre el espacio tangente T_x en cada punto x y su dual $T_x{}^*$— permite poder escribir en forma tensorial todas las ecuaciones de la Mecánica estadística. En los n. 4, 5 y 6 indicamos algunos aplicaciones.

4. COMPONENTES CONTRAVARIANTES DE ω Y TENSOR DE JACOBI

La existencia de las a^{ij} es independiente de la condición $d\,\omega = 0$ cuyo papel aún no ha sido esclarecido (7). Los coefi-

(7) Si ω está escrita en la forma canónica (1.1) la $d\omega = o$ se deduce inmediatamente, porque los coeficientes son constantes. Pero, para demostrar que ω puede escribirse en forma canónica (1.1) hay que usar la condición $d\omega = o$ [7].

cientes de $d\omega$ son las componentes esenciales de un tensor antisimétrico covariante de tercer orden δ_{ijk}. Su anulación ($\delta ijk = 0, i, j, k = 1, 2, \ldots, 2n$) equivale a la condición $d\omega = 0$ y también a la anulación de su dual δ^{ijk}, que llamamos tensor de **Jacobi** porque cuando ω es canónica δ^{ijk} se reduce al primer miembro de la identidad de **Jacobi.**

Veremos enseguida que una consecuencia inmediata de ésto es que *las funciones de punto sobre* V_{2n} *forman un álgebra* **de Lie.**

5. GRADIENTE SIMPLECTICO DE UNA FUNCION ESCALAR SOBRE V_{2n}

Los vectores de T_x son los vectores tangentes de V_{2n} en el punto x. Son vectores contravariantes. Los vectores del espacio dual $T_x{}^*$ o covectores son los vectores covariantes. A menudo se identifican mediante la polaridad intrínseca

$$(5.1) \qquad x^i a_{ij} = x_i$$

no degenerada por ser det. $(a_{ij}) \neq 0$ (8). En una variedad diferenciable cualquiera (sin tensor fundamental) a toda función de punto escalar $f(x)$ corresponde intrínsecamente un campo de covectores (esencialmente su diferencial df) cuyas componentes en cualquier sistema de coordenadas locales son las derivadas parciales.

$$(5.2) \qquad \partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Si la variedad es un espacio de *Riemann* con el g_{ij} invariante el campo de covectores puede sustituirse por el campo de vectores dual de coeficientes

$$(5.3) \qquad \partial^i f = g^{ij} \partial_j f$$

(8) Conviene observar que en las aplicaciones a la Mecánica estadística no se puede prescindir del caso $det(a_{ij}) = o$ (variedades simplécticas degeneradas). En efecto, las variedades de energía constante $H =$ cte son también simplécticas y degeneradas por ser de dimensión impar ($= 2n - 1$).

que tiene un significado intrínseco respecto a la geometría riemanniana ($\partial^i f =$ «*derivadas contravariantes*»).

En nuestro caso la (5.3) puede sustituirse por su análoga reemplazando el tensor g_{ij} por el antisimétrico a_{ij} de los coeficientes de ω.

De este modo vemos que

A todo escalar $f(x)$ sobre la V_{2n} de las fases corresponde intrínsecamente un campo de vectores $\vec{X}(x)$ que llamaremos *gradiente simpléctico* de $f(x)$.

$$\vec{X} = \operatorname{grad} f$$

Diremos que $\vec{X}$ deriva de un *potencial simpléctico* $f(x)$.

Este gradiente es invariante por las transformaciones de contacto. El gradiente euclídeo utilizado por *Khinchin* [6] no tiene esta propiedad.

6. PRODUCTO ESCALAR SIMPLECTICO

El invariante bilineal

$$<\vec{x}, \vec{y}> = a_{ij} x^i y^j \tag{6.1}$$

es antisimétrico. Por tanto $<\vec{x}, \vec{x}> = 0$ y no existe una métrica invariante. En cambio (6.1) es un producto escalar antisimétrico. (*producto escalar simpléctico*) característico de la geometría simpléctica. En el caso particular $x^i = \partial^i f$, $y^j = \partial^j g$ coincide (salvo el signo) *con el paréntesis de Poisson* $(f, g.)$ de las dos funciones invariante por las transformaciones de contacto (= simplécticas globales). La propiedad $(f, f) = 0$ tiene este notable significado geométrico:

El vector $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f$ *en* x_0 *es tangente en* x_0 *a la variedad de nivel*

$$f(x) = f(x_0)$$

que difiere de la propiedad análoga de la geometría riemanniana ($\overrightarrow{\text{grad}} f$ es entonces ortogonal a la variedad de nivel correspondiente). *Las curvas de V_{2n} tangentes en cada punto del vector grad f integrales del sistema diferencial intrínseco.*

$$\frac{d \overrightarrow{x}(u)}{d u} = \overrightarrow{\text{grad}} f (x(u))$$

están contenidas en las variedades de nivel $f(x) = f(x_0)$.

7. TRANSFORMACIONES DE CONTACTO (= SIMPLECTICAS) INFINITESIMALES

Un campo de vectores $\vec{X} = \vec{X}(x)$ es, por definición, exactamente lo mismo que una transformación infinitesimal. *La condición característica para que sea una transformación simpléctica infinitesimal es que la derivada de Lie* (v. [10]) *de* ω *respecto al campo* $\vec{X}(x)$ *sea nula.* Geométricamente esta condición significa que ω es invariante por translación a lo largo de las curvas integrales del campo.

Se prueba muy fácilmente utilizando una notable fórmula de la teoría de las derivadas de *Lie* (o también directamente mediante un cálculo muy simple) que $\vec{X}(x)$ *es una transformación infinitesimal simpléctica si y sólo si el pfaffiano* $X_i dx^i$ *dual de* $\vec{X}(x)$ $(X^1, X^2, \ldots X^n)$ *es una diferencial exacta.*

Por lo tanto localmente, en un entorno de cada punto $X(x) = \overrightarrow{\text{grad}}\, H$.

8. EXPRESION TENSORIAL DE LAS ECUACIONES DE HAMILTON

El significado geométrico de las ecuaciones de *Hamilton* es el siguiente:

El vector «velocidad» de fase $\dfrac{d \vec{x}}{d t} = (\dot{x}^1, \dot{x}^2, \ldots, \dot{x}^{2n})$ *en un* *sistema cualquiera de coordenadas locales, no necesariamente canónico, es igual al gradiente simpléctico del hamiltoniano cambiado de signo.*

Por consiguiente se pueden resumir las ecuaciones de Hamilton en una sola ecuación vectorial intrínseca

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, H$$

que admite en cualquier sistema de coordenadas dos expresiones covariante y contravariante

$$v^i = \dot{x}^i = -\partial^i H$$

$$v_i = -\partial_i H$$

La forma ordinaria de las ecuaciones de Hamilton vale sólo en un sistema de coordenadas canónicas (en el que ω se expresa segun (1.1)). Entonces las derivadas $\dot{p}^i$, $\dot{q}^i$ son contravariantes mientras que las $\frac{\partial H}{\partial p^i}$, $\frac{\partial H}{\partial q^i}$ son covariantes. Los cambios de signo que se presentan en dichas ecuaciones se deben a que las componentes contravariantes del gradiente simpléctico de H en un sistema cualquiera coinciden con las derivadas parciales de H en otro orden multiplicadas por factores ± 1 oportunos.

9. ESBOZO DE OTROS DESARROLLOS

Creemos que la aplicación más importante de esta concepción geométrica de la V_{2n} es la teoría de las subvariedades que encierra una interpretación geométrica muy sugestiva de la integración de los sistemas canónicos, de la que existen ya algunos esbozos puramente analíticos en *Caratheodory* [2]. Aquí sólo mencionaré que las subálgebras del álgebra de *Lie* de las funciones de punto sobre la V_{2n} tienen como gradientes simplécticos de sus funciones sistemas de *Pfaff* completamente integrables.

Las variedades integrales W de los mismos tienen siempre un elemento de volumen invariante — lo que les hace particularmente útiles en las aplicaciones a la Mecánica Estadística. Este elemento de volumen es una forma diferencial externa que se expresa fácilmente respecto al tensor antisimétrico de W subordinado por ω.

BIBLIOGRAFIA

[1] BLANC-LAPIERRE - CASAL-TORTRAT, *Méthodes mathématiques de la Mécanique Statitisque,* Masson et C^{e}., 1959.

[2] CARATHEODORY, *Variationsrechnung,* Teubner, Leipzig, 1935.

[3] E. CARTAN, *Les sistèmes différentiels extéreurs et leurs applications géométriques,* Act. Sci Ind. Hermann, París, 1955.

[4] CHERN, *Differentiable manifolds,* Chicago University.

[5] GALLISOT, *Les formes extérieurs en Mécanique,* Annale de l'Institut Fourier. Vol. 3-4, 1951-52.

[6] KHINCHIN, *Mathematical foundations of statistical mechanies,* Dover, 1949.

[7] LIBERMANN, *Automorphismes infinitésimaux d'une varieté symptéctique,* C. Rendus, p. 395-397, 1952.

[8] LICHNÉROVICZ, *Algèbre et analyse linéaires,* Masson et C^{e}., París, 1935.

[9] — —, *Tehories unitaires de la gravitation,* Masson et C^{e}.

[10] — —, *GGeométre des groupes des transformations,* Dunod, París, 1958.

[11] POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la Mecanique celeste,* Dover pub.

[12] RHAM (DE), *Varietés diférentiables,* Act. Sci. Ind., París, 1955.

[13] SEGRE (B), *Forme differenziale e loro integrali,* Roma, Ed. Docet.

[14] SYNGE, *On the geometry of dynamics.*

[15] — —, *Classical dynamics,* Handbuch der Physik, Band III/1, Springer, Berlin, 1960.

[16] WEYL, H., *Classical Groops,* Princeton Math. Series.