UNA RELACION ENTRE LAS CURVATURAS MEDIAS DE CUERPOS CONVEXOS PARALELOS EN ESPACIOS DE CURVATURA CONSTANTE

por L. A. SANTALÓ

SUMMARY. Let Q be a closed convex hypersurface of class C^3 of the n-dimensional space of constant curvature $K = k^2$. Let $Q(\lambda)$ be the hypersurface parallel to Q at distance λ. Let $M_i(\lambda)$ denote the i-th mean curvature of $Q(\lambda)$ (defined by (1.3). We prove the identities (1.9) where $M'_i(\lambda) = dM_i(\lambda)/d\lambda$. From these identities we deduce some consequences for convex curves and surfaces ($n = 2,3$); among them we get a proof of the inequality (3.14) announced by Blaschke [2] and first proved by Knothe [5] by a very different way.

1. *Definiciones e identidad fundamental.* Consideremos el espacio de curvatura constante K. Por simplicidad de notación pondremos

$$K = k^2 \tag{11}$$

con lo cual k resultará imaginario si $K < 0$, pero las fórmulas tendrán siempre significado real en virtud de las igualdades

$$\operatorname{sen} ix = i \operatorname{senh} x, \qquad \cos ix = \cosh x. \tag{1.2}$$

Sea Q una hipersuperficie de clase C^3 convexa y cerrada del espacio. Si ρ_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ son los radios principales de curvatura de Q en el punto P ydP indica el elemento de área en P, las curvaturas medias de Q se definen por

$$M_i = \frac{1}{\binom{n-1}{i}} \int_Q \left(\Sigma \frac{1}{\rho_{h1}\, \rho_{h2} \ldots \rho_{hi}} \right) dP \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{1.3}$$

donde la suma está extendida a las $\binom{n-1}{i}$ combinaciones de orden i de los índices 1, 2, ..., $n-1$. En particular es $M_0 =$ área de Q.

Si c_i es la línea de curvatura que corresponde a ρ_i y R_i representa la distancia geodésica de P al punto de contacto de la normal a Q en P con la envolvente de las normales a Q a lo largo de c_i, se sabe que es

$$(1.4) \qquad \rho_i = \frac{\tan kR_i}{k}$$

como puede verse en [4, p. 214].

Además, si $d\alpha_i$ es el ángulo entre dos normales infinitamente próximas a lo largo de c_i en P y ds_i es el correspondiente elemento de arco de c_i, es

$$(1.5) \qquad ds_i = \frac{\text{sen } kR_i}{k} \, d\alpha_i \, .$$

De aquí

$$(1.6) \qquad dP = \frac{1}{k^{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} \text{sen } kR_i \; d\alpha_i \, .$$

Para la hipersuperficie $Q(\lambda)$ paralela exterior a Q a distancia λ, es

$$(1.7) \qquad R_i(\lambda) = R_i + \lambda \quad , \quad ds_i(\lambda) = k^{-1} \text{ sen } k(R_i + \lambda) \; d\alpha_i \, .$$

Por tanto, sustituyendo (1.6) y (1.7) en (1.3) resulta para la i - ésima curvatura media de $Q(\lambda)$ la expresión

$$(1.8) \quad M_i(\lambda) = \frac{k^{i-n+1}}{\binom{n-1}{i}}$$

$$\int \Sigma \left(\prod_{j=1}^{i} \cos k(R_{h_j} + \lambda) \prod_{j=i+1}^{n-1} \text{sen } k(R_{h_j} + \lambda) \right) d\alpha_1 \, d\alpha_2 \ldots d\alpha_{n-1}$$

donde la integración está extendida a la esfera unidad $(n-1)$-dimensional, o sea, a todos los valores de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ que corresponden a puntos P distintos de Q.

En un trabajo anterior [6] aplicamos la fórmula (1.8) para hallar el valor de $M_i(\lambda)$ en función de las curvaturas medias M_i

de Q y de λ. Nuestro objeto es ahora observar que sin necesidad de calcular $M_i(\lambda)$ se pueden obtener unas relaciones interesantes entre sus derivadas. En efecto, derivando (1.8) respecto de λ, resulta

$$M'_i(\lambda) = \frac{k^{i-n+1}}{\binom{n-1}{i}} \left[-(n-i) \binom{n-1}{i-1} k^{n-i+1} M_{i-1}(\lambda) \right.$$
$$\left. + (i+1) \binom{n-1}{i+1} k^{n-i-1} M_{i+1}(\lambda) \right] ,$$

o bien, simplificando,

$$M'_i(\lambda) = -i k^2 M_{i-1}(\lambda) + (n-i-1) M_{i+1}(\lambda). \tag{1.9}$$

Obsérvese que esta fórmula vale también para los casos extremos $i = 0$, $i = n - 1$. Es decir, la fórmula (1.9) vale para $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Todavía ella se puede completar con la siguiente. Si $V(\lambda)$ es el volumen del cuerpo limitado por $Q(\lambda)$, la derivada $V'(\lambda)$ es el área de $Q(\lambda)$ o sea, igual a $M_0(\lambda)$. Es decir, se tiene también

$$V'(\lambda) = M_0(\lambda) \tag{1.10}$$

Para $K > 0$, es importante también la relación entre las curvaturas medias de dos hipersuperficies Q y Q^* "duales". Se llama hipersuperficie dual Q^* de Q a la paralela exterior a distancia $\pi/2k$, es decir $Q^* = Q(\pi/2k)$. Llamando M_i^* *a* la i-ésima curvatura media de Q^*, o sea a $M_i(\pi/2k)$, de (1.8) se deduce la fórmula importante (válida par $i = 0, 1, \ldots, n-1$)

$$M_i^* = (-1)^i k^{2i-n+1} M_{n-i-1} \tag{1.11}$$

que ya fue obtenida en [6]. Obsérvese la relación

$$M_i^{**} = (-1)^{n-1} M_i . \tag{1.12}$$

2. *Aplicación al caso* $n = 2$. Para $n = 2$ en vez de V tenemos el área F limitada por la curva convexa Q y en vez de M_0 la longitud L de la misma. Las fórmulas (1.9) para $i = 0,1$ dan

$$L'(\lambda) = M_1(\lambda) \quad , M'_1(\lambda) = -k^2 L(\lambda) . \tag{2.1}$$

De aquí

$$(2.2) \qquad L''(\lambda) + k^2 L(\lambda) = 0, \quad , \quad M''_1(\lambda) + k^2 M_1(\lambda) = 0.$$

La primera ecuación da

$$(2.3) \qquad L(\lambda) = A \cos k\lambda + B \operatorname{sen} k\lambda .$$

Las constantes A, B se determinan en función de $L(0) = L$ y $L'(0) = M_1$, quedando

$$(2.4) \qquad L(\lambda) = L \cos k\lambda + k^{-1} M_1 \operatorname{sen} k\lambda.$$

Teniendo en cuenta (1.10) que aquí se escribe $F'(\lambda) = L(\lambda)$, integrando (2.4) y determinando la constante de integración por el valor $F(0) = F$, resulta

$$(2.5) \qquad F(\lambda) = F + k^{-1} L \operatorname{sen} k\lambda + k^{-2} M_1 (1 - \cos k\lambda).$$

Tenemos así las fórmulas (2.4) y (2.5), bien conocidas, que dan la longitud y el área de $Q(\lambda)$. Ver por ejemplo Bonnesen [3, pág. 81], Vidal Abascal [7] y Allendoerfer [1].

Análogamente a (2.4), de la segunda fórmula (2.2) se obtiene

$$(2.6) \qquad M_1(\lambda) = M_1 \cos k\lambda - k L \operatorname{sen} k\lambda.$$

De (2.4) y (2.6) resulta que $L^2(\lambda) + \Big((k^{-1} M_1(\lambda) \Big)^2$ es independiente de λ. Para el caso de curvatura positiva de aquí se deduce la propiedad isoperimétrica del círculo [3, pág. 81]. En efecto, sea $Z(\lambda)$ el círculo circunscripto a $Q(\lambda)$; tomando λ tal que $Z(\lambda)$ sea el círculo máximo de radio k^{-1} y longitud $2\pi k^{-1}$, la longitud de $Q(\lambda)$ es igual o superior a esta (pues los arcos entre los puntos de contacto son geodésicas par $Z(\lambda)$) o sea $L(\lambda) \geqslant 2\pi k^{-1}$. Por tanto

$$(2.7) \qquad L^2 + (M_1/k)^2 \geqslant 4\pi^2 k^{-2}$$

puesto que el primer miembro es independiente de λ.

Para introducir el área de F en vez de M_1, hay que observar que de (2.1) y de $F'(\lambda) = L(\lambda)$ se deduce $F'(\lambda) + M'_1(\lambda)\, k^{-2} = 0$, de donde $F(\lambda) + M_1(\lambda) k^{-2} = C =$ constante (independiente de λ). El valor de esta constante no resulta de lo anterior; ella está dada por la fórmula de Gauss-Bonnet de la teoría de superficies, resultando $C = 2\pi/k^2$. Queda así $M_1/k = 2\pi/k - kF$ y la desigualdad (2.7) resulta

$$L^2 - 4\pi F + k^2 F^2 \geqslant 0 \tag{2.8}$$

que es la clásica desigualdad isoperimétrica para las curvas esféricas o, en general, para las curvas de las superficies de curvatura constante k^2. El signo de igualdad vale únicamente cuando $Q(\lambda)$ coincide con $Z(\lambda)$ para el valor de λ en que $Z(\lambda)$ es el círculo máximo, o sea, solamente si Q es una circunferencia.

Observemos también que para el caso $k^2 > 0$ tenemos las relaciones de dualidad (1.11), que para $n = 2$, $i = 0{,}1$ se escriben

$$L^* = k^{-1} M_1 \quad , \quad M_1^* = -k\, L \tag{2.9}$$

con lo cual las fórmulas (2.4), (2.5) y (2.6) se pueden escribir

$$L(\lambda) = L \cos k\lambda + L^* \operatorname{sen} k\lambda, \tag{2.10}$$

$$F(\lambda) = F + k^{-1} L \operatorname{sen} k\lambda + k^{-1} L^* (1 - \cos k\lambda), \tag{2.11}$$

$$k^{-1} M_1(\lambda) = L^* \cos k\lambda - L \operatorname{sen} k\lambda. \tag{2.12}$$

3. *El caso* $n = 3$. Para $n = 3$, la fórmula (1.10) y las (1.9), para $i = 0, 1, 2$ toman la forma

$$\begin{aligned} V'(\lambda) &= M_0(\lambda) \\ M'_0(\lambda) &= 2 M_1(\lambda) \\ M'_1(\lambda) &= -k^2 M_0(\lambda) + M_2(\lambda) \\ M'_2(\lambda) &= -2 k^2 M_1(\lambda). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Las fórmulas (1.11) referentes a la dualidad, para el caso de curvatura positiva, son (para $i = 0, 1, 2$),

$$M_0^* = k^{-2} M_2 \quad , \quad M_1^* = -M_1 \quad , \quad M_2^* = k^2 M_0. \tag{3.2}$$

Una primera consecuencia de (3.1) es $M'_2(\lambda) + k^2 M'_0(\lambda) = 0$, de donde

$$M_2(\lambda) + k^2 M_0(\lambda) = C, \tag{3.3}$$

siendo C independiente de λ. Según (3.2) esta relación puede escribirse

$$M_0^* + M_0 = C\, k^{-2}. \tag{3.4}$$

Como M_0^* y M_0 son las áreas de Q^* y Q, un teorema de Blaschke (Ver [1], fórmula (32)) nos dice que $C = 4\pi$. Queda así

$$M_2(\lambda) + k^2 M_0(\lambda) = 4\pi. \tag{3.5}$$

De (3.1) se deducen también inmediatamente las relaciones

$$\begin{aligned} M'_0{}'(\lambda) + 4\, k^2 M_0(\lambda) &= C_0 \\ M'_2{}'(\lambda) + 4\, k^2 M_2(\lambda) &= C_2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

siendo C_0 y C_2 independientes de λ.

Sustituyendo en la primera ecuación (3.6) los valores duales (3.2) y comparando con la segunda ecuación (3.6), resulta que debe ser $C_2 = k^2 C_0$. Por otra parte, de (3.6) y (3.5) se deduce $C_2 + k^2 C_0 = 16\, k^2 \pi$; por tanto

$$C_0 = 8\pi \quad , \quad C_2 = 8\, k^2 \pi. \tag{3.7}$$

Con esto, integrando las ecuaciones (3.6) teniendo en cuenta los valores iniciales $M_0(0) = M_0$, $M_0'(0) = 2\, M_1(0) = 2\, M_1$, $M_2(0) = M_2$, $M_2'(0) = -2\, k^2 M_1(0) = -2\, k^2 M_1$, resulta

$$2\, k^{-2}\pi - M_0(\lambda) = (2\, k^{-2}\pi - M_0) \cos 2\, k\lambda - k^{-1} M_1 \operatorname{sen} 2k\lambda, \tag{3.8}$$

$$M_2(\lambda) - 2\pi = (M_2 - 2\pi) \cos 2\, k\lambda - k\, M_1 \operatorname{sen} 2k\lambda. \tag{3.9}$$

Por otra parte, de (3.1) se deduce también

$$M'_1{}' + 4\, k^2 M_1 = 0 \tag{3.10}$$

de donde, con las condiciones iniciales $M_1(0) = M_1$, $M_1'(0) = = k^2 M_0 + M_2 = 4\pi - 2\, k^2 M_0$ (esto último según (3.5),

$$k^{-1} M_1(\lambda) = k^{-1} M_1 \cos 2\, k\lambda + (2\pi k^{-2} - M_0) \operatorname{sen} 2\, k\lambda. \tag{3.11}$$

De (3.8) y (3.11) se deduce que la expresión

$$D = (2\pi\, k^{-2} - M_0(\lambda))^2 + k^{-2} M_1^2(\lambda) \tag{3.12}$$

es independiente de λ.

Consideremos el caso del espacio esférico (curvatura constante positiva $k^2 > 0$). Habiendo supuesto que $Q = Q(0)$ es convexa, el volumen de $Q(\lambda)$ es creciente con λ. Al crecer λ llega un momento en que este volumen es igual a la mitad del volumen total del espacio; supongamos que esto ocurra para $\lambda = \lambda_0$. En este momento, por la desigualdad isoperimétrica en el espacio esférico, el área $M_0(\lambda_0)$ es igual o mayor que el área de la esfera máxima $4\pi k^{-2}$, que limita el mismo volumen. Por tanto, para $\lambda = \lambda_0$, el valor de D es $\geqslant 4\pi^2 k^{-4}$; como D es independiente de λ, esta acotación valdrá para todo λ, en particular para $\lambda = 0$ se tiene

$$(3.13) \qquad (2\pi k^{-2} - M_0)^2 + k^{-2} M_1^2 \geqslant 4\pi^2 k^{-4}$$

que poniendo $M_0 = F$ para indicar el área con su notación habitual, puede escribirse

$$(3.14) \qquad M_1^2 + k^2 F^2 - 4\pi F \geqslant 0.$$

Esta es la desigualdad que generaliza al espacio de curvatura constante positiva la clásica desigualdad $M^2 - 4\pi F \geqslant 0$ de Minkowski para el caso euclidiano ($k = 0$).

La desigualdad (3.14) se encuentra sin demostración en Blaschke [2, fórmula (I)]; la única demostración que conocemos fue dada por H. Knothe [5] y es muy distinta de la precedente.

Sería interesante ver si de las identidades generales (1.9) se puede obtener la desigualdad (3.14) para el espacio de curvatura negativa y también su generalización al caso de $n > 3$ dimensiones.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. B. ALLENDORFER, *Steiner's formulae on a general* S^{n+1}, Bull. Amer. Math. Soc., 54, 128-135, 1948.

[2] W. BLASCHKE, *Ueber eine geometrische Frage von Euklid bis Heute*, Hamburger Mathematische Einzelschriften, Heft 23, 1938.

[3] T. BONNESEN, *Les ploblèmes des isopérimètres et des isépiphanes*, Gauthier-Villars, París 1929.

[4] E. P. EISENHART, *Riemannian Geometry*, Princeton 1926.

[5] H. KNOTHE, *Zur Theorie der konvexen Körper im Raum konstanter positiver Krümmung*, Revista de Facultad de Ciencias, Lisboa, 2ª Serie, A, Vol. II, 336-348, 1952.

[6] L. A. SANTALÓ, *On parallel hypersurfaces in the elliptic and Hyperbolic n-dimensional space*. Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 1, 325-330, 1950.

[7] E. VIDAL ABASCAL, *A generalization of Steiner's formulae*, Bulletin of the American Math. Soc. Vol. 53, 841-844, 1947.