NOTAS HISTORICAS

SOBRE LA HISTORIA DE LA "FALSA POSICION"

Con el nombre de "falsa posición" o de "doble falsa posición" tradujeron algunos autores medievales ciertas reglas utilizadas por los matemáticos árabes para resolver problemas de primer grado con una incógnita; reglas que no son sino aplicaciones de la "regla de tres" a los datos del problema y un valor supuesto para la incógnita, (de ahí su nombre), en el caso de la "falsa posición" simple, o dos valores supuestos de la incógnita para el caso de la "doble falsa posición".

De paso, recordemos que también el nombre de "regla de tres" viene de Oriente, pues aparece en los escritos de matemáticos hindúes de la época medieval.

Pero en verdad, todo esto viene de lejos y aplicaciones de esas reglas y de tales métodos se encuentran en los documentos matemáticos más antiguos conocidos.

Así, en el Papiro Rhind, que probablemente tiene su origen en un escrito que debe ubicarse entre los siglos XX y XVIII a.C., aparece un problema como éste: "Una cantidad y su cuarta parte es 15". La solución egipcia empieza: "Calcula con 4 que sumado con su cuarta parte da 5", divide luego 15 por 5 y el cociente 3 multiplicado por 4 da la solución 12. Otros ejemplos son algo más complicados; por ejemplo, determinar dos números cuya suma de cuadrados sea 100 y estén entre sí como 1 es a 3/4. Parte de 1 y 3/4 cuya suma de cuadrados es 25/16, cuadrado de 5/4; estableciendo la proporcionalidad con 10, cuyo cuadrado es 100; obtiene los valores exactos de las incógnitas: 8 y 6. Otra aplicación de la falsa posición simple se encuentra en un problema de distribución de panes, uno de los más interesantes de la aritmética egipcia: Dividir 100 panes en cinco partes en progresión aritmética, de tal manera que la suma de las dos partes menores sea 1/7 de la suma de las restantes.

La solución del papiro es muy escueta pues empieza diciendo: "Toma como diferencia 5½" y con esa diferencia y primer término 1 obtiene la suma 60; aplica entonces la falsa posición y obtiene la solución correcta: 1 2/3; 10 5/6; 20; 29 1/6; 38 1/3. Claro que en este caso el interés reside en averiguar cómo se obtuvo el valor $5\frac{1}{2}$, razón entre la diferencia y el primer término, pero esto no es problema de falsa posición.

Dejando para más adelante el tratamiento de esta cuestión entre los matemáticos babilonios, encontramos en Diofanto (probablemente del s. III) otro problema interesante, donde la falsa posición se aplica como recurso final. Se trata de encontrar cuatro números tales que el cuadrado de su suma más cada uno de ellos sea un cuadrado. Para resolverlo Diofanto utiliza la propiedad de los triángulos rectángulos de catetos a, b e hipotenusa c de cumplir la condición $c^2 + 2\,ab = (a + b)^2$ e ingeniosamente encuentra cuatro triángulos de hipotenusa común c y catetos a_i, b_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Los cuatro dobles productos $2a_i\, b_i$ serían la solución del problema siempre que su suma s fuera igual a c; y es aquí donde, considerando esta solución como auxiliar; aplica el método de falsa posición, que equivale a considerar triángulos semejantes a los anteriores, cuyo factor de proporcionalidad calcula para que se cumpla la condición del problema. Es fácil ver que ese factor no es sino c/s.

Y llegamos a los árabes que son, como dijimos, los que bautizaron el método, que en la forma de falsa posición simple lo aplican como los egipcios, de manera que si la ecuación lineal, con nuestra notación, es $a\,x = b$; partiendo del valor x_1 se obtiene fácilmente $b_1 = a\,x_1$ y, por la proporcionalidad, $x = \frac{b x_1}{b_1}$. Pero cuando el enunciado lleva a las formas $ax + b = c$; $ax + bx = c$; $ax + bx + c = h$; el método es ahora de doble falsa posición: calculan para dos valores distintos x_1 y x_2 los errores y_1 e y_2, diferencias entre los valores de los dos miembros de la ecuación, y con esos cuatro valores, mediante reglas distintas según los signos de los errores, llegan al valor exacto mediante operaciones que equivalen a la expresión: $x = \dfrac{y_2 - y_1}{x_1\, y_2 - x_2 y_1}$.

Por ejemplo, sea encontrar un número que sumado a sus 2/3 y más 1, resulte 10. Se adoptan como valores $x_1 = 9$; $x_2 = 6$ (en general eligen números que eviten cálculos de fracciones) obteniéndose los errores $y_1 = 6$; $y_2 = 1$; de donde $x = 5\,\frac{2}{5}$ que es el valor buscado.

Esta regla de doble falsa posición, con el nombre de "regla de las dos posiciones" aparece en el libro de "Maistre Nicolas Chuquet parisien" de 1484: *Le Triparty en la science des nombres*, que quedó inédito hasta fines del siglo pasado, y que además de un incipiente simbolismo algebraico trae interesantes cuestiones acerca de radicales y ecuaciones cuadráticas. He aquí, resumido, un problema resuelto con las dos posiciones: Descomponer 15 en dos partes tal que la primera multiplicada por 9, sumada a la segunda por 13, dé 160. Para eso tomo 12 y obtengo 147, de ahí que para 12 resulta menos 13, para la primera posición. Tomo para la segunda 10 y obtengo 155 y por tanto para 10 resulta menos 5. Resto 5 de 13 y obtengo 8 como divisor. Multiplico 10 por 13 y 12 por 5; restándolo quedan 70, y por tanto dividiendo por 8 se obtiene la primera parte $8\,\frac{3}{4}$ y por tanto para la segunda $6\,\frac{1}{4}$.

Es claro que este método de doble falsa posición no es sino el método de interpolación lineal aplicado a la función $y = f(x)$, que da el valor exacto para la ecuación $f(x) = 0$ si ésta es lineal, y un valor aproximado en los otros casos.

Ahora bien, una de las más antiguas, si no la más antigua aplicación de la resolución de ecuaciones por interpolación lineal, se encuentra en los textos babilonios últimamente descifrados, y nada menos que en una ecuación exponencial. Se trata de encontrar el tiempo en que se duplica un capital a interés compuesto con el 20% de interés, es decir calcular x de la ecuación $1,2^x = 2$, por supuesto con números expresados en el sistema de numeración sexagesimal.

El matemático babilonio parte de los valores $x_1 = 3$; $x_2 = 4$, pues encuentra que x está entre 3 y 4 y más próximo a 4, por tanto calculando $y_1 = 1,2^3 - 2$; $y_2 = 1,2^4 - 2$ obtiene, por la fórmula de interpolación, con nuestra notación, $4 - x = \frac{1,2^4 - 2}{1,2^4 - 1,2^3} = 4 - \frac{23}{108}$ que, expresado en el sistema sexagesimal y reducido a meses, da para $x = 2{,}33{,}40$, valor que difiere del exacto en menos de 6 días.

Obsérvese que en el ejemplo elegico, como en todos los de los textos babilonios, los denominadores no contienen sino factores 2, 3, 5 a fin de que el cociente se obtenga con un número finito de fracciones sexagesimales.

Es sabido que el método de interpolación lineal significa gráficamente sustituir el arco de curva $y = f(x)$ por la cuerda que pasa por los extremos (x_1, y_1) (x_2, y_2) del arco, de manera que si $y_1 y_2 < 0$ y las dos primeras derivadas de $f(x)$ mantienen su signo en el intervalo se obtiene, por el método, un valor aproximado que satisface a la ecuación $f(x) = 0$, pudiéndose acotar el error y conocer su signo.

En este sentido un paso adelante dio Newton con el método de aproximación que lleva su nombre y que, gráficamente, consiste en sustituir el arco por la tangente en uno de sus extremos, obteniéndose un valor aproximado de sentido contrario al que se obtiene por la interpolación. Newton dio el método con el ejemplo $x^3 - 2x - 5 = 0$ partiendo del punto de abscisa 2, que aparece publicado en el *Treatise of Algebra* (1685) de Wallis, aunque estaba ya sustancialmente en *De Analyse per aequationes numero terminorum infinitas* (1666). El procedimiento empleado por Newton es algo distinto del procedimiento actual que aparece en *Analysis aequationum universalis* (1680) de Joseph Raphson (1646-1715).

En cuanto al importante perfeccionamiento del método, según el cual debe elegirse el extremo del intervalo en que $f(x)\,f''(x) > 0$, se debe a Fourier quien lo dio en *Question d'Analyse algébrique* (1818). Es curioso observar que aplicado este perfeccionamiento al ejemplo de Newton, sabiendo que $2 < x < 2,1$ debe partirse del extremo de abscisa 2, 1 y no del que abscisa 2 como hizo Newton. El conveniente ejemplo elegido por Newton lo salvó de que la tangente a la curva en el punto de abscisa 2 cortara al eje fuera del intervalo.

J. B.