TEOREMA DE KÖNIG Y AXIOMA DE ELECCION

por MAXIMO ALEJANDRO DICKMANN

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad Nacional de Buenos Aires

SUMMARY

We prove (theorem 5 of § 2) a generalization of a theorem related with the well known König theorem on sums and products of cardinals. By means of very simple examples we prove that the bounds given are the best possible; it is also proved that all of them are necessary. Next it is easily seen that our theorem implies the axiom of choice. All the proofs are elementary in nature and written in a detailed manner; the reading is so straighforward.

§ 1. INTRODUCCION

Investigamos aquí las relaciones entre un resultado (cf. § 2, teoremas 2 y 4) relacionado con el clásico teorema de König de la teoría de números cardinales y el axioma de elección. El desarrollo pertenece a un enfoque intuitivo de la teoría de conjuntos, pero esta contribución es una más de la inmensa lista de resultados que caben en el contexto de una cualquiera de las teorías axiomáticas corrientes.

Damos en § 2 (teorema 5) una versión generalizada del resultado citado; los argumentos son los corrientes en estos casos. En la parte § 3 demostramos —hecho inmediato— que nuestro teorema implica el axioma de elección. Demostramos también mediante ejemplos convenientemente elegidos que las cotas que expresan las hipótesis del teorema 5 no son mejorables, esto es, que el teorema demostrado es el más general (en el sentido de las acotaciones) relativo a las relaciones entre productos y sumas de familias arbitrarias de números cardinales. Estos ejemplos tienen la ventaja de permitirnos probar la independencia de las hipótesis —de donde sigue la necesidad de *todas* ellas— de nuestro teorema.

Este trabajo fue presentado en la reunión de la Unión Matemática Argentina realizada en Rosario el 12 de octubre de 1962.

§ 2. DEMOSTRACION DEL TEOREMA FUNDAMENTAL

El teorema de König dice (Sierpiński [1], pág. 121):

Teorema 1. —Si $\{A_n\}_{n\varepsilon N}$, $\{B_n\}_{n\varepsilon N}$ son dos familias de conjuntos tales que:

$$\overline{\overline{A_n}} < \overline{\overline{B_n}} \qquad \text{para todo } n \epsilon N$$

entonces:

$$\overline{\overline{\bigcup_{n\varepsilon N} A_n}} < \overline{\overline{\prod_{n\varepsilon N} B_n}}.$$

(N: conjunto de los números naturales)

En Sierpiński [1], pág. 123 se da también el siguiente resultado relacionado:

Teorema 2. — Si $\{A_n\}_{n\varepsilon N}$, $\{B_n\}_{n\varepsilon N}$ son dos familias de conjuntos tales que:

$$\overline{\overline{A_n}} \leqq \overline{\overline{B_n}} \qquad \text{para todo } n \epsilon N$$

y

$$\overline{\overline{B_n}} \geqq 2 \qquad \text{para todo } n \epsilon N$$

entonces:

$$\overline{\overline{\bigcup_{n\varepsilon N} A_n}} \leqq \overline{\overline{\prod_{n\varepsilon N} B_n}}.$$

Estos dos teoremas hacen uso intensivo del axioma numerable de elección. Usando el axioma de elección general, estos resultados pueden extenderse a los siguientes:

Teorema 3. — Si $\{A_\xi\}_{\xi\varepsilon Z}$, $\{B_\xi\}_{\xi\varepsilon Z}$, $Z \neq \emptyset$, son dos familias de conjuntos tales que:

$$\overline{\overline{A_\xi}} < \overline{\overline{B_\xi}} \qquad \text{para todo } \xi \epsilon Z$$

entonces:

$$\overline{\overline{\bigcup_{\xi \varepsilon Z} A_\xi}} < \overline{\overline{\prod_{\xi \varepsilon Z} B_\xi}}.$$

Teorema 4. — Si $\{A_\xi\}_{\xi \varepsilon Z}$, $\{B_\xi\}_{\xi \varepsilon Z}$, $Z \neq \emptyset$, son dos familias de conjuntos tales que:

$$\overline{\overline{A_\xi}} \leqq \overline{\overline{B_\xi}} \qquad \text{para todo } \xi \in Z$$

y

$$\overline{\overline{B_\xi}} \geqq 2 \qquad \text{para todo } \xi \in Z$$

entonces:

$$\overline{\overline{\bigcup_{\xi \varepsilon Z} A_\xi}} \leqq \overline{\overline{\prod_{\xi \varepsilon Z} B_\xi}}.$$

Vamos a dar una versión generalizada del teorema 4 (que lo implica inmediatamente) y posteriormente probaremos que es equivalente al axioma de elección.

Teorema 5. — Si $\{A_\xi\}_{\xi \varepsilon Z}$, $\{B_\xi\}_{\xi \varepsilon Z}$, $Z \neq \emptyset$, son dos familias de conjuntos tales que:

a) Existe $\alpha \in Z$ tal que $\overline{\overline{B_\alpha}} \geqq \overline{\overline{Z - J}} + 2$ donde $J = \{\xi \mid \xi \varepsilon Z \,.\, \overline{\overline{B_\xi}} \geqq 2\}$,

b) $B_\xi \neq \emptyset$ para todo $\xi \in Z$,

c) $\overline{\overline{J}} \geqq 2$, donde $J = \{\xi \mid \xi \varepsilon Z \,.\, \overline{\overline{B_\xi}} \geqq 2\}$,

d) $\overline{\overline{A_\xi}} \leqq \overline{\overline{B_\xi}}$ para todo $\xi \in Z$,

entonces:

$$\overline{\overline{\bigcup_{\xi \varepsilon Z} A_\xi}} \leqq \overline{\overline{\prod_{\xi \varepsilon Z} B_\xi}}.$$

Demostración. — A) Trataremos primeramente el caso en que $\overline{\overline{J}} \geqq 3$.

1. — Por definición de J, si $\xi \in Z - J$ es (usando de manera obvia la hipótesis b):

$$\overline{\overline{B_\xi}} = 1$$

Pero $\overline{\overline{A_\xi}} \leqq \overline{\overline{B_\xi}} = 1$ para $\xi \in Z - J$. Podemos, suprimiendo toda aparición del conjunto vacío entre los A_ξ, suponer que $\overline{\overline{A_\xi}} = 1$ para todo $\xi \in Z - J$.

2. — Por el axioma de elección aplicado dos veces, existen funciones f, g, tales que:

$$f : Z \rightarrow \bigcup_{\xi \varepsilon Z} B_\xi$$

$$g : Z \rightarrow \bigcup_{\xi \varepsilon Z} B_\xi$$

$$f(\xi) \, \varepsilon \, B_\xi \qquad \text{para todo } \xi \in Z$$

$$g(\xi) \, \varepsilon \, B_\xi \qquad \text{para todo } \xi \in Z$$

$$f(\xi) \neq g(\xi) \qquad \text{para todo } \xi \in J$$

3. — Sea $\xi_0 \in J$ y consideremos la siguiente propiedad (para funciones $h \, \varepsilon \prod_{\xi \varepsilon Z} B_\xi$):

$$[\Sigma_{\xi 0}] \quad \begin{array}{ll} h(\xi) = f(\xi) & \text{para todo } \xi \, \varepsilon \, Z - \{\xi_0\} \\ h(\xi_0) \neq f(\xi_0) & \end{array}$$

Consideremos además la función $h_{\xi 0}$ siguiente:

$$h_{\xi 0}(\xi) = g(\xi) \qquad \text{para todo } \xi \, \varepsilon \, Z - \{\xi_0\}$$

$$h_{\xi 0}(\xi_0) = f(\xi_0)$$

Definamos:

$$P_{\xi 0} = \{h \mid h \, \varepsilon \prod_{\xi \varepsilon Z} B_\xi \, . \, h \text{ cumple } [\Sigma_{\xi 0}]\} \cup \{h_{\xi 0}\}$$

3.1. — $P_{\xi 0} \subseteq \prod_{\xi \varepsilon Z} B_\xi$ para todo $\xi_0 \in J$ (por definición).

3.2. — $B_{\xi 0} \sim P_{\xi 0}$ para todo $\xi_0 \in J$.

En efecto, dado $\xi_0 \in J$, basta poner:

$$F_{\xi 0}(h) = h(\xi_0) \qquad \text{para todo } h \, \varepsilon \, P_{\xi 0}.$$

3.21. — F_{ξ_0} es biunívoca.

Si $\quad F_{\xi_0}(h) = F_{\xi_0}(h') \quad$ para $h,\ h' \varepsilon P_{\xi_0}$,

entonces:

$$h(\xi_0) = h'(\xi_0) \qquad (1)$$

a) Si $h = h_{\xi_0}, h' = h_{\xi_0}$ obviamente resulta: $h = h'$.

b) Si h cumple $[\Sigma_{\xi_0}]$ y $h' = h_{\xi_0}$, es:

$$h(\xi_0) \neq f(\xi_0)$$

$$h'(\xi_0) = f(\xi_0) \qquad \text{contra (1).}$$

c) Si h y h' cumplen $[\Sigma_{\xi_0}]$ se tiene:

$$h(\xi) = f(\xi) = h'(\xi) \text{ para todo } \xi \varepsilon Z - \{\xi_0\}$$

y como por (1): $h(\xi_0) = h'(\xi_0)$

entonces resulta: $h = h'$.

Luego F_{ξ_0} es biunívoca.

3.22. — F_{ξ_0} es sobre.

Sea $x \epsilon B_{\xi_0}$.

a) Si $x = f(\xi_0)$ es evidente que $F_{\xi_0}(h_{\xi_0}) = x$.

b) Si $x \neq f(\xi_0)$ basta definir:

$$h_1(\xi) = f(\xi) \qquad \text{para todo } \xi \varepsilon Z - \{\xi_0\}$$

$$h_1(\xi_0) = x$$

para que h_1 cumpla $[\Sigma_{\xi_0}]$ y sea: $F_{\xi_0}(h_1) = h_1(\xi_0) = x$.

3.3. — Si $\xi_0, \xi_0' \epsilon J, \xi_0 \neq \xi_0'$ entonces $P_{\xi_0} \cap P_{\xi'_0} = \emptyset$,

Supongamos, por el contrario, que exista un par $\xi_0, \xi_0' \epsilon J$, $\xi_0 \neq \xi_0'$ tal que:

$$P_{\xi_0} \cap P_{\xi'_0} \neq \emptyset.$$

y sea

$$h \varepsilon P_{\xi_0} \cap P_{\xi'_0}.$$

Tenemos entonces los siguientes tres casos de interés:

a) h cumple $[\Sigma_{\xi_0}]$ y $h = h_{\xi'_0}$.

b) $h = h_{\xi_0}$ y $h = h_{\xi'_0}$.

c) h cumple $[\Sigma_{\xi_0}]$ y $[\Sigma_{\xi'_0}]$.

a) En este caso:

$$h(\xi) = f(\xi) \qquad \text{para todo } \xi \varepsilon Z - \{\xi_0\}$$
$$h(\xi_0) \neq f(\xi_0) \qquad (\text{ya que } h \text{ cumple } [\Sigma_{\xi_0}]), \text{ y}$$
$$h(\xi) = g(\xi) \qquad \text{para todo } \xi \varepsilon Z - \{\xi'_0\}$$
$$h(\xi_0') = f(\xi_0') \qquad (\text{por ser } h = h_{\xi_0})$$

Como $\overline{\overline{J}} \geqq 3$, existe $\xi_1 \epsilon J - \{\xi_0, \xi'_0\}$. Para un tal ξ_1 se tiene:

$$h(\xi_1) = f(\xi_1) \qquad \text{pues } \xi_1 \epsilon Z - \{\xi_0\}$$
$$h(\xi_1) = g(\xi_1) \qquad \text{pues } \xi_1 \epsilon Z - \{\xi_0'\}$$

contra el hecho de que $f(\xi_1) \neq g(\xi_1)$ (ya que $\xi_1 \epsilon J$).

b) En este caso:

$$h(\xi) = g(\xi) \qquad \text{para todo } \xi \varepsilon Z - \{\xi_0\}$$
$$h(\xi_0) = f(\xi_0) \qquad (\text{por ser } h = h_{\xi_0})$$
$$h(\xi) = g(\xi) \qquad \text{para todo } \xi \varepsilon Z - \{\xi'_0\}$$
$$h(\xi_0') = f(\xi_0') \qquad (\text{por ser } h = h_{\xi'_0})$$

Como $\xi_0' \epsilon Z - \{\xi_0\}$ es:

$$h(\xi_0') = g(\xi_0')$$

contra el hecho de que: $h(\xi_0') = f(\xi_0') \neq g(\xi_0')$ (ya que $\xi_0' \epsilon J$).

c) Se tiene:

$$h(\xi) = f(\xi) \qquad \text{para todo } \xi \varepsilon Z - \{\xi_0\}$$
$$h(\xi_0) \neq f(\xi_0) \qquad (\text{pues } h \text{ cumple } [\Sigma_{\xi_0}])$$
$$h(\xi) = f(\xi) \qquad \text{para todo } \xi \varepsilon Z - \{\xi'_0\}$$
$$h(\xi_0') \neq f(\xi_0') \qquad (\text{pues } h \text{ cumple } [\Sigma_{\xi'_0}])$$

Como $\xi_0 \varepsilon Z - \{\xi'_0\}$, resulta:

$$h(\xi_0) = f(\xi_0), \text{ absurdo.}$$

4. — Definamos en $Z - J$ la siguiente relación de equivalencia:

$$\xi \equiv \xi' \text{ si y sólo si } A_\xi = A_{\xi'} \quad (\xi, \xi' \in Z - J)$$

Sea $H = Z - J / \equiv$.

4.1. — Por el axioma de elección existe una función p selectora en H, esto es, una función p tal que:

$$p: H \rightarrow \bigcup H = Z - J$$

$$p(R) \in R \qquad \text{para todo } R \in H$$

Pongamos:

$$\xi_R = p(R) \qquad \text{para todo } R \in H.$$

4.2. — Como para todo $\xi \in Z - J$ es $\overline{\overline{A_\xi}} = 1$, se tiene:

si $\xi, \xi' \in Z - J$ y $A_\xi \cap A_{\xi'} \neq \emptyset$ entonces $A_\xi = A_{\xi'}$,

de modo que si $R, R' \in H$, $R \neq R'$, resulta $A_{\xi_R} \cap A_{\xi_{R'}} = \emptyset$.

4.3. — Veamos que $\bigcup\limits_{R \in H} A_{\xi_R} = \bigcup\limits_{\xi \in Z-J} A_\xi$.

Por 4.2:

$$\bigcup_{\xi \in R} A_\xi = A_{\xi_R} \text{ para todo } R \in H.$$

Como H es una partición de $Z - J$:

$$\bigcup_{\xi \in Z-J} A_\xi = \bigcup_{R \in H} \Big(\bigcup_{\xi \in R} A_\xi\Big) = \bigcup_{R \in H} A_{\xi_R}$$

5. — Consideremos el conjunto $S = J \cup \{\xi_R | R \in H\} \subseteq Z$.

El conjunto S puede, como consecuencia del axioma de elección, bien ordenarse; sea "$\leqslant$" una relación que bien ordena S.

Definamos:

$$A'_\xi = A_\xi - \bigcup_{\substack{\xi' < \xi \\ \xi' \in S}} A_{\xi'} \qquad \text{para todo } \xi \in S.$$

5.1. — $A'_\xi \subseteq A_\xi$ para todo $\xi \in S$ (por definición de A'_ξ).

5.2. — Para todo ξ, $\xi' \in S$, $\xi \neq \xi'$, se cumple: $A'_\xi \cap A'_{\xi'} = \emptyset$.

En efecto, sea por ejemplo $\xi < \xi'$ (esto es, $\xi \leqslant \xi$ y $\xi \neq \xi'$). Luego:

$$A'_\xi \subseteq A_\xi \subseteq \bigcup_{\substack{\rho<\xi' \\ \rho\varepsilon S}} A_\rho$$

Pero por definición de $A'_{\xi'}$: $A'_{\xi'} \cap (\bigcup_{\substack{\rho<\xi' \\ \rho\varepsilon S}} A_\rho) = \emptyset$,

y como: $A'_{\xi'} \cap A'_\xi \subseteq A'_{\xi'} \cap (\bigcup_{\substack{\rho<\xi' \\ \rho\varepsilon S}} A_\rho) = \emptyset$

resulta entonces:

$$A'_{\xi'} \cap A'_\xi = \emptyset.$$

5.3. — $\bigcup_{\xi\varepsilon S} A'_\xi = \bigcup_{\xi\varepsilon Z} A_\xi$.

5.31. — $\bigcup_{\xi\varepsilon S} A'_\xi \subseteq \bigcup_{\xi\varepsilon S} A_\xi \subseteq \bigcup_{\xi\varepsilon Z} A_\xi$ (evidente).

5.32. — Sea $x \varepsilon \bigcup_{\xi\varepsilon Z} A_\xi$. Entonces existe $\xi_0 \in Z$ tal que $x \varepsilon A_{\xi_0}$.

Pueden por lo tanto presentarse los siguientes casos:

5.321. — $\xi_0 \in S$. Entonces son posibles las siguientes alternativas:

a) Para todo $\xi \in S$, $\xi \leqslant \xi_0$ es x no $\varepsilon A_\xi'$.

En particular, si $\xi^* \in S$ es el primer elemento de S, se tiene: $x \varepsilon A_{\xi*}$. Pero por la definición de los A'_ξ resulta $A'_{\xi*} = A_{\xi*}$, de modo que $x \varepsilon A'_\xi$.

b) Existe $\xi' \in S$ tal que $\xi' \leqslant \xi_0$ y x no $\varepsilon A_\xi'$.

Como $x \varepsilon A_{\xi_0}$, resulta $\xi' < \xi_0$. Sea ρ el primer elemento del conjunto $\{\xi | \xi \varepsilon S \,.\, x \varepsilon A_\xi\}$. Por la definición de ρ es obvio que:

$$x \varepsilon A_\rho - \bigcup_{\substack{\xi<\rho \\ \xi\varepsilon S}} A_\xi = A'_\rho$$

De a) y b) resulta:

si $\xi_0 \in S$ entonces $x \varepsilon \bigcup_{\xi\varepsilon S} A'_\xi$.

5.322. — $\xi_0 \in Z - S$.

En particular resulta: $\xi_0 \in Z - J$; luego existe $R \in \mathrm{H}$ tal que $\xi_0 \in R$. Pero en tal caso:

$$A_{\xi_R} = A_{\xi_0}.$$

Luego $x \in A_{\xi_R}$, y como $\xi_R \in S$, por 5.321 resulta $x \in \bigcup_{\xi \in S} A'_\xi$.

De 5.321 y 5.322 sigue:

$$\bigcup_{\xi \in Z} A_\xi \subseteq \bigcup_{\xi \in S} A'_\xi$$

De 5.31 y 5.32 se infiere 5.3.

6. — En virtud de la hipótesis d), 3.2, 3.3, 5.1, 5.2 y mediante el uso del axioma de elección resulta la existencia de una familia de conjuntos $\{P'_\xi\}_{\xi \in J}$ tal que:

$$P'_\xi \cap P'_{\xi'} = \emptyset \qquad \text{para todo } \xi, \xi' \in J,\ \xi \neq \xi'$$

$$P'_\xi \subseteq P_\xi \qquad \text{para todo } \xi \in J$$

$$A'_\xi \sim P'_\xi \qquad \text{para todo } \xi \in J$$

Nuevamente por 5.2 y el axioma de elección es:

$$\bigcup_{\xi \in J} A'_\xi \sim \bigcup_{\xi \in J} P'_\xi$$

7. — Visto que por la hipótesis a) existe $\alpha \in Z$ tal que $\overline{\overline{B}}_\alpha \geqq \overline{\overline{Z - J}} + 2$ y que por el axioma de elección $\overline{\overline{\mathrm{H}}} \leqq \overline{\overline{Z - J}}$ (por ser H una partición de $Z - J$), existe una función F tal que:

$$F : H \rightarrow B_\alpha - \{f(\alpha),\ g(\alpha)\}$$

$$F(R) \in B_\alpha - \{f(\alpha),\ g(\alpha)\} \qquad \text{para todo } R \in \mathrm{H}$$

F es biunívoca

7.1 — Es obvio que $\alpha \in J$; como $\overline{\overline{J}} \geqq 3$, es $J - \{\alpha\} \neq \emptyset$; sea $\xi_0 \in J - \{\alpha\}$. Como $J \subseteq Z$ y $\overline{\overline{J}} \geqslant 3$ resulta $Z - \{\alpha, \xi_0\} \neq \emptyset$; Luego por el axioma de elección $\prod_{\xi \in Z - \{\alpha, \xi_0\}} B_\xi \neq \emptyset$; sea $f^* \in \prod_{\xi \in Z - \{\alpha, \xi_0\}} B_\xi$.

Definamos para cada $R \in \mathrm{H}$ la siguiente función $h_R \varepsilon \prod\limits_{\xi \varepsilon Z} B_\xi$:

$$h_R(\alpha) = F(R)$$

$h_R(\xi_0) \varepsilon B_{\xi_0} - \{f(\xi_0)\}$ (caso posible pues $\xi_0 \in J$ y en consecuencia $\overline{\overline{B_{\xi_0}}} \geqq 2$)

$h_R(\xi) = f^*(\xi)$ para todo $\xi \varepsilon Z - \{\alpha, \xi_0\}$

y pongamos:

$$P'_{\xi R} = \{h_R\} \quad \text{para todo } R \in \mathrm{H}.$$

7.2. — Para todo $R \in \mathrm{H}$ y todo $\xi \in J$: $P'_{\xi R} \cap P_\xi = \emptyset$.

En efecto, si no fuera así existirían $\xi \in J$ y $R \in \mathrm{H}$ tales que $h_R \varepsilon P_\xi$.

a) Si $\xi = \alpha$, como $\xi_0 \varepsilon Z - \{\alpha\}$ y como $h_R(\xi_0) \neq f(\xi_0)$ (cf. 7.1), h_R no cumple $[\Sigma_\alpha]$. Además:

$$h_R(\alpha) = F(R) \neq f(\alpha)$$

de modo que $h_R \neq h_\alpha$; luego h_R no $\in P_\alpha$, y hemos llegado a un absurdo.

b) Si $\xi \neq \alpha$ es $\alpha \varepsilon Z - \{\xi\}$.

Como

$$h_R(\alpha) = F(R) \neq f(\alpha), \ h_R \text{ no cumple} [\Sigma_\xi].$$

Como por definición de h_R:

$$h_R(\alpha) \neq g(\alpha)$$

resulta

$$h_R \neq h_\xi$$

y nuevamente llegamos a un absurdo, visto que h_R no $\in P_\xi$.

7.3. — Para todo $R, R' \in H, R \neq R'$ *es* $h_R \neq h_{R'}$ de modo que $P'_{\xi R} \cap P'_{\xi R'} = \emptyset$

En efecto, como F es biunívoca:

$$h_R(\alpha) = F(R) \neq F(R') = h_{R'}(\alpha)$$

8. — De 6, 7.1 — 7.3 resulta la existencia de una familia $\{P'_\xi\}_{\xi \in S}$ tal que:

$$P'_\xi \cap P'_{\xi'} = \emptyset, \qquad \text{para todo } \xi, \xi' \in S, \xi \neq \xi'$$

$$A'_\xi \sim P'_\xi \qquad \text{para todo } \xi \in S$$

(ya que $\overline{\overline{A'_\xi}} = \overline{\overline{P'_\xi}} = 1$ para todo $\xi \in S - J$).

8.1. — Por el axioma de elección, 5.2 y 8:

$$\bigcup_{\xi \in S} A'_\xi \sim \bigcup_{\xi \in S} P'_\xi$$

8.2. — $$P'_\xi \subseteq \prod_{\xi \in Z} B_\xi \qquad \text{para todo } \xi \in S.$$

9. — $$\overline{\overline{\bigcup_{\xi \in Z} A_\xi}} \leqq \overline{\overline{\prod_{\xi \in Z} B_\xi}}$$

Por 5.3, 8.1 y 8.2:

$$\overline{\overline{\bigcup_{\xi \in Z} A_\xi}} = \overline{\overline{\bigcup_{\xi \in S} A'_\xi}} = \overline{\overline{\bigcup_{\xi \in S} P'_\xi}} \leqq \overline{\overline{\prod_{\xi \in Z} B_\xi}}$$

B) — Sea ahora $\overline{\overline{J}} = 2$.

10. — $\overline{\overline{Z}} < X_0$ ($X_0 =$ aleph cero); sea por ejemplo $\overline{\overline{Z}} = n$ ($n \geqq 2$, pues $J \subseteq Z$).

Luego

$$\overline{\overline{B_\alpha}} = \overline{\overline{B_1}} \geqq \overline{\overline{Z - J}} + 2 = n - 2 + 2 = n \geqq 2$$

(hipótesis a)

Como $\overline{\overline{J}} = 2$, supongamos que $\overline{\overline{B_2}} \geqq 2$. Entonces $\overline{\overline{B_i}} = 1$ para todo i, $3 \leqq i \leqq n$ (si $n = 2$ tales i no existen).

Vamos a tratar el problema por casos:

10.1. — $\overline{\overline{B_1}} \geqq X_0$, $\overline{\overline{B_2}} \geqq X_0$.

Por el axioma de elección: $\overline{\overline{B_1}} + \overline{\overline{B_2}} = \overline{\overline{B_1}} . \overline{\overline{B_2}}$

Por la hipótesis d) $: 1 \leqq \overline{\overline{A_i}} \leqq \overline{\overline{B_i}},\ 1 \leqq i \leqq n,$ de donde resulta:

$$\overline{\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}} \leqq \sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{A_i}} = \overline{\overline{A_1}} + \overline{\overline{A_2}} + n - 2 \leqq \overline{\overline{B_1}} + \overline{\overline{B_2}} + n - 2 = \overline{\overline{B_1}} + \\ + \overline{\overline{B_2}} = \overline{\overline{B_1}} \,.\, \overline{\overline{B_2}} = \overline{\overline{\prod_{i=1}^{n} B_i}}$$

10.2. — $\overline{\overline{B_1}} \geqq X_0,\ X_0 > \overline{\overline{B_2}} = r \geqq 2.$
En este caso:

$$\overline{\overline{B_1}} + \overline{\overline{B_2}} = \overline{\overline{B_1}} + r = \overline{\overline{B_1}} = \overline{\overline{B_1}} \,.\, r = \overline{\overline{B_1}} \,.\, \overline{\overline{B_2}}$$

y vale el mismo razonamiento que en 10.1.

10.3. — $X_0 > \overline{\overline{B_1}} = a \geqq n,\ X_0 > \overline{\overline{B_2}} = r \geqq 2.$

Como $a,\ b \geqq 2$ es: $\overline{\overline{B_1}} + \overline{\overline{B_2}} = a + b \leqq a \,.\, b = \overline{\overline{B_1}} \,.\, \overline{\overline{B_2}},$

y como $1 \leqq \overline{\overline{A_i}} \leqq \overline{\overline{B_i}} = 1$ para $3 \leqq i \leqq n,$ resulta:

$$\overline{\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}} \leqq \sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{A_i}} = \overline{\overline{A_1}} + \overline{\overline{A_2}} + n - 2 \leqq \overline{\overline{B_1}} + \overline{\overline{B_2}} + n - 2 = a + \\ + b + n - 2$$

Visto que $a \geqq n \geqq 2,\ b \geqq 2,$ existen $s,\ r \geqq 0$ tales que:

$$a = n + s$$
$$b = 2 + r$$

Luego:

$$a . b = (n + s) \,.\, (2 + r) = 2n + 2s + (n + s)r \geqq 2n + 2s + \\ + 2r \geqq 2n + s + r = (n - 2) + (n + s) + (r + 2) = \\ = n - 2 + a + b$$

esto es:

$$a + b + n - 2 \leqq a . b = \overline{\overline{B_1}} . \overline{\overline{B_2}} = \overline{\overline{\prod_{i=1}^{n} B_i}}$$

de donde:

$$\overline{\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}} \leqq \overline{\overline{\prod_{i=1}^{n} B_i}}$$

11. — $\overline{\overline{Z}} \geqq X_0$

Como $\overline{\overline{J}} = 2$ existen $\xi_1, \xi_2 \in Z$ tales que:

$\overline{\overline{B_{\xi_1}}} \geqq \overline{\overline{Z - J}} + 2 = \overline{\overline{Z}} + 2 = \overline{\overline{Z}} \geqq X_0$ (hipótesis a)

$\overline{\overline{B_{\xi_2}}} \geqq 2$

$\overline{\overline{B_{\xi}}} = 1$ para todo $\xi \in Z - \{\xi_1, \xi_2\}$

Por el axioma de elección resulta:

$$\overline{\overline{Z}} + \overline{\overline{B_{\xi_1}}} = \overline{\overline{B_{\xi_1}}}$$

y en consecuencia:

$$\overline{\overline{\bigcup_{\xi \in Z} A_\xi}} \leqq \overline{\overline{\bigcup_{\xi \in Z} B_\xi}} \leqq \overline{\overline{\bigcup_{\xi \in Z - \{\xi_1, \xi_2\}} B_\xi}} + \overline{\overline{B_{\xi_1}}} + \overline{\overline{B_{\xi_2}}} \leqq \overline{\overline{Z}} - 2 + \overline{\overline{B_{\xi_2}}} = \overline{\overline{Z}} +$$
$$+ \overline{\overline{B_{\xi_1}}} + \overline{\overline{B_{\xi_2}}} = \overline{\overline{B_{\xi_1}}} + \overline{\overline{B_{\xi_2}}} \leqq \overline{\overline{B_{\xi_1}}} \cdot \overline{\overline{B_{\xi_2}}} = \overline{\overline{\prod_{\xi \in Z} B_\xi}}$$

Aunque bajo la hipótesis más fuerte de que $\overline{\overline{J}} \geqq 3$ el teorema 5 continúa siendo equivalente al axioma de elección (como se puede ver claramente por una demostración análoga a la del teorema 7 parte 2), hemos agregado la segunda parte de la demostración anterior —que muestra la validez del enunciado demostrado en el caso $\overline{\overline{J}} = 2$ — con el objeto de probar que la conclusión de dicho teorema *no es válida* si alguna de las cotas que expresan las hipótesis del mismo es mejorada (esto es, si las cotas inferiores que expresan las hipótesis a) b) ó c) son disminuídas o la cota superior de alguno de los cardinales $\overline{\overline{A_\xi}}$ en la hipótesis d) es omitida). Vamos a probar esta aseveración mediante algunos ejemplos; de ellos surge que las cotas exigidas en nuestro teorema son las óptimas compatibles con la validez de la conclusión: se infiere también que las hipótesis son independientes entre sí; en consecuencia nuestro teorema es también óptimo en el sentido de que todas las hipótesis son imprescindibles.

1. — Si cambiamos la hipótesis a) por: a') $\overline{\overline{B_\alpha}} \geqq \overline{\overline{Z - J}} + 1$,

tomando

$$A_1 = B_1 = \{a, b\}, \; A_2 = B_2 = \{c, d\}, \; A_3 = B_3 = \{e\}$$

(donde a, b, c, d, e son elementos diferentes dos a dos) se tiene:

$$\overline{\overline{J}} = 2\,, \overline{\overline{Z}} = 3$$
$$\overline{\overline{B_1}} = 2$$
$$\overline{\overline{Z - J}} + 1 = 1 + 1 = 2$$

a') $\overline{\overline{B_1}} \geqq \overline{\overline{Z - J}} + 1$

b) $B_i \neq \emptyset \qquad i = 1,\ 2,\ 3$

c) $\overline{\overline{J}} = 2$

d) $\overline{\overline{A_i}} \leqq \overline{\overline{B_i}} \qquad i = 1,\ 2,\ 3$

y sin embargo:

$$\overline{\overline{\bigcup_{i=1}^{3} A_i}} = 5 > 4 = \overline{\overline{\prod_{i=1}^{3} B_i}}$$

2. — Si modificamos la hipótesis b) permitiendo que algún B_ξ pueda ser vacío, resulta evidente que $\prod_{\xi \varepsilon Z} B_\xi = \emptyset$, de modo que poniendo:

$B_1 = \emptyset$, $B_2 = \{a,\ b\}$, $B_3 = \{c,\ d,\ e\}$, $A_i = B_i\,(i = 1,\ 2,\ 3)$ (a, b, c, d, e, todos distintos), se tendría: $Z = 3$, $J = 2$

$$\overline{\overline{B_3}} = 3$$
$$\overline{\overline{Z - J}} + 2 = 1 + 2 = 3$$

a) $\overline{\overline{B_3}} \geqq \overline{\overline{Z - J}} + 2$

c) $\overline{\overline{J}} = 2$

d) $\overline{\overline{A_i}} \leqq \overline{\overline{B_i}} \qquad i = 1,\ 2,\ 3$

y:

$$\overline{\overline{\bigcup_{i=1}^{3} A_i}} = 5 > 0 = \overline{\overline{\prod_{i=1}^{3} B_i}}$$

3. — Si sustituimos la hipótesis c) por la más débil: c') $\overline{\overline{J}} \geqq 1$, tomando: $A_1 = B_1 = \{a\}$, $A_2 = B_2 = \{b,\ c,\ d,\ e\}$ (a, b, c, d, e, todos distintos), tenemos:

a) $\overline{\overline{B_2}} = 4 > 3 = \overline{\overline{Z - J}} + 2$

b) $B_i \neq \emptyset \qquad i = 1,\ 2$

c') $\overline{\overline{J}} = 1$

d) $\overline{\overline{A_i}} \leqq \overline{\overline{B_i}} \qquad i = 1,\ 2$

pero:

$$\overline{\overline{\bigcup_{i=1}^{2} A_i}} = 5 > 4 = \overline{\overline{\prod_{i=1}^{2} B_i}}$$

4. — Permitiendo, por último, la existencia de algún $\xi \in Z$ tal que $\overline{\overline{B_\xi}} < \overline{\overline{A_\xi}}$

y tomando:

$$A_1 = \{a,\ b,\ c\},\quad B_1 = \{a,\ b\},\quad A_2 = B_2 = \{d,\ e\},$$

(a — e, todos diferentes), se tiene:

a) $\overline{\overline{B_1}} = 2 \geqq 2 = \overline{\overline{Z - J}} + 2$

b) $B_i \neq \emptyset$ $\qquad i = 1, 2$

c) $\overline{\overline{J}} = 2$

y sin embargo:

$$\overline{\overline{\bigcup_{i=1}^{2} A_i}} = 5 > 4 = \overline{\overline{\prod_{i=1}^{2} B_i}}$$

Además como afirmamos al comienzo:

Teorema 6. — El teorema 5 implica el teorema 4.

Demostración. — Si $\{A_\xi\}_{\xi \in Z}$, $\{B_\xi\}_{\xi \in Z}$, $Z \neq \emptyset$ son dos familias de conjuntos tales que:

$$\overline{\overline{A_\xi}} \leqq B_\xi \quad \text{para todo } \xi \in Z \qquad (1)$$

$$\overline{\overline{B_\xi}} \geqq 2 \quad \text{para todo } \xi \in Z$$

entonces:

a) Como $Z - J = \emptyset$, la hipótesis a) surge de que $Z \neq \emptyset$ y $\overline{\overline{B_\xi}} \geqq 2$ para todo $\xi \in Z$.

b) Como $\overline{\overline{B_\xi}} \geqq 2$, es $B_\xi \neq \emptyset$ (para todo $\xi \in Z$).

c) Como en el caso $Z = J = 1$ el resultado sale trivialmente, basta analizar el caso en que se cumple c).

d) La hipótesis d) del teorema 5 se cumple por (1).

Luego, por el teorema 5:

$$\overline{\overline{\bigcup_{\xi \in Z} A_\xi}} \leqq \overline{\overline{\prod_{\xi \in Z} B_\xi}}.$$

§ 3. EL TEOREMA 5 IMPLICA EL AXIOMA DE ELECCION

Teorema 7. — El teorema 5 implica el axioma de elección.

Demostración. — Sea $\{B_\xi\}_{\xi \varepsilon Z}$, $Z \neq \emptyset$, una familia arbitraria de conjuntos no vacíos. Defínase J de la manera siguiente:

$$J = \{\xi \mid \xi \varepsilon Z \,.\, \overline{\overline{B_\xi}} \geqq 2\}$$

Tómese además $A_\xi = B_\xi$ para todo $\xi \epsilon Z$.

1. — Supongamos que $\overline{\overline{J}} \geqq 2$.

En este caso se cumplen las hipótesis b), c) y d) del teorema 5. Sea q no ϵZ (1) y x, y elementos distintos tales que x, y no $\epsilon Z - J$; definamos:

$$A_q = B_q = (Z - J) \cup \{x,\ y\}$$

Es evidente que las hipótesis b), c), d) continúan siendo válidas para la familia $\{B_\xi\}_{\xi \varepsilon Z u \{q\}}$; pero además se cumple —para esta familia— la hipótesis a) del teorema 5. Luego por dicho teorema:

$$2 \leqq \overline{\overline{\bigcup_{\xi \varepsilon Z} A_\xi}} \leqq \overline{\overline{\bigcup_{\xi \varepsilon Z \cup \{q\}} A_\xi}} \leqq \overline{\overline{\prod_{\xi \varepsilon Z \cup \{q\}} B_\xi}}$$

de donde:

$$\overline{\overline{\prod_{\xi \varepsilon Z \cup \{q\}} B_\xi}} \neq 0$$

Entonces obviamente:

$$\prod_{\xi \varepsilon Z} B_\xi \neq \emptyset,$$

---

(1) En una teoría axiomática de tipo Zermelo-Frenkel la existencia, para todo conjunto Z, de un elemento q tal que q no ϵZ es fácilmente demostrable. En cambio en el caso de una teoría del tipo Von Neumann-Bernays-Gödel es necesario pedir que Z sea una clase diferente de la clase universal V, para que esta condición se cumpla.

2. — Sea $\overline{\overline{J}} = 1$.

En este caso existe un único $\xi_1 \epsilon Z$ tal que $\overline{\overline{B_{\xi_1}}} \geqq 2$, es decir, $\overline{\overline{B_\xi}} = 1$ para todo $\xi \varepsilon Z - \{\xi_1\}$. Definamos:

$f(\xi) =$ el único elemento de B_ξ (2) si $\xi \varepsilon Z - \{\xi_1\}$

$f(\xi_1) \epsilon B_{\xi_1}$

Es evidente que f es un selector de la familia $\{B_\xi\}_{\xi \varepsilon Z}$, esto es, que $f \varepsilon \prod_{\xi \varepsilon Z} B_\xi$.

3. — Sea $\overline{\overline{J}} = 0$.

Entonces basta definir:

$f(\xi) =$ el único elemento de B_ξ (2) para todo $\xi \epsilon Z$ para obtener, como en el caso anterior un miembro de $\prod_{\xi \varepsilon Z} B_\xi$.

BIBLIOGRAFIA

[1] W. Sierpinski, *Cardinal and Ordinal Numbers*. Warszawa 1958.

(2) La definición formal de ésta función exige —en una teoría axiomática impura— la introducción del operador descriptor. En una teoría pura (esto es, sin "urelements", como en el caso de una teoría del tipo Von Neumann-Bernays-Gödel) se puede definir:

$$f(\xi) = \bigcup B_\xi = \bigcup_{a \varepsilon B_\xi} a$$