

GUIA DE ONDAS CILINDRICA CON DOS DIELECTRICOS(*)

por ALBERTO MAIZTEGUI (**)
Centro Atómico Bariloche

RESUMEN: Se estudia la propagación de los modos superiores en una guía de ondas cilíndrica, con dos dieléctricos dispuesto coaxialmente. (Figura 1).

Se obtienen dos tipos de soluciones y, por tanto, dos modos de propagación. Se verifica que, en general, no son modos transversales puros (eléctricos o magnéticos), sino combinaciones de ellos.

Sin embargo, en algunos casos particulares los modos se hacen transversales; y en uno de ellos, la superficie de separación de los dos dieléctricos actúa —en lo que se refiere a la estructura del campo— como una superficie metálica.

Se discute el caso en que la constante de propagación del medio de menor constante dieléctrica es nula, y se encuentra que para él no existe solución, salvo el caso de simetría (funciones cilíndricas de orden cero) tratado por L. Pincherle ("Electromagnetic waves in metal tubes", *Phys. Rev.* 66, 118, (1948)).

Se han calculado numéricamente varios modos para distintos valores de los radios y de las constantes dieléctricas.

1. *Soluciones generales.* Si H y E son, respectivamente, los campos magnético y eléctrico de una onda que se propaga en una guía cilíndrica con su eje a lo largo de la coordenada z , la expresión general de sus componentes en coordenadas cilíndricas es:

$$H_{mn}(z, r, \theta, t) = H_{mn}(r) \cdot e^{in\theta} \cdot e^{i(\omega t - \alpha z)}$$

$$E_{mn}(z, r, \theta, t) = E_{mn}(r) \cdot e^{in\theta} \cdot e^{i(\omega t - \alpha z)}$$

con $m = z, r, \theta$ y $n = 1, 2, \dots$, siendo ω la frecuencia angular y $\lambda_g = \frac{2\pi}{\alpha}$ la longitud de onda medida en la guía.

(*) Recibido el 4 de mayo de 1962.

(**) Actualmente en el I.M.A.F., Universidad de Córdoba.

En forma detallada, las funciones radiales son, de acuerdo con la notación habitual:

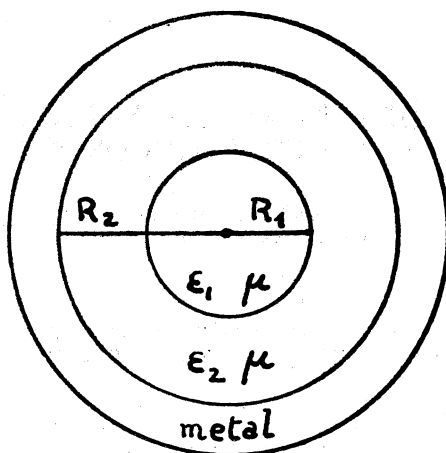


Fig. 1

$$\left. \begin{aligned}
 H_{z,n} &= A_n J_n(kr) + B_n N_n(kr) & (a) \\
 H_{r,n} &= -i \frac{a}{k} [A_n J'_n(kr) + B_n N'_n(kr)] - \frac{\omega \epsilon}{k^2 r} n E_{z,n} & (b) \\
 H_{\theta,n} &= -i \frac{\omega \epsilon}{k} [C_n J'_n(kr) + D_n N'_n(kr)] + \frac{a}{k^2 r} n H_{z,n} & (c) \\
 E_{z,n} &= C_n J_n(kr) + D_n N_n(kr) & (d) \\
 E_{r,n} &= -i \frac{a}{k} [C_n J'_n(kr) + D_n N'_n(kr)] + \frac{\omega \mu}{k^2 r} n H_{z,n} & (e) \\
 E_{\theta,n} &= i \frac{\omega \mu}{k} [A_n J'_n(kr) + B_n N'_n(kr)] + \frac{a}{k^2 r} n E_{z,n} & (f)
 \end{aligned} \right\} (1)$$

donde $J_n(kr)$ y $N_n(kr)$ son las funciones cilíndricas definidas en *Tables of functions* por E. Jahnke y F. Emde, y $J'_n(kr)$ y $N'_n(kr)$ son sus derivadas con respecto al argumento kr , siendo k (la constante de propagación) definida por $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu - a^2$. (2)

Se supondrá que no hay pérdidas a lo largo de la guía, es decir, que la pared metálica tiene conductividad infinita y los dieléctricos, nula.

Resolver el problema significa que, dada una frecuencia ω (o una longitud de onda λ_0 medida en el vacío) es posible determinar:

- 1) el par de valores (k_1, k_2) de cada modo que se propague;
- 2) los coeficientes A, B, C y D en cada dieléctrico;
- 3) la longitud de onda λ_g .

Las condiciones de contorno constituyen un sistema de 6 ecuaciones lineales homogéneas con 6 incógnitas, cuya condición de compatibilidad define la ecuación de autovalores:

$$(X - Y_1) (X - \epsilon Y_2) - n^2 \left(\frac{\epsilon}{y^2} - \frac{1}{x^2} \right) \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \right) = 0 \quad (3)$$

en donde hemos dejado a un lado el subíndice n y hemos puesto:

$$\left. \begin{aligned} k_1 R_1 = x; k_2 R_1 = y; R_2 / R_1 = a; \epsilon_2 / \epsilon_1 = \epsilon \\ X = \frac{J'(x)}{x \cdot J(x)} \quad (a) \\ Y_1 = \frac{1}{y} \cdot \frac{J'(y) N'(ay) - J'(ay) N'(y)}{J(y) N'(ay) - J'(ay) N(y)} \quad (b) \\ Y_2 = \frac{1}{y} \cdot \frac{J'(y) N(ay) - J(ay) N'(y)}{J(y) N(ay) - J(ay) N(y)} \quad (c) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

A cada valor de la frecuencia ω , esta ecuación hace corresponder un conjunto de pares (x, y) que definen una solución cuando satisfacen el sistema

$$\left\{ \begin{aligned} x^2 &= (k_1 R_1)^2 = (\omega^2 \epsilon_1 \mu - a^2) R_1^2 \quad (a) \\ y^2 &= (k_2 R_1)^2 = (\omega^2 \epsilon_2 \mu - a^2) R_1^2 \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

La solución del problema es, considerando como coeficiente arbitrario la amplitud A_1 de excitación del campo magnético:

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= \frac{N'(ay)}{J(y) N'(ay) - J'(ay) N(y)} \cdot J(x) A_1 \quad (a) \\ B_2 &= \frac{J'(ay)}{J(y) N'(ay) - J'(ay) N(y)} \cdot J(x) A_1 \quad (b) \\ C_2 &= \frac{N(ay)}{J(y) N(ay) - J(ay) N(y)} \cdot J(x) C_1 \quad (c) \\ D_2 &= \frac{J(ay)}{J(y) N(ay) - J(ay) N(y)} \cdot J(x) C_1 \quad (d) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$C_1 = i \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu} \cdot \frac{X - Y_1}{X - \epsilon Y_2}} \cdot A_1 \quad (e) \quad (6)$$

Resulta así que, en general, no se propagan modos "E" ni modos "H" puros sino superposiciones de ellos.

Sin embargo, en el caso $n = 0$ el sistema de 6 ecuaciones constituido por las condiciones de contorno se desdobra en dos sistemas de 3 ecuaciones cada uno, lo que hace que las soluciones magnéticas y eléctricas sean independientes entre sí, y de esa manera existen modos puros.

Se ve, además, que la ecuación de autovalores (3) se reduce, para $n = 0$, a

$$(X - Y_1) (X - \epsilon Y_2) = 0$$

que corresponde a los casos estudiados por Pincherle.

2. *Los modos de propagación.* Los autovalores correspondientes a cada modo de propagación están definidos por el sistema de ecuaciones (3) y (5), que también puede escribirse así:

$$\left. \begin{aligned} X(x) &= \frac{Y_1 + \epsilon Y_2}{2} \\ &\pm \sqrt{\left(\frac{Y_1 - \epsilon Y_2}{2}\right)^2 + n^2 \left(\frac{\epsilon}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right) \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right)} \quad (a) \\ x^2 - y^2 &= \omega^2 (\epsilon_1 - \epsilon_2) \mu R_1^2 \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

donde (7,b) se obtiene de (5) por sustracción de aquéllas.

El doble signo implica la existencia de dos soluciones independientes para cada valor de la frecuencia, y, por tanto, dos modos de propagación distintos. Para identificarlos recurrimos al caso bien conocido de una guía homogénea (con un solo dieléctrico), para lo cual hacemos $\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_2$, o sea $\epsilon \rightarrow 1$; esto, a su vez trae como consecuencia que $x \rightarrow y$. Entonces, al tomar el signo positivo en (7,a) resulta $X = Y_1$, lo que trae como consecuencia en las (6) que $C_1 = C_2 = D_2 = 0$. Es decir, se obtiene la *solución magnética* de una guía circular homogénea.

Si en (7,a) se considera el signo negativo resulta $X = \epsilon Y_2$, lo que en las (6) hace que $A_1 = A_2 = B_2 = 0$, que corresponde a la *solución eléctrica* de una guía homogénea. Por todo esto, a los mo-

dos de la guía heterogénea los llamaremos, respectivamente, modo “tipo magnético” y modo “tipo eléctrico”.

Con las soluciones (x, y) correspondientes a cada modo, teniendo presente que de (5) se obtienen

$$\begin{cases} \epsilon_2 x^2 - \epsilon_1 y^2 = a^2 (\epsilon_1 - \epsilon_2) R_1^2 \\ x^2 - y^2 = \omega^2 (\epsilon_1 - \epsilon_2) \mu R_1^2 \end{cases}$$

y que, además

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi c / \lambda_0 = 2\pi / \lambda_0 \sqrt{\epsilon_0 \mu} \\ a &= 2\pi / \lambda_g \end{aligned}$$

siendo c la velocidad de la luz en el vacío, λ_0 la longitud de onda medida en el vacío, y ϵ_0 la constante dieléctrica del vacío, entonces se llega a

$$\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_g} \right)^2 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} \frac{y^2 - \epsilon x^2}{y^2 - x^2}$$

que permite calcular λ_g para cada par (x, y) conociendo λ_0 ⁽¹⁾.

La velocidad de fase en la guía, $v_f = \omega/a$ variará, de acuerdo con la frecuencia, entre infinito y la velocidad de la luz en el medio de mayor constante dieléctrica. Se presentarán dos casos, según sea $\epsilon_2 \leq \epsilon_1$:

a) $\epsilon_2 > \epsilon_1$. Si $c_2 = 1 / \sqrt{\epsilon_2 \mu}$ es la velocidad de la luz en el medio 2 se verifica $\infty \geq v_f \geq c_2$, o lo que es lo mismo: $0 \leq a \leq \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu}$.

Dentro de este caso se tienen tres posibilidades:

- 1) $0 \leq a < \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu} \quad \therefore \quad k_1^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu - a^2 > 0$
- 2) $a = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu} \quad \therefore \quad k_1^2 = 0$
- 3) $\omega \sqrt{\epsilon_1 \mu} < a \leq \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu} \quad \therefore \quad k_1^2 < 0$

b) $\epsilon_2 < \epsilon_1$, en cuyo caso $0 \leq a \leq \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu}$

y en forma análoga al caso a) se obtienen casos b,1), b,2) y b,3).

⁽¹⁾ Es más cómodo calcular con una expresión ligeramente diferente (§ 5).

En los casos $a,1)$ y $b,1)$ las partes radiales están dadas por funciones oscilantes en ambos medios, mientras que en los casos $a,3)$ y $b,3)$ son oscilantes sólo en los medios de mayor constante dieléctrica. Los casos $a,2)$ y $b,2)$ no tienen solución.

3. *Los modos transversales.* Consideremos ahora dos casos particulares que definen modos de propagación en los cuales o bien el campo H o el E son transversales.

1) En principio cabe la posibilidad de que a ciertos valores de ω corresponda $y = y_j$ tal que

$$J(y_j) N'(ay_j) - J'(ay_j) N(y_j) = 0 \quad (8)$$

siendo y_j , además de raíz de (8), una solución de (7) donde define un valor $\omega > 0$.

La (8) implica, teniendo presente la 4,b),

$$\lim_{y \rightarrow y_j} Y_1 = \infty$$

Si escribimos la 7,a) en la forma

$$f_1, f_2 = \frac{Y_1 - \epsilon Y_2}{2} \pm \frac{Y_1 + \epsilon Y_2}{2} \sqrt{1 + n^2 \cdot \frac{\left(\frac{\epsilon}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right) \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right)}{\left(\frac{Y_1 - \epsilon Y_2}{2}\right)^2}}$$

donde f_1 corresponde al signo positivo y f_2 al negativo, entonces se advierte con facilidad que cuando $y \rightarrow y_j$

$$\begin{cases} \lim f_1 = \lim Y_1 = \infty \\ \lim f_2 = \lim \epsilon Y_2 = \text{finito} \end{cases}$$

y cada una de estas posibilidades da origen a un subcaso:

a) Sea la solución $X = f_1$. Entonces de 4,a) resulta $J(x) = 0$ lo que trae como consecuencia (teniendo presente tanto la (8) como las condiciones de contorno), que

$$C_1 = C_2 = D_2 = 0$$

$$A_2 = \frac{y}{x} \cdot \frac{N'(ay)}{J'(y) N'(ay) - J'(ay) N'(y)} J'(x) A_1$$

$$B_2 = -A_2 \cdot J'(ay) / N'(ay)$$

Con esos coeficientes se obtienen expresiones de las componentes del campo electromagnético en el medio 1, que son formalmente iguales a las de la solución magnética en una guía metálica, de radio R_1 , llena con un solo dieléctrico de constantes $\epsilon_1 \mu$. Obsérvese, que la configuración de campos no es la misma que en una guía homogénea porque para ésta los autovalores están dados por los ceros de $J'(x)$.

En el medio 2 esos coeficientes dan componentes de campo que corresponden a la estructura del campo en una guía coaxial metálica cuando transmite una onda "H", con la diferencia que, para $r = R_1$, en la guía heterogénea se cumple $E_\theta \neq 0$ y $H_z = 0$, mientras que en la coaxial común es $E_\theta = 0$ y $H_z \neq 0$.

b) Consideremos las soluciones $X = f_2$. En ese caso se llega a (dejando a un lado el subíndice j):

$$A_2 = i \frac{a}{\omega \mu} n \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \right) \frac{N'(ay)}{J'(y) N'(ay) - J'(ay) N'(y)} y J'(x) C_1$$

$$B_2 = -A_2 \cdot J'(ay) / N'(ay)$$

$$C_2 = \frac{N(ay)}{J(y) N(ay) - J(ay) N(y)} J(x) C_1$$

$$D_2 = -C_2 \cdot J(ay) / N(ay)$$

Con estos coeficientes resulta un modo que es transversal magnético en el medio 1, pero no en el 2. En el medio 1 vuelve a encontrarse analogía entre esta solución y la solución eléctrica de una guía homogénea, pero no la hay en el medio 2 con la de una guía coaxial metálica. Sin embargo, para $n = 0$ el modo se hace transversal magnético en el medio 2.

2) En principio, también cabe la posibilidad de que a ciertos valores de ω correspondan valores $y = y_k$ tales que

$$J(y_k) N(ay_k) - J(ay_k) N(y_k) = 0 \quad (10)$$

siendo y_k , además de raíz de (10), una solución de (7) tal que con el correspondiente x_k defina en 7,b) una $\omega > 0$.

La (10) implica, teniendo presente la 4,b),

$$\lim_{y \rightarrow y_k} \epsilon Y_2 = \infty$$

Teniendo en cuenta la (9) ahora resulta cuando $y \rightarrow y_k$:

$$\lim f_1 = \lim Y_1 = \text{finito}$$

$$\lim f_2 = \lim \epsilon Y_2 = \infty$$

y, como en (1), se tienen dos subcasos:

a) Consideremos la solución $X = f_1$. De 4,a) resulta $J(x) \neq 0$, lo cual, teniendo en cuenta las condiciones de contorno y la (10), trae como consecuencia que $C_1 = 0$. Los demás coeficientes son: (dejando a un lado el subíndice k):

$$A_2 = \frac{N'(ay)}{J(y) N'(ay) - J'(ay) N(y)} J(x) A_1$$

$$B_2 = -A_2 \cdot J'(ay) / N'(ay)$$

$$C_2 = i \frac{a}{\omega \epsilon_1} n \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{y_2} \right) \frac{y}{\epsilon} \frac{N(ay)}{J'(y) N(ay) - J(ay) N'(y)} J(x) A_1$$

$$D_2 = -C_2 \cdot J(ay) / N(ay)$$

El caso 2,a es análogo al 1,b: la solución es un modo que tiene la característica de ser transversal en el medio 1 y no en el 2. También aquí se encuentra una semejanza formal en el medio 1 entre estas soluciones y las de un modo magnético de una guía homogénea; y en el medio 2 tampoco hay semejanza entre estas soluciones y las de una guía coaxial metálica. Para $n = 0$, en el medio 2 el campo se hace transversal eléctrico.

b) Sea la solución $X = f_2$. De 4,a) resulta $J(x) = 0$, y con ello

$$A_1 = A_2 = B_2 = 0$$

$$C_2 = \frac{y}{\epsilon x} \cdot \frac{N(ay)}{J'(y) N(ay) - J(ay) N'(y)} J'(x) C_1$$

$$D_2 = -C_2 \cdot J(ay) / N(ay)$$

Con estos coeficientes, el campo en el medio 1 es *estrictamente* el de una onda "E" que se propaga en una guía cilíndrica homogénea de radio R_1 y de constantes $\epsilon_1 \mu$, y el campo en el medio 2 es *estrictamente* el de una onda "E" que se propaga en una guía coaxial metálica de radios R_1 y R_2 con constantes $\epsilon_2 \mu$. Es de señar

lar que la superficie de separación de los dos dieléctricos es como una superficie metálica (al menos en lo que se refiere a la estructura del campo electromagnético) para estas frecuencias particulares.

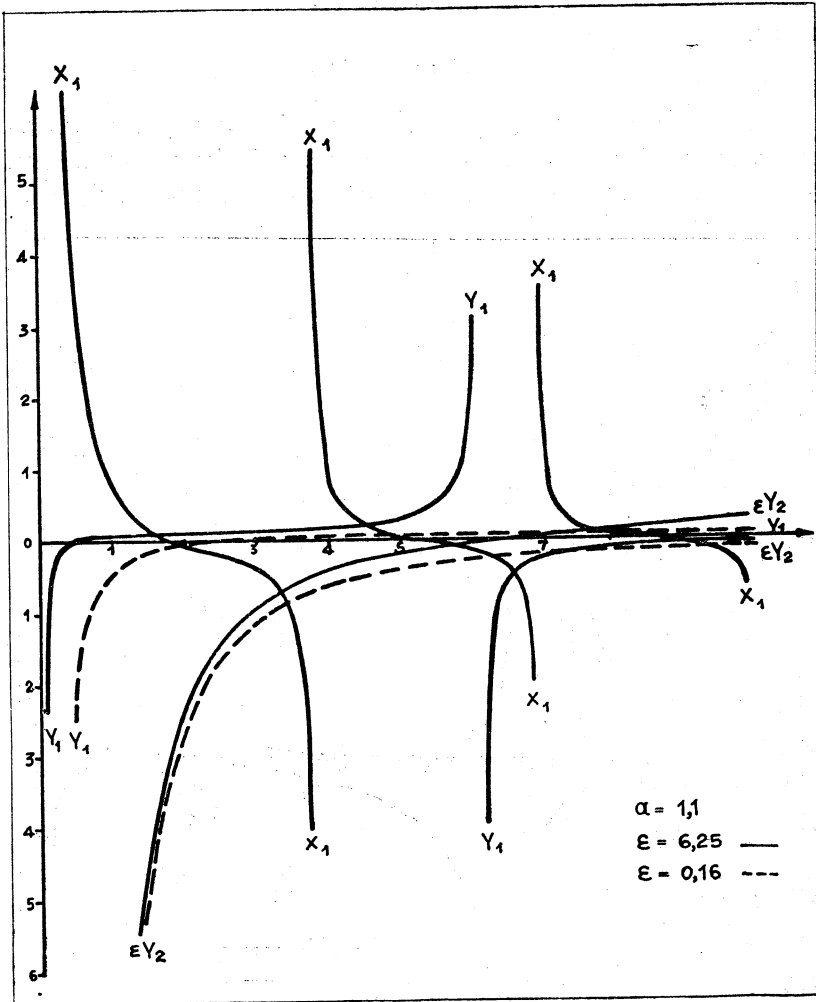


Fig. 2

4. *Las frecuencias de corte.* La frecuencia de corte de un modo es aquella a la que corresponde $\alpha = 0$, o sea $\lambda_g = \infty$; por tanto, de las (5) resulta:

$$y_c = \sqrt{\epsilon} x_c; \text{ o sea: } \frac{\epsilon}{y_c^2} - \frac{1}{x_c^2} = 0$$

que reemplazando en la (3) tiene como consecuencia que pueda verificarse

$$X(x_c) = Y_1(y_c),$$

o bien

$$X(x_c) = \epsilon Y_2(y_c)$$

La primera posibilidad tiene como soluciones pares (x_c, y_c) que corresponden a las frecuencias de corte de los modos de tipo magnético; la segunda, los correspondientes a los de tipo eléctrico.

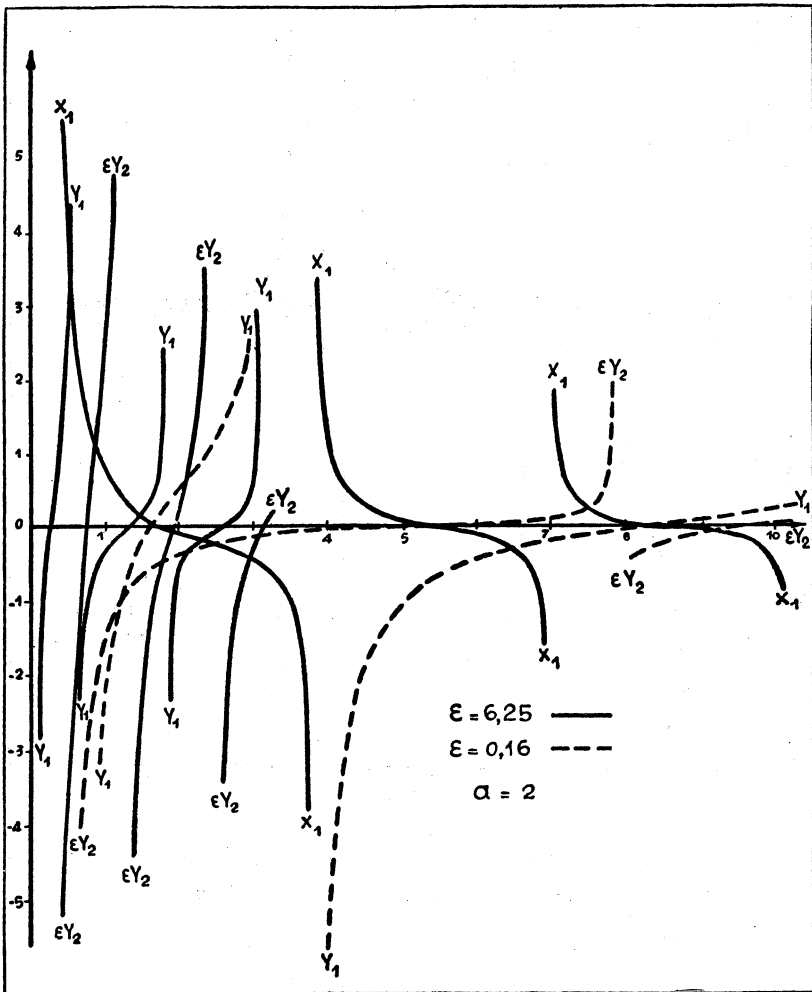


Fig. 3

5. *El cálculo numérico.* A partir de los valores de corte de cada modo y dando a y valores convenientes, se resuelven los sistemas de ecuaciones en x formados por 7,b) con $X(x) = f_1(x, y_p)$, o bien con $X(x) = f_2(x, y_p)$ (según corresponda) en donde y_p se mantiene fijo.

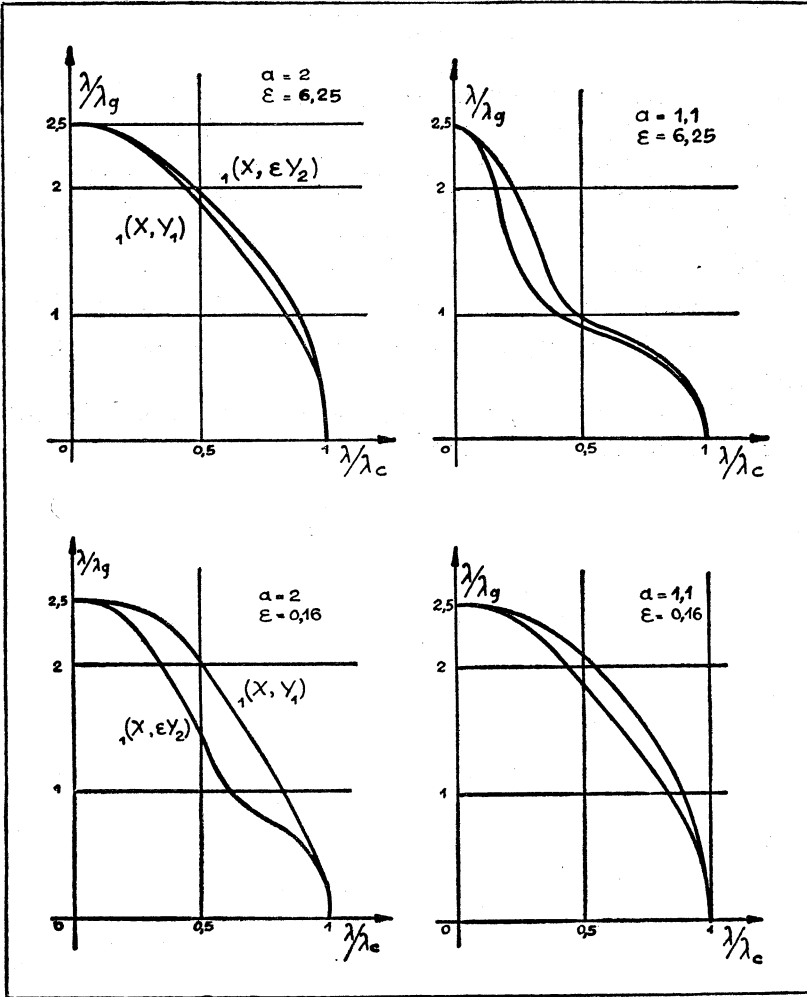


Fig. 4

Con el objeto de representar los resultados gráficamente en forma práctica, conviene tener presente que cuando se está en la frecuencia de corte la 7,b) toma la forma

$$y_c^2 - x_c^2 = R_1^2 \omega_c^2 (\epsilon_2 - \epsilon_1) \mu$$

y por cociente con la 7,b) se obtiene

$$\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2 = \frac{y_c^2 - x_c^2}{y^2 - x^2}$$

que junto con la

$$\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_g}\right)^2 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} \frac{y^2 - \epsilon x^2}{y^2 - x^2}$$

permiten construir las curvas $(\lambda_0 / \lambda_g, \lambda_0 / \lambda_c)$, que constituyen una manera práctica de disponer los resultados numéricos.

Se han calculado numéricamente los siguientes casos, todos ellos con $n=1$; 1º) $a=R_2/R_1=1,1$; $\epsilon=6,25$; 2º) $a=2$; $\epsilon=6,25$; 3º) $a=1,1$; $\epsilon=1/6,25$; 4º) $a=2$; $\epsilon=1/6,25$. Se ha elegido el valor $\epsilon=6,25$ porque corresponde a la constante dieléctrica del vidrio para frecuencias del orden de 10.000 megaciclos.

Por razones de espacio no se publican las tablas correspondientes.

Quiero señalar mi agradecimiento al Dr. José A. Balseiro por las discusiones sobre este trabajo.