LA ELECTROTECNICA COMO CONSECUENCIA RELATIVISTA

por F. Alsina

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Apto. 1827, Caracas

Introducción

Suelen llamarse «velocidades relativistas» a las que son próximas a la de la luz, debido a que las «correcciones relativistas» a las fórmulas llamadas «clásicas», incorporan términos de orden $(v/c)^2$ que adquieren importancia si $v \simeq c$. Sin embargo, hay por lo menos un ejemplo —de una importancia práctica extraordinaria— en el que velocidades que dan $(v/c)^2 \simeq 10^{-28}$ originan «correcciones» considerables, porque el número de partículas que simultáneamente intervienen es del orden del número de Avogadro.

Este es el caso, en efecto, de la electrotécnica, que estudia los fenómenos mecánicos originados al tener corriente eléctrica en conductores metálicos. Dado que estos «conductores» no son sino agrupaciones de cargas eléctricas —como toda materia— el estudio puede reducirse a aplicación de leyes entre cargas eléctricas.

Las cargas positivas y negativas en un metal, son del orden de 10^3 Cb/cm^3. El valor de la carga total es cero si el metal es neutro; pero las fuerzas no se anularán si hay cargas en movimiento, debido precisamente a la «corrección relativista» mencionada. Aunque muy pequeño comparado con las fuerzas electrostáticas propiamente dichas, ese residuo dista de ser despreciable: de él dependen todos nuestros motores y generadores eléctricos.

El formalismo relativista aplicado así, introduce un único concepto como base de todos los fenómenos, y simplifica su presentación. Desaparecen leyes empíricas y reglas mnemotécnicas, se gana comprensión, y algunos pseudoproblemas (como el de los «sistemas de unidades», que es arrastrado desde hace más de un siglo) no tienen siquiera ocasión de plantearse.

En notas anteriores hemos presentado algunos resultados parciales (1); en la presente los extendemos hasta abarcar prácticamente toda la electrotécnica.

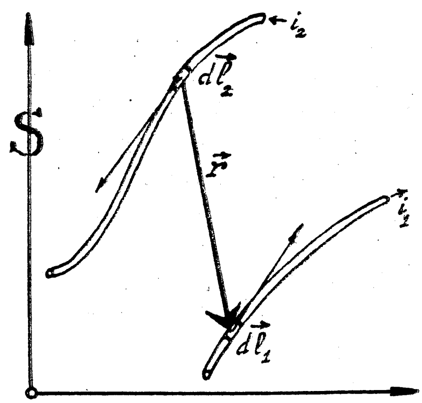
1. *Fuerzas entre conductores.*

En forma esquemática, consideraremos un conductor como un tubo de sección despreciable cargado positivamente, lleno con flúido de cargas negativas. Todas las cargas serán supuestas puntuales, y su número —que no especificaremos— se supondrá muy grande.

Sean ahora ${}^{+}q_2$ y ${}^{-}q_2$ las cargas contenidas en un elemento cualquiera $\vec{dl}_2$ de conductor. Si el conjunto es neutro eléctricamente y hay una corriente, será

$$ {}^{+}q_2 + {}^{-}q_2 = 0 \qquad (1)$$

$$ {}^{+}q_2 \vec{v}_2 = i_2 \vec{dl}_2, \qquad (2)$$



(1) F. Alsina, Acciones entre conductores paralelos, *An. Soc. Cient. Arg.*, enero 1951.

F. Alsina, Fuerzas entre cargas y conductores, *An. Soc. Cient. Arg.*, febrero 1952.

F. Alsina, Relaciones entre electromagnetismo y relatividad, Tesis, Facultad de Ciencias Físicomatemáticas, La Plata, 1951.

donde i_2 es la corriente, y $\vec{v}_2$ la velocidad *promedio* con que las cargas negativas se desplazan respecto al conductor. Por la hipótesis hecha, v_2 será numéricamente pequeña.

Tengamos ahora otro elemento $\vec{dl}_1$, para el que definimos expresiones análogas a (1) y (2). Entre las cargas que componen uno y otro elemento se ejercerán fuerzas del tipo

$$\vec{F}_2 = \frac{-\beta_{V_1} q_1 q_2}{\left[r^2 + \beta_{V_1}{}^2 \frac{(r.\, v_1)^2}{c^2} \right]^{3/2}} \left\{ \vec{r} + \frac{\vec{V}_2}{c^2} \times (\vec{V}_1 \times \vec{r}) \right\} \tag{3}$$

donde podemos poner cualquier signo a las cargas, de modo que en total tendremos *cuatro* expresiones análogas. $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ son velocidades medidas respecto al sistema S, y $\beta_{V_1} = (1 - V_1{}^2/c^2)^{-1/2}$.

Si los conductores son móviles, y llamamos $\vec{U}$ su velocidad en S, tendremos, en aproximación suficiente a nuestros fines,

$$\vec{V}_1 = \vec{U}_1 + \vec{v}_1 \qquad \vec{V}_2 = \vec{U}_2 + \vec{v}_2 \tag{4}$$

En verdad, la (3) exige que las velocidades sean constantes. Pero la aplicaremos también al caso en que $\vec{v}$ varíe en dirección (corriente constante en conductor curvo), lo que será justificado más tarde. (²)

Las ecuaciones (1) a (4) son suficientes para dar cuenta de los fenómenos con corriente constantes, en conductores con velocidad uniforme. Para comparar con las fórmulas habituales, basta calcular en aproximación c^2, y poner $v^2 = 0$.

Veamos ejemplos:

a. *Ley de Grassmann.*

Sumando las 4 fuerzas que actúan sobre el elemento $\vec{dl}_2$,

---

(²) La (3) es bien conocida como fuerza total que sufre la carga q_2 por efecto de la carga q_1, si ambas se mueven de manera uniforme. Ver su deducción a partir de la ley de Coulomb, en F. ALSINA, *Revista UMA-AFA*, 1961.

y tomando en cuenta las velocidades que tienen las distintas cargas, se obtiene

$$d\vec{F}_2 = \frac{i_1 i_2}{c^2} \frac{1}{r^3} \vec{dl}_2 \times (\vec{dl}_1 \times \vec{r}). \tag{5}$$

b. *Ley de la inducción.*

Si definimos en forma usual la f. e. m. E que se «induce» en uno de los circuitos por moverse en la proximidad de otro, obtendremos

$$E_1 = \frac{i_2}{c^2} \oint_1 \oint_2 \frac{(\vec{U}_2 - \vec{U}_1) . \vec{r}}{r^3} (\vec{dl}_1 . \vec{dl}_2) \tag{6}$$

donde las integraciones se extienden sobre los circuitos a que pertenecen $\vec{dl}_1$ y $\vec{dl}_2$.

Es fácil llevar la (6) a forma más familiar; pero la dejamos así para observar que E depende solamente del movimiento relativo de los conductores, y no de su movimiento respecto a S, lo que demuestra una de las afirmaciones más conocidas de Einstein, punto de partida en su electrodinámica.

2. *Cargas aceleradas.*

La (3) está escrita para «el instante t»; pero está claro que la posición de la carga q_1 en ese instante es físicamente irrelevante; interesa mas bien su posición en el «instante retardado» en que partió de q_1 el agente físico que, propagándose con velocidad c, llega a q_2 en el instante t.

Mientras dicho agente avanzaba, q_1 pudo haber seguido otra trayectoria (y aún desaparecer) sin que el valor de $\vec{F}_2$ en el instante t sufra modificación. Supongamos por ejemplo que q_1 ha tenido una aceleración $\vec{a}$. Su posición, calculada en aproximación c^{-2}, está dada por

$$\vec{r}_t = \vec{r} + \frac{1}{2} \vec{a} \frac{r^2}{c^2} \tag{7}$$

Calculando $\vec{r}$ como función de $\vec{r}_t$, y llevando a (3) resulta, siempre en la misma aproximación,

$$\vec{F}_2 = \frac{q_1 q_2}{r_t^3} \left\{ \vec{r}_t + \frac{1}{2c^2} \left[\vec{r}_t \left(V_1^2 - 3 \frac{(\vec{r}_t . \vec{V}_1)^2}{r_t^2} + 3 \vec{r}_t . \vec{a} \right) - \vec{a} r_t^2 \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\vec{V}_2}{c^2} \times (V_1 \times \vec{r}_t) \right\} .$$

Si ahora repetimos el cálculo de la f. e. m. inducida en un circuito por el movimiento *acelerado* de las cargas del otro, obtenemos después de cálculos sencillos

$$E_1 = \frac{1}{c^2} \frac{d i_2}{d t} . \oint \oint \frac{\vec{dl}_1 . \vec{dl}_2}{r_t} \qquad (8)$$

es decir, la ley de inducción de Faraday. Esta fórmula —en la que aparece explícito el coeficiente de inducción mutua de Neuman— cubre, junto con la (6), todos los casos posibles de inducción, con circuitos rígidos o deformables y corrientes constantes o variables.

3. *Consideraciones finales.*

Las indicaciones de los párrafos anteriores ilustran la sencillez con que se obtienen las fórmulas electrotécnicas. En otra nota ([2]) hemos mostrado que con igual sencillez se obtienen las ecuaciones de Maxwell. En consecuencia, todo el conjunto de fórmulas básicas queda así demostrado a partir de la ley de Coulomb y transformaciones de Lorentz.

Finalizamos con dos observaciones:

I. Para obtener (5), hemos sumado fuerzas aplicadas a cargas negativas, con fuerzas aplicadas a cargas positivas. Esto equivale a suponer que las fuerzas aplicadas a los electrones de conducción, son trasmitidas íntegramente a la malla metálica. En otras palabras, a suponer que los conductores tengan resistencia de tipo óhmico.

II. La aceleración no tuvo otro efecto que alterar la posición final (irrelevante) de la carga activa. Esto implica que dentro de la electrotécnica la aceleración no juega papel físico especial, y es forzoso concluir que la electrodinámica relativista de las cargas puntuales, suficiente para dar cuenta de todo el electromagnetismo maxwelliano, no incluye sin embargo la radiación por cargas aceleradas.

Una consecuencia obvia es que los conductores pueden ser curvos sin que pierdan validez los cálculos. Otra consecuencia es que si usáramos un modelo más elaborado de conductor, tomando en cuenta aceleraciones de los electrones en el potencial periódico de la malla, después de calcular solo quedaría el valor medio de la velocidad usado aquí.

Finalmente, es bien sabido que el formalismo habitual, basado en la aplicación de las ecuaciones de Maxwell-Lorentz a cargas puntuales aceleradas, da un resultado que se interpreta como radiación pero no da indicio alguno de las fuerzas de frenamiento consiguientes (las que solo aparecen con hipótesis ad-hoc) (3). Desde este punto de vista, el formalismo utilizado aquí parece indicar que más bien todo el problema de la radiación queda fuera del modelo de la carga puntual.

(3) Ver, por ejemplo, G. N. Plass, "Classical Electrodynamical Equationes of Motion with Radiative Reaction", *Rev. Mod. Phys.*, *33*, 37; 1961.