SOBRE LA NATURALEZA DE LOS POTENCIALES NUCLEONICOS

por F. MOREY TERRY

Centro Atómico Bariloche — Comisión Nacional de Energía Atómica — Instituto de Física J. A. Balseiro — Universidad Nacional de Cuyo

RESUMEN: En el presente trabajo se obtiene la forma explícita de los potenciales que resultan de las teorías de relaciones de dispersión desde el doble punto de vista de teoría de campos y teoría potencial. El cálculo se efectúa para uno de los diez potenciales necesarios como exposición de los resultados y método necesario para tratar dichos potenciales. Los resultados obtenidos concuerdan con los que se puede esperar a partir de análisis fenomenológicos si se tiene en cuenta la deslocalización de las partículas al proceder a una aproximación no relativista de una teoría relativista de la interacción.

SUMARY: In the present paper, the explicit form of the potentials resulting from the theories of dispersion relations from the point of view of field theory and potential theory, is obtained. The calculations are performed for one of the ten necessary potentials as exposition of the results obtained and of the methods necessary to handle these potentials. The results obtained agree with what one may expect from phenomenologigal analysis if the spreading of the particles, when proceeding to the non relativistic limit of a relativistic theory, is taken into account.

Introducción

El problema de determinar las leyes que rigen las fuerzas internucleónicas, ocupa desde hace considerable número de años los esfuerzos de numerosos investigadores, que han utilizado a tal fin de una manera u otra los conceptos de la teoría de campos. El presente trabajo es el resultado de una serie de investigaciones llevadas a cabo utilizando el más moderno método de ataque de las relaciones de dispersión, desde el doble punto de vista de la teoría no relativista del potencial y de la representación de Mandelstam (1) a altas energías.

Se ha demostrado que las relaciones de dispersión son válidas en el caso de interacción potencial a transferencia de impulso nula y arbitraria (2). También ha sido probada la existencia de relaciones de dispersión dobles en el caso de que existan fuerzas de intercambio, cuando se supone que los potenciales son dados por superposición de potenciales de Yukawa generalizados ([3]). Por otra parte, a energías arbitrarias, Mandelstam postuló la existencia de relaciones de dispersión dobles verificadas en todos los casos por cálculo perturbativo a partir de la teoría de campos. Cuando se trata de partículas con spin y spin isotópico distinto de cero, es sabido que es necesario descomponer la amplitud de dispersión en una suma de invariantes multiplicados por funciones escalares para las cuales es posible la existencia de relaciones de dispersión ([4]). En el caso particular del sistema nucleón nucleón Amati, Leader y Vitale ([5]) han demostrado que es posible escribir relaciones de dispersión para diez funciones escalares asociadas con cinco invariantes en el espacio de configuración y spin llamados invariantes perturbativos. Para el caso bosónico, supuesta la validez de las relaciones de dispersión dobles en teoría de campos, Charap y Fubini ([6]) han demostrado que se pueden definir potenciales que describen la interacción en coincidencia con los resultados de teoría de campos a energías suficientemente bajas respecto de la energía de umbral. El autor ha demostrado que esta definición de los potenciales puede generalizarse al caso nucleón nucleón incluidas las fuerzas de intercambio ([7]). En el presente trabajo se obtiene una aproximación no relativista completa hasta el cuarto orden en 1/m. Se demuestra así que a partir de los potenciales obtenidos cuando se efectúa la transformación no relativista aparecen los potenciales de tipo spin-órbita que aparecen en la aproximación de Pauli, pero con signo contrario, o sea con el signo apropiado para reproducir resultados fenomenológicos de dispersión ([8]), que coincide con el signo requerido en el modelo nuclear de capas. Aparecen además potenciales de tipo tensorial, spin órbita-spin órbita y tensorial en impulso, cuya existencia ha sido postulada en diversas oportunidades para reproducir adecuadamente resultados experimentales de dispersión nucleón nucleón.

Aparte de estos términos aparecen sin embargo otros cuya existencia se ha tratado de dejar de lado en potenciales fenomenológicos dada la complicación que introducen el potencial resultante. Sin embargo la existencia de estos términos es inevitable y absolutamente necesaria como se explica en la sección 3.

En la sección 1, se presentan los potenciales obtenidos en I y II, se introducen los operadores necesarios para la aproximación no relativista de la ecuación de Dirac en términos de las componentes grandes de la función de ondas; la sección 2 es dedicada al cálculo de los términos que intervienen en la definición del potencial hasta el cuarto orden en 1/m y en la sección 3 se analizan los resultados obtenidos.

1. *Potenciales resultantes de la teoría de relaciones de dispersión; su inclusión en la ecuación de Dirac*

En los trabajos citados anteriormente [7] se ha demostrado que es posible definir potenciales nucleónicos a partir de relaciones de dispersión a alta energía. Los potenciales obtenidos, en número de diez, cinco directos y cinco de intercambio son, por ejemplo para la parte directa (inversa) de la interacción, de la forma

1.1 $$V(\vec{p}, \vec{\sigma}^n, \vec{\sigma}^p) = 1^n \, 1^p \, V_1 + (\gamma^n \, . \, P + \gamma^p \, . \, P) \, V_2 + \\ + \gamma^n \, . \, P \, \gamma^p \, . \, N \, V_3 + \gamma^n \, . \, \gamma^p \, V_4 + \gamma_5{}^n \, \gamma_5{}^p \, V_5$$

donde, siendo p_1, n_1 y p_2, n_2 los cuadrivectores energía impulso de las partículas antes y después de la interacción respectivamente, se define

1.2 $$P = \frac{p_1 + p_2}{2} ; \quad N = \frac{n_1 + n_2}{2} ; \quad \Delta = n_2 - n_1 = p_1 - p_2$$

Los super-índices n y p en 1.1 se refieren a que las matrices correspondientes se saturan con los espinores neutrónicos y protónicos respectivamente.

La ecuación de Dirac para el sistema de dos partículas con interacción con Hamiltoniano H_i será

1.3 $$\gamma^n \, . \, p^n + \gamma^p \, . \, p^p - 2\, m - H_i = 0$$

cuando se la escribe en forma covariante. Por lo tanto, usando las coordenadas relativa y del baricentro

$$p = \frac{\vec{p}^n - \vec{p}^p}{2} \text{ y } \vec{p}_b = \frac{\vec{p}^n + \vec{p}^p}{2} ,$$

se obtiene, eligiendo el sistema baricéntrico ($p_b = 0$):

1.3' $$(\vec{a}^n - \vec{a}^p) \, . \, \vec{p} + (\beta^n + \beta^p) \, m + V \, \beta^n \, \beta^p = E$$

Por lo tanto, el potencial actuante es de la forma

1.4 $$V = \beta^n \beta^p V_1 + (\beta^p \gamma^n \beta^n \,.\, P + \beta^n \gamma^p \beta^p \,.\, N)\, V_2 + \\ + \gamma^n \beta^n \,.\, P \gamma^p \beta^p \,.\, N\, V_3 + \gamma^n \beta^n \,.\, \gamma^p \beta^p V_4 + \gamma_5^n \beta^n \gamma_5^p \beta^p V_5$$

Introduzcamos las variables dicotómicas ρ_1 y ρ_3 definidas por

1.5 $$\vec{a} = \rho_1 \vec{\sigma} \quad \text{y} \quad \rho_3 = \beta$$

Es posible demostrar (9) que la separación de la función de ondas en componentes grandes y pequeñas se realiza a través del operador $\frac{1}{2}(\rho_3{}^n + \rho_3{}^p)$ cuyas autofunciones ${}^3\rho_1$, ${}^3\rho_0$, ${}^3\rho_{-1}$, y ${}^1\rho_0$ se construyen como es usual a partir de las autofunciones ortonormales u y v correspondientes a los autovalores más y menos 1 de la variable ρ_3. Puede por lo tanto escribirse la función de onda descompuesta en

1.6 $$\psi = {}^3f_1\, {}^3\rho_1 + {}^3f_0\, {}^3\rho_0 + {}^1f_0\, {}^1\rho_0 + {}^3f_{-1}\, {}^3\rho_{-1}$$

siendo ${}^3f_1$, ${}^3f_0$ y ${}^1f_0$ y ${}^3f_{-1}$ la componente "grande" de la función de onda, las componentes de orden $1/m$ y la de orden $(1/m)^2$, respectivamente. Introduzcamos por último el operador de proyección $P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \rho_3)$ con las propiedades

1.7 $P_+ \psi = u$, $P_- \psi = v$ para cada partícula.

y además

1.8 $$\rho_1 P_+ = \rho_-;\ \rho_1 P_- = \rho_+ \\ \rho_3 P_+ = P_+;\ \rho_3 P_- = -P_- \\ \text{con } \rho_- u = v;\ \rho_+ v = u;\ \rho_- v = 0;\ \rho_+ u = 0$$

Multiplicando la ecuación de Dirac 1.3 por $P_+{}^n P_+{}^p$ se obtiene

1.9 $$\vec{\sigma}^n \,.\, \vec{p}\, \rho_-{}^n P_+{}^p - \vec{\sigma}^p \,.\, \vec{p}\, \rho_-{}^p P_+{}^n + \frac{1}{2}(P_+{}^n P_+{}^p + P_+{}^n P_+{}^p)\, 2m + \\ + \rho_3{}^n \rho_3{}^p V P_+{}^p P_+{}^p = E P_+{}^n P_+{}^p$$

de donde teniendo en cuenta las ecuaciones 1.6 y 1.8 se obtiene

$$\vec{\sigma}^n \cdot \vec{p}\ \frac{{}^3\rho_0 - {}^1\rho_0}{\sqrt{2}}\ {}^3f_1 - \vec{\sigma}^p \cdot \vec{p}\ \frac{{}^3\rho_0 + {}^1\rho_0}{\sqrt{2}}\ {}^3f_1 + 2\,m\,{}^3\rho_1\,{}^3f_1 + V_a\,\psi -$$

1.10 $$- E\,{}^3f_1\,{}^3\rho_1 = 0$$

donde $V_a = \rho_3{}^n\,\rho_3{}^p\,V\,P_+{}^n\,P_+{}^p$

En forma similar de la misma ecuación multiplicada por $P_+{}^n\,P_-{}^p$

$$\frac{\vec{\sigma}^n \cdot \vec{p}}{\sqrt{2}}({}^3f_0\,{}^3\rho_{-1} + {}^1f_0\,{}^3\rho_{-1}) - \frac{\vec{\sigma}^p \cdot \vec{p}}{\sqrt{2}}({}^3f_0\,{}^3\rho_1 + {}^1f_0\,{}^3\rho_1) + V_b\,\psi -$$

1.11 $$- \frac{E}{\sqrt{2}}({}^3f_0\,u^n\,v^p + {}^1f_0\,u^n\,v^p) = 0$$

De multiplicar por $P_-{}^n\,P_+{}^p$

$$\frac{\vec{\sigma}^n \cdot \vec{p}}{\sqrt{2}}({}^3f_0\,{}^3\rho_1 - {}^1f_0\,{}^3\rho_1) - \frac{\vec{\sigma}^p \cdot \vec{p}}{\sqrt{2}}({}^3f_0\,{}^3\rho_{-1} - {}^1f_0\,{}^3\rho_{-1}) +$$

1.12 $$+ V_c\,\psi - \frac{E}{\sqrt{2}}({}^3f_0 - {}^1f_0)\,v^n\,u^p = 0$$

y de multiplicar por $P_-{}^n\,P_-{}^p$

$$\frac{\vec{\sigma}^n \cdot \vec{p}}{\sqrt{2}}({}^3\rho_0 + {}^1\rho_0)\,{}^3f_{-1} - \frac{\vec{\sigma}^p \cdot \vec{p}}{\sqrt{2}}({}^3\rho_0 - {}^1\rho_0)\,{}^3f_{-1} -$$

1.13 $$- 2\,m\,{}^3\rho_{-1}\,{}^3f_{-1} + V_d\,\psi - E\,{}^3\rho_{-1}\,{}^3f_{-1} = 0$$

donde se ha usado: $V_b = \rho_3{}^n\,\rho_3{}^p\,V\,P_+{}^n\,P_-{}^p$; $V_c = \rho_3{}^n\,\rho_3{}^p\,V\,P_-{}^n\,P_+{}^p$; $V_d = \rho_3{}^n\,\rho_3{}^p\,V\,P_-{}^n\,P_-{}^p$

Introduciendo la notación $a_1 = \dfrac{(\vec{\sigma}^n \pm \vec{\sigma}^p) \cdot \vec{p}}{\sqrt{2}}$ y sumando los resulta la ecuación

$$[(a_-\,{}^3f_0 - a_+\,{}^1f_0) + (2\,m - E)\,{}^3f_1]\,{}^3\rho_1 + [a_-\,({}^3f_1 +$$

1.14 $$+ {}^3f_{-1}) - E\,{}^3f_0]\,{}^3\rho_0 + [a_+\,({}^3f_{-1} - {}^3f_1) - E\,{}^1f_0]\,{}^1\rho_0 +$$

$$+ [a_-\,{}^3f_0 + a_+\,{}^1f_0 - (2\,m + E)\,{}^3f_{-1}]\,{}^3\rho_{-1} +$$

$$+ (V_a + V_b + V_c + V_d)\,\psi = 0$$

Supongamos restringirnos al potencial V como si él fuera el único actuante. Los resultados a obtenerse no serán por lo tanto completos por cuanto es necesario para una descripción completa del proceso de interacción tener en cuenta que los cinco potenciales actúan en forma simultánea y la ecuación de Schrödinger resultante no es de ninguna manera separable; sin embargo el proceso a seguir con los otros potenciales es absolutamente análogo y la actuación simultánea puede tenerse fácilmente en cuenta, como surge del método de cálculo empleado. Por otra parte los resultados cualitativos que se logran son absolutamente equivalentes. (ver sección 3). El potencial actuante a partir de V_3 es, como se dijo $\rho_3{}^n \rho_3{}^p V$, o sea

1.15 $$V = N_0^2 V_3 + V_3 \, [N_0 \, (\rho_1{}^p \vec{\sigma}^p . \vec{p} - \rho_1{}^n \vec{\sigma}^n . \vec{p}) - \\ - \rho_1{}^p \rho_1{}^n \vec{\sigma}^n . \vec{p} \, \vec{\sigma}^p . \vec{p}]$$

Una vez que el potencial 1.15 es multiplicado sucesivamente por $P_+{}^n P_+{}^p$, $P_+{}^n P_-{}^p$,$P_-{}^n$ y $P_+{}^p$ y $P_-{}^n P_-{}^p$ y sumado los resultados, se obtiene

1.16
$$(V_a + V_b + V_c + V_d) \, \psi = V_3 \, [N_0^2 \, {}^3f_1 + N_0 \, (a_+ \, {}^1f_0 - a_- \, {}^3f_0) - \\ - \vec{\sigma}^n . \vec{p} \, \vec{\sigma}^p . \vec{p} \, {}^3f_{-1}] \, {}^3\rho_1 + \\ + V_3 \, [N_0^2 \, {}^3f_0 - N_0 \, a_- \, ({}^3f_1 + {}^3f_{-1}) - \\ - \vec{\sigma}^n . \vec{p} \, \vec{\sigma}^p . \vec{p} \, {}^3f_0] \, {}^3\rho_0 + \\ + V_3 \, [N_0^{2 \, 1}f_0 + N_0 \, a_+ \, ({}^3f_1 - {}^3f_{-1}) + \\ + \vec{\sigma}^n . \vec{p} \, \vec{\sigma}^p . \vec{p} \, {}^1f_0] \, {}^1\rho_0 + \\ + V_3 \, [N_0^2 \, {}^3f_{-1} - N_0 \, (a_+ \, {}^1f_0 + a_- \, {}^3f_0) - \\ - \vec{\sigma}^n . \vec{p} \, \vec{\sigma}^p . \vec{p} \, {}^3f_1] \, {}^3\rho_{-1}$$

En las expresiones 1.15 y 1.16 se ha hecho uso de la propiedad demostrada en (II), (Fórmulas 3.1 a 3.4), de que el operador $\vec{N}$ debe ser reemplazado por p, el momento relativo del sistema de dos partículas, cuando se escriben los potenciales en el espacio de configuración. Reemplazando finalmente 1.16 en 1.14, si se tiene en cuenta la ortonormalidad de las funciones ρ, se obtiene el sistema de ecuaciones

1.17

$$(1 - N_0 V_3)\ (a_- {}^3f_0 - a_+ {}^1f_0) + N_0^2 V_3 {}^3f_1 - $$
$$- V_3 \vec{\sigma^n} \, . \, \vec{p} \, \vec{\sigma^p} \, \vec{p} \, {}^3f_{-1} = \epsilon \, {}^3f_1$$
$$(1 - N_0 V_3)\ (a_- {}^3f_0 + a_+ {}^1f_0) + (N_0^2 V_3 - E - 2\,m)\ {}^3f_{-1} -$$
$$- V_3 \vec{\sigma^n} \, . \, \vec{p} \, \vec{\sigma^p} \, . \, \vec{p} \, {}^3f_1 = 0$$
$$(1 - N_0 V_3)\ a_- \ ({}^3f_1 + {}^3f_{-1}) - (E - N_0^2 V_3)\ {}^3f_0 -$$
$$- V_3 \vec{\sigma^n} \, . \, \vec{p} \, \vec{\sigma^p} \, . \, \vec{p} \, {}^3f_0 = 0$$
$$- (1 - N_0 V_3)\ a_+ \ ({}^3f_1 - {}^3f_{-1}) - (E - N_0^2 V_3)\ {}^1f_0 +$$
$$+ V_3 \vec{\sigma^n} \, . \, \vec{p} \, \vec{\sigma^p} \, \vec{p} \, {}^1f_0 = 0$$

donde se ha usado $\epsilon = E - 2\,m$. Este sistema de ecuaciones permite efectuar la aproximación no relativista de la ecuación de Dirac, exacta hasta cualquier orden en p/m. Los potenciales de naturaleza distinta que pueden obtenerse a partir de los potenciales 1.4 pueden ser de tipo central, spin-órbita, tensorial, spin órbita-spin órbita y tensorial en impulso. Se ha demostrado ([7]) que todas estas formas de potencial aparecen dentro de la aproximación $(p/m)^4$. Hasta este orden interesa por lo tanto realizar la aproximación no relativista en forma exacta.

2. *Aproximación no relativista de la ecuación de Dirac*

De las ecuaciones 1.17 se obtiene

2.1

$$ {}^3f_0 = (E - N_0^2 V_3 + V_3 \sigma)^{-1} \ (1 - N_0 V_3)\ a_- \ ({}^3f_1 + {}^3f_{-1}) = $$
$$ = \phi^{-1} \ (1 - N_0 V_3)\ a_- \ ({}^3f_1 + {}^3f_{-1}) $$
$$ {}^1f_0 = - \ (E - N_0^2 V_3 - V_3 \sigma)^{-1} (1 - N_0 V_3)\ a_+ \ ({}^3f_1 - {}^3f_{1-}) = $$
$$ = - \ \theta^{-1} \ (1 - N_0 V_3)\ a_+ \ ({}^3f_1 - {}^3f_{-1}) $$
$$ {}^3f_{-1} = (E + 2\,m - N_0^2 \mathrm{V}_3)^{-1} $$
$$ \{ (1 - N_0 V_3)\ [a_- \ \phi^{-1} \ (1 - N_0 V_3)\ a_- - $$
$$ a_+ \theta^{-1} \ (1 - N_0 V_3)\ a_+] - V_3 \sigma \ \{ {}^3f_1 + $$
$$ + (E + 2\,m - N_0^2 V_3)^{-1} \ (1 - N_0 V_3)\ [a_- \ \phi^{-1} \ (1 - N_0 V_3)\ a_- + $$
$$ a_+ \ \theta^{-1} \ (1 - N_0 V_3)\ a_+] \ (E + 2\,m - N_0^2 V_3)^{-1}. $$
$$.[a_- \ \phi^{-1} \ (1 - N_0 V_3)\ a_- - a_+ \ \theta^{-1} \ (1 - N_0 V_3)\ a_+] \ {}^3f_1 $$

donde es obvio el significado de las funciones θ, ϕ y σ.

Por lo tanto el límite no relativista de nuestra ecuación, exacto hasta el cuarto orden en p/m es

2.2

$$
\begin{aligned}
&(1 - N_0 V_3)\,[a_- \phi^{-1} (1 - N_0 V_3)\, a_- + \\
&\qquad\qquad + a_+ \theta^{-1} (1 - N_0 V_3)\, a_+]\, {}^3f_1 + \\
&+ (1 - N_0 V_3)\,[a_- \phi^{-1} (1 - N_0 V_3)\, a_- - \\
&\qquad\qquad - a_+ \theta^{-1} (1 - N_0 V_3)\, a_+]\,(E + 2\,m - N_0^a V_3)^- \\
&\{ (1 - N_0 V_3)\,[a_- \phi^{-1} (1 - N_0 V_3)\, a_- - \\
&\qquad\qquad - a_+ \theta^{-1} (1 - N_0 V_3)\, a_+] - V_3 \sigma \}\, {}^3f_1 - \\
&- V_3 \sigma\, (E + 2\,m - N_0 V_3)^{-1} \{ (1 - N_0 V_3)\,[a_- \phi^{-1} (1 - N_0 V_3)\, a_- \\
&\qquad\qquad - a_+ \theta^{-1} (1 - N_0 V_3\, a_+] \}\, {}^3f_1 = (\epsilon - N_0^2 V_3)\, {}^3f_1
\end{aligned}
$$

Introduzcamos el nuevo potencial $V = N_0^2 V_3$, y comencemos por considerar el primer término del miembro de la izquierda, A:

2.3

$$
\begin{aligned}
A = {} & a_- \phi^{-1} a_- + a_+ \theta^{-1} a_+ - \frac{V}{N_0}(a_- \phi^{-1} a_- + \imath_+ \theta^{-1} a_+) - \\
& - (a_- \phi^{-1} \frac{N_0}{V} a_- + a_+ \theta^{-1} \frac{V}{N_0} a_+) + \frac{V}{N_0}(a_- \phi^{-1} \frac{V}{N_0} a_- + \\
& \qquad + a_+ \theta^{-1} \frac{V}{N_0} a_+)
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta que puede expresarse

2.4

$$
\frac{1}{N_0} = \frac{1}{m} - \frac{p^2}{2\,m^3} + \ldots\ldots
$$

$$
\begin{aligned}
\phi^{-1} &= \frac{1}{2\,m}\left(1 + \frac{\epsilon - V + V\sigma/N_0^2}{2\,m}\right)^{-1} = \\
&= \frac{1}{2\,m}\left(1 - \frac{\epsilon - V}{2\,m} - \frac{V\sigma}{2\,m\,N_0^2} + \left(\frac{\epsilon - V}{2\,m}\right)^2 + \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\theta^{-1} = \frac{1}{2\,m}\left(1 - \frac{\epsilon - V}{2\,m} + \frac{V\sigma}{2\,m\,N_0^2} + \left(\frac{\epsilon - V}{2\,m}\right)^2 + \ldots \right)
$$

se obtiene

2.5

$$A = \frac{1}{2m}(a_- a_- + a_+ a_+) - \frac{\epsilon}{4m^2}(a_- a_- + a_+ a_+) +$$
$$+ \frac{1}{4m^2}(a_- V a_- + a_+ V a_+) + \frac{1}{8m^3}[a_- (\epsilon - V)^2 a_- +$$
$$+ a_+ (\epsilon - V)^2 a_+] - \frac{1}{4m^4}(a_- V \sigma a_- - a_+ V \sigma a_+)$$
$$- \frac{V}{2m^2}(a_- a_- + a_+ a_+) + \frac{\epsilon V}{4m^3}(a_- a_- + a_+ a_+) +$$
$$+ \frac{V p^2}{4m^4}(a_- a_- + a_+ a_+) - \frac{V}{4m^3}(a_- V a_- + a_+ V a_+) -$$
$$- \frac{1}{2m^2}(a_- V a_- + a_+ V a_+) + \frac{\epsilon}{4m^3}(a_- V a_- + a_+ V a_+) +$$
$$+ \frac{p^2}{4m^4}(a_- V a_- + a_+ V a_+) - \frac{1}{4m^3}(a_- V^2 a_- + a_+ V^2 a_+).$$
$$+ \frac{V}{2m^3}(a_- V a_- + a_+ V a_+) - \frac{V \epsilon}{4m^4}(a_- V a_- + a_+ V a_+) +$$
$$+ \frac{V}{4m^4}(a_- V^2 \; _- + a_+ V a_+)$$

de donde, teniendo en cuenta que hasta el segundo orden

2.6

$$\epsilon - V = \frac{p^2}{m} + \frac{i}{2m^2}\frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta r} V \vec{r}.\vec{p} - \frac{1}{2m^2}\frac{1}{r}\frac{\delta V}{\delta r}\vec{S}.\vec{L} -$$
$$- \frac{2Vp^2}{m^2} = \frac{p^2}{m} - \frac{2Vp^2}{m^2} + \frac{i}{2m^2}\delta V \vec{r}.\vec{p} - \frac{1}{2m^2}\delta V \vec{S}.\vec{L}$$

se puede reducir la expresión 2.5 a

2.7

$$A = \frac{p^2}{m} - \frac{2Vp^2}{m^2} - \frac{p^4}{2m^3} + \frac{V^2 p^2}{m^3} + \frac{7}{2}\frac{Vp^4}{m^4} + \frac{i}{2m^2}\delta V \vec{r}.\vec{p} -$$
$$- \frac{1}{2m^2}\delta V \vec{S}.\vec{L} - \frac{5}{4m^4}\delta V \vec{r}.\vec{p}\, p^2 + \frac{5}{4m^4}\delta V \vec{S}.\vec{L}\, p^2 -$$
$$- \frac{i V^2}{2m^4}\delta V \vec{r}.\vec{p}\, p^2 + \frac{V^2}{2m^2}\delta V \vec{S}.\vec{L}\, p^2$$

Tomemos ahora en consideración el segundo y tercer términos del miembro izquierdo de la expresión 2.2, llamando a su suma B, puede escribirse:

2.8

$$B = \frac{1}{4m}(a_- \phi^{-1} a_- - a_+ \theta^{-1} a_+)(a_- \phi^{-1} a_- - a_+ \theta^{-1} a_+)$$

$$\left(1 - \frac{\epsilon}{4m}\right) + \frac{1}{4m}(a_- \phi^{-1} a_- - a_+ \theta^{-1} a_+)\frac{V}{4m}$$

$$(a_- \phi^{-1} a_- - a_+ \theta^{-1} a_+) -$$

$$- \frac{V}{m}\frac{1}{4m}(a_- \phi^{-1} a_- - a_+ \theta^{-1} a_+)(a_- \phi^{-1} a_- - a_+ \theta^{-1} a_+) -$$

$$- \frac{1}{4m}(a_- \phi^{-1} a_- - a_+ \theta^{-1} a_+)\frac{V}{m}(a_- \phi^{-1} a_- - a_+ \theta^{-1} a_+) -$$

$$- \frac{1}{4m}(a_- \phi^{-1}\frac{V}{m} a_- - a_+ \theta^{-1}\frac{V}{m} a_+)(a_- \phi^{-1} a_- - a_+ \theta^{-1} a_+) -$$

$$- \frac{1}{4m}(a_- \phi^{-1} a_- - a_+ \theta^{-1} a_+)(a_- \phi^{-1}\frac{V}{m} a_- - a_+ \theta^{-1}\frac{V}{m} a_+) -$$

$$- \frac{1}{4m}(a_- \phi^{-1} a_- - a_+ \theta^{-1} a_+)\frac{V}{m^2}\sigma - \frac{1}{4m}\frac{V}{m^2}$$

$$\sigma(a_- \phi^{-1} a_- - a_+ \theta^{-1} a_+) = a + b + c + d + e + f + g + h$$

donde se ha usado $(\mathrm{E} + 2m - N_0^2 V_3)^{-1} = \frac{1}{4m}\left(1 - \frac{\epsilon - V}{4m} \ldots\right)$

Si consideramos la suma de los términos d y g de esta expresión, siendo

2.9

$$d = - \frac{1}{16m^4}(a_- a_- - a_+ a_+) V (a_- a_- - a_+ a_+) =$$

$$- \frac{1}{4m^4}\vec{\sigma^n}\cdot\vec{p}\,\vec{\sigma^p}\cdot\vec{p}\; V\,\vec{\sigma^n}\cdot\vec{p}\,\vec{\sigma^p}\cdot\vec{p}$$

2.9 y:

$$g = -\frac{1}{8\,m^4}(a_-\,a_- - a_+\,a_+)\;V\,\vec{\sigma}^n\,.\,\vec{p}\;\vec{\sigma}^p\,.\,\vec{p} =$$

$$\frac{1}{4\,m^4}\,\vec{\sigma}^n\,.\,\vec{p}\;\vec{\sigma}^p\,.\,\vec{p}\;V\;\vec{\sigma}^n\,.\,\vec{p}\;\vec{\sigma}^p\,.\,\vec{p}$$

la misma es nula. De la misma manera, con

$$c = -\frac{V}{16\,m^4}(a_-\,a_- - a_+\,a_+)\;(a_-\,a_- - a_+\,a_+) = -\frac{V\,p^4}{4\,m^4}$$

2.10 y

$$h = -\frac{V}{8\,m^4}\,\vec{\sigma}^n\,.\,\vec{p}\;\vec{\sigma}^p\,.\,\vec{p}\;(-2\,\vec{\sigma}^n\,.\,\vec{p}\;\vec{\sigma}^p\,.\,\vec{p}) = \frac{V\,p^4}{4\,m^4}$$

la suma de c más h es nula. El término B queda entonces reducido a

2.11

$$\mathrm{B} = a + b + e + f = \frac{p^4}{4\,m^3} - \frac{5\,\epsilon\,p^4}{16\,m^4} - \frac{1}{32\,m^4}\,[(a_-\,V\,a_- - a_+\,V\,a_+)$$
$$(a_-\,a_- - a_+\,a_+) + (a_-\,a_- - a_+\,a_+)\;(a_-\,Va_- - a_+\,Va_+) -$$
$$-\,(a_-\,a_- - a_+\,a_+)\,\frac{V}{2}\,(a_-\,a_- - a_+\,a_+)]$$

En el apéndice se demuestra que

2.12a

$$(a_-\,a_- - a_+\,a_+)\,\frac{V}{2}\,(a_-\,a_- - a_+\,a_+) = 2\,V\,p^4 - 4\,i\,\delta\,V\,\vec{r}.\,\vec{p}\;p^2 +$$
$$+\,4\,\delta\,V\,\vec{S}.\,\vec{L}\;p^2 - 2\,\delta\,V\,p^2 - 2\,\delta^2\,V\,(\vec{r}.\,\vec{p})^2 -$$
$$-\,2\,\delta V\,(\vec{\sigma}^n.\vec{p}\;\vec{\sigma}^p.\,\vec{p} - p^2\,\vec{\sigma}^n.\,\vec{\sigma}^p) - 4\,i\,\delta^2\,V\,\vec{S}.\vec{L}\;\vec{r}.\vec{p} +$$
$$+\,2\,\delta^2\,V\,\vec{\sigma}^n.\vec{L}\;\vec{\sigma}^p.L$$

2.12 b

$$(a_-\,V\,a_- - a_+\,V\,a_+)\,(a_-\,a_- - a_+\,a_+) = 4\,V\,p^2 -$$
$$-\,4\,i\,\delta\,V\,\vec{r}.\vec{p}\;p^2 + 4\,\delta\,V\,\vec{S}.\vec{L}\;p^2$$

2.12 c

$$(a_- a_- - a_+ a_+)(a_- V a_- - a_+ V a_+) = 4 V p^2 - 12 i \delta V \vec{r}.\vec{p} p^2 + $$
$$+ 4 \delta V \vec{S}.\vec{L} p^2 - 20 \delta V p^2 - 4 \delta^2 V [r^2 p^2 + 2 (\vec{r}.\vec{p})^2] -$$
$$- 8 i \delta^2 V \vec{S}.\vec{L} \vec{r}.\vec{p} + 2 0 i \delta^2 V \vec{r}.\vec{p} -$$
$$- 2 0 \delta^2 V \vec{S}.\vec{L} + 4 i \delta^3 V \vec{r}.\vec{p} - 4\delta^3 V \vec{S}.\vec{L}$$

Por lo tanto, sumando las expresiones 2.7 y 2.11 teniendo en cuenta 2.12 a, b, c. se obtiene

2.13

$$\frac{p^2}{m} - \frac{p^4}{4 m^3} + \left\{ 1 - \frac{2 p^2}{m^2} + \frac{V p^2}{m^3} + \frac{3 p^4}{m^4} + \frac{i}{2 m^2} \vec{r}.\vec{p} \delta - \right.$$
$$- \frac{i}{2 m^4} \vec{r}.\vec{p} \delta - \frac{i}{2 m^4} V^2 \vec{r}.\vec{p} \delta - \frac{i}{2 m^4} \vec{r}.\vec{p} p^2 \delta +$$
$$+ \frac{1}{16 m^4} [(- 6 i \vec{r}.\vec{p} p^2 + 9 p^2) \delta + (2 r^2 p^2 + 3 (\vec{r}.\vec{p})^2 -$$
$$\left. - 10 i (\vec{r}.\vec{p})) \delta^2 - 2 i r^2 \vec{r}.\vec{p} \delta^3] \right\} V +$$
$$+ \left\{ \frac{-1}{2 m^2} \delta + \frac{1}{2 m^4} V^2 p^2 \delta + \frac{1}{2 m^4} p^2 \delta + \frac{1}{16 m^4} [10 p^2 \delta + \right.$$
$$\left. + (2 i \vec{r}.\vec{p} + 10) \delta^2 + 2\delta^3 \right\} V \vec{S}.\vec{L} -$$
$$- \frac{1}{16 m^4} \delta V (\vec{\sigma}^n.\vec{p}\, \vec{\sigma}^p.\vec{p} - \vec{\sigma}^n.\vec{\sigma}^p p^2) +$$
$$+ \frac{1}{16 m^4} \delta^2 V \vec{\sigma}^n.\vec{L} \delta^2 V \sigma^n.L \vec{\sigma}^p.\vec{L} = \epsilon$$

3. *Análisis del potencial obtenido*

Se observa que el potencial resultante de 2.13, dado por todos los términos de la misma excepto los 2 primeros, presenta como se dijo en la introducción, términos de tipo central, spin órbita, spin

spin órbita-spin órbita, tensorial y tensorial en el impulso; la dependencia de cada uno de ellos en p/m es la apropiada desde el punto de vista de los potenciales fenomenológicos. Se observa sin embargo la contribución de otros términos explícitamente dependientes del impulso los cuales tienen en cuenta, a través del operador $-i\vec{\nabla}$ correspondiente al impulso la difusión de la partícula al realizar la operación de límite no relativista; en efecto al realizar este límite, el operador de posición x a alta energía es reemplazado por el operador $x' = a^{is}\, x\, e^{-is}$, donde S es el operador de Foldy y Wouthuysen (10) correspondiente a la transformación efectuada, que implica una deslocalización de la partícula al pasar de energías arbitrarias a energías no relativistas. Los resultados obtenidos por el método de cálculo empleado son equivalentes a los que se hubieran obtenido por el método de Foldy y Wouthuysen debido a que se trata de la aproximación no relativista de la ecuación de Dirac en ausencia de campos exteriores, caso en el que aparecen términos no hermitianos en la aproximación.

Un potencial dependiente del impulso de esta naturaleza no es por supuesto muy sencillo de manejar, menos aún recordando que éste potencial no es sino uno de los cinco potenciales cuya acción es necesario considerar en forma simultánea para describir la parte directa (o intercambio) de las fuerzas nucleares; la intuitividad y practicidad de manejo de las fuerzas a través del concepto de potencial pierde en gran medida su significado. No obstante, no deja de ser sumamente útil e importante la determinación explícita de las funciones V. Por un lado esto permitiría la determinación de la exactitud de las teorías de las relaciones de dispersión, hasta ahora asentadas sobre bases heurísticas por cuanto estos potenciales deben permitir reproducir y predecir resultados experimentales de interacción nucleónica.

Por otra parte, tal como se puntualiza en II, conocidos los potenciales y por lo tanto las amplitudes de "scattering", significa conocer las funciones que son las fuentes de las fuerzas para los procesos cruzados de la representación de Mandelstam y por lo tanto permite predicción de resultados experimentales en la zona menos explorada de interacción nucleón antinucleón.

APENDICE

Puede escribirse la ecuación 2.12 b como

A.1

$$(a_- V a_- - a_+ V a_+)(a_- a_- - a_+ a_+) = 2(\vec{\sigma}^n.\vec{p}\, V\, \vec{\sigma}^p.\vec{p} +$$
$$+ \vec{\sigma}^n.\vec{p}\, V\, \vec{\sigma}^n.\vec{p})\, \vec{\sigma}^n.\vec{p}\, \vec{\sigma}^p.\vec{p} = 4\, V\, \vec{\sigma}^n.\vec{p}\, \vec{\sigma}^n.\vec{p}\, \vec{\sigma}^p.\vec{p}\, \vec{\sigma}^p.\vec{p} -$$
$$- 2\, i\, \delta\, V\, \vec{\sigma}^n.\vec{r}\, \vec{\sigma}^p.\vec{p}\, \vec{\sigma}^n.\vec{p}\, \vec{\sigma}^p.\vec{p} - 2\, i\, \delta\, V\, \vec{\sigma}^n.\vec{r}\, \vec{\sigma}^n.\vec{p}\, \vec{\sigma}^n.\vec{p}\, \vec{\sigma}^p.\vec{p} =$$
$$= 4\, V\, p^4 - 4\, i\, \delta\, V\, \vec{r}.\vec{p}\, p^2 + 4\, \delta\, V\, \vec{S}.\vec{L}.\, p^2.$$

Por otra parte 2.12 a:

A.2

$$(a_- a_- - a_+ a_+)\frac{V}{2}(a_- a_- - a_+ a_+) = (-2\, i\, \vec{\sigma}^n.\vec{p}\, \delta\, V\, \vec{\sigma}^n.\vec{r} +$$
$$+ 2\, \vec{\sigma}^n.\vec{p}\, V\, \vec{\sigma}^p.\vec{p})\, \vec{\sigma}^n.\vec{p}\, \vec{\sigma}^p.\vec{p} = -2\, \delta^2\, V\, \vec{\sigma}^n.\vec{r}\, \vec{\sigma}^p.\vec{r}\, \vec{\sigma}^n.\vec{p}\, \vec{\sigma}^p.\vec{p} -$$
$$- 2\, \delta\, V\, \vec{\sigma}^n.\vec{\sigma}^p\, \vec{\sigma}^n.\vec{p}\, \vec{\sigma}^p.\vec{p} - 2\, i\, \delta\, V\, \vec{\sigma}^n.\vec{p}\, \vec{\sigma}^p.\vec{r}\, \vec{\sigma}^n.\vec{p}\, \vec{\sigma}^p.\vec{p} -$$
$$- 2\, i\, \delta\, V\, \vec{\sigma}^n.\vec{r}\, \vec{\sigma}^p.\vec{p}\, \vec{\sigma}^n.\vec{p}\, \vec{\sigma}^p.\vec{p} + 2\, V\, \vec{\sigma}^n.\vec{p}\, \vec{\sigma}^p.\vec{p}\, \vec{\sigma}^n.\vec{p}\, \vec{\sigma}^p.\vec{p} =$$
$$= 2\, V\, p^4 - 4\, i\, \delta\, V\, \vec{r}.\vec{p}\, p^2 + 4\, \delta\, V\, \vec{S}.\vec{L}\, p^2 -$$
$$- 2\, \delta\, V\, (\vec{p} - i\, \vec{\sigma}^n \times \vec{p})\, .\, (\vec{p} - i\, \vec{\sigma}^p \times \vec{p}) -$$
$$- 2\, \delta^2\, V\, (\vec{r}.\vec{p} + i\, \vec{\sigma}^n.\vec{L})\, (\vec{r}.\vec{p} + i\, \vec{\sigma}^p.\vec{L})$$

Por último para 2.12 c:

A.3

$$(a_- a_- - a_+ a_+)(a_- V a_- - a_+ V a_+) =$$
$$-2\, \vec{\sigma}^n\, .\, \vec{p}\, \vec{\sigma}^p\, .\, \vec{p}\, [-2\, V\, \vec{\sigma}^n.\vec{p}\, \vec{\sigma}^p.\vec{p} + i\, \delta\, V\, (\vec{\sigma}^n.\vec{r}\, \vec{\sigma}^p.\vec{p} + \vec{\sigma}^j.\vec{r}\, \vec{\sigma}^n.\vec{p})] =$$
$$= -2\, \vec{\sigma}^n\, .\, \vec{p}\, \sigma_\beta{}^p\, [-2\, V\, p_\beta\, \vec{\sigma}^n\, .\, \vec{p}\, \vec{\sigma}^p\, .\, \vec{p} + 2\, i\, \delta\, V\, x_\beta\, \vec{\sigma}^n\, .\, \vec{p}\, \vec{\sigma}^p\, .\, \vec{p} +$$
$$+ i\, \delta\, V\, (\vec{\sigma}^n.\vec{r}\, \vec{\sigma}^p.\vec{p} + \vec{\sigma}^p\, .\, \vec{r}\, \vec{\sigma}^n\, .\, \vec{p})\, p_\beta + \delta^2\, V\, x_\beta\, (\vec{\sigma}^n\, .\, \vec{r}\, \vec{\sigma}^p\, \vec{p} +$$
$$+ \vec{\sigma}^p\, .\, \vec{r}\, \vec{\sigma}^n\, .\, \vec{p}) + \delta\, V\, (\sigma_\beta{}^n\, \vec{\sigma}^p\, .\, \vec{p} + \sigma_\beta{}^p\, \vec{\sigma}^n\, .\, \vec{p})]$$

de donde resulta

A.4

$$(a_- a_- - a_+ a_+)(a_- V a_- - a_+ V a_+) = -2\, \sigma_\alpha^n \sigma_\beta^p$$

$$\{2\,[i\,\delta\, V x\alpha\, p\rho - V p\alpha\, p_\beta - V p_\alpha\, p_\beta + \delta\, V\, \delta_{\alpha\beta} + \delta\, V^2 x\alpha\, x\beta +$$

$$+ i\,\delta\, V\, x_\beta\, p_\alpha]\, \vec{\sigma}^n . \vec{p}\, \vec{\sigma}^p . \vec{p} + \delta\, V\, (\sigma_\alpha^n\, \vec{\sigma}^p . \vec{p} + \sigma_\alpha^p \vec{\sigma}^n . \vec{p})\, p_\beta +$$

$$+ \delta^2 V\, (\vec{\sigma}^n . \vec{r}\, \vec{\sigma}^p . \vec{p} + \vec{\sigma}^p . \vec{r}\, \vec{\sigma}^n . \vec{p})\, x_\alpha\, p_\beta +$$

$$+ i\,\delta\, V\, (\vec{\sigma}^n . \vec{r}\, \vec{\sigma}^p . \vec{p} + \vec{\sigma}^p . \vec{r}\, \vec{\sigma}^n . \vec{p})\, p_\alpha\, p_\beta +$$

$$+ (x_\beta\, \delta^2 V\, p_\alpha - i\, \delta_{\alpha\beta}\, \delta^2 V - i\, x_\alpha\, x_\beta\, \delta^3 V) .$$

$$. (\vec{\sigma}^n . \vec{r}\, \vec{\sigma}^p . \vec{p} + \vec{\sigma}^p . \vec{r}\, \vec{\sigma}^n . \vec{p}) -$$

$$- i\, \delta^2 V\, x_\beta\, (\sigma_\alpha^n\, \vec{\sigma}^p . \vec{p} + \sigma_\alpha^p\, \vec{\sigma}^n . \vec{p}) +$$

$$+ (\delta\, V\, p_\alpha - i\, x_\alpha\, \delta^2 V)\, (\sigma_\beta^n\, \vec{\sigma}^p . \vec{p} + \sigma_\beta^p\, \vec{\sigma}^n . \vec{p})$$

Sumando y ordenando términos se obtiene de inmediato 2.12 c, cuando se tiene en cuenta las relaciones

A.5

$$\vec{\sigma} . \vec{r}\, \vec{\sigma} . \vec{p} = \vec{r} . \vec{p} + i\, \vec{\sigma} . \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{\sigma} . \vec{p}\, \vec{\sigma} . \vec{r} = \vec{r} . \vec{p} - i\, \vec{\sigma} . \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{\sigma} . \vec{a}\, \vec{\sigma} = \vec{a} + i\, \vec{\sigma} \times \vec{a}$$

$$\vec{\sigma}\, \vec{\sigma} . \vec{b} = \vec{b} - i\, \vec{\sigma} \times \vec{b}$$

$$\vec{\sigma}^n \times \vec{p} . \vec{\sigma}^p \times \vec{p} = \vec{\sigma}^n . \vec{\sigma}^p\, p^2 - \vec{\sigma}^n . \vec{p}\, \vec{\sigma}^p . \vec{p}$$

REFERENCIAS

1. S. Mandelstam: *Phys. Review*, 112, 1344 (1958).
2. N. Khuri: *Phys. Review*, 107, 1148 (1957).
3. J. Bowcock and A. Martin: *Nuovo Cimento*, 14, 516, (1959).
4. G. F. Chew: "Double dispersion relations and unitarity as the basis for a dynamical theory for strong interactions". *Lawrence Radiation Lab. Report*, UCRL 9289, junio 1960.
5. Amati, Leader and Vitale, *Nuovo Cimento* 17, 68 (1960), idem 18, 409, (1960).

6. J. M. CHARAP, S. P. FUBINI: *Nuovo Cimento*, 14, 540 (1959), idem, 18, 73 (1960).
7. F. MOREY TERRY: *Nuovo Cimento*, 24, 585, 1962, *Nuovo Cimento*, 26, 525, (1962).
8. Una extensa presentación de potenciales nucleares fenomenológicos y referencias amplias puede encontrarse en: R. J. N. PHILIPS, *Reports of progress in physics*, 22, 562 (1958).
9. L. ROSENFELD: *Nuclear Forces, Amsterdam*, North Holland Pub. Co., (1948).
10. L. FOLDY and S. WOUTHUYSEN, *Physical Review*, 78, 29 (1950).
11. T. V. Chraplivy, Physical Review, 91 388, 1953.

CRONICA

LA REUNIÓN ANUAL DE LA UMA

La Reunión anual de comunicaciones científicas de la Unión Matemática Argentina, correspondiente a 1963, tuvo lugar en los días 5 a 7 de octubre en Tucumán, bajo los auspicios de la Facultad de ciencias Exactas y Tecnología de la Universidad Nacional de Tucumán.

La reunión se celebró en la Residencia Universitaria de Horco Molle que gentilmente la Universidad puso a disposición de la UMA.

La Reunión fue muy concurrida, participando de ella representantes y concurrentes de las siguientes instituciones:

Instituto de matemática y estadística de la Facultad de Ingeniería y Agrimensura de Montevideo: Rafael Laguardia.

Facultad de ciencias exactas y naturales de Buenos Aires: Luis A. Santaló, José Babini, Manuel Sadosky, Cora Ratto de Sadosky, Mario Gutiérrez Burzaco, Gregorio Klimovsky, Roque Scarfiello, Enzo Gentile, Pedro Zadunaisky, Alfredo A. O'Connell, Norberto Salinas, Máximo Dickmann, Carlos Segovia, Fausto Toranzos, Osvaldo Capri, Raúl Chiappa, Cora Sadosky, Enrique Ruspini, Gustavo Galimberti, Luciana Bettitelli, Elisa Quastler, Hugo Scolnik, Susana Castro, Norma Cravanzola, Ricardo Israelewicz, Alfredo Pascual, Guillermo Hansen, Angeles Nicolini, Teresita Leyell, Ada Korn, Alicia Brunetti.

Facultad de ciencias económicas de Buenos Aires: Elías A. De Cesare.

Facultad de Ingeniería de Buenos Aires: Josefina Erramuspe, Aida Cohn, Carlos David Pantin, Héctor C. Micheloni, Francisco Díaz Alejo, Edgardo Echenique.

Instituto de Investigaciones científicas y técnicas de las Fuerzas Armadas: Juan Félix Diharce, Orlando Antonio D'Amore.

Universidad Nacional de Tucumán: Félix E. Herrera, Raúl Luccioni, Adolfo Ibáñez, Juan Carlos Escudé, Guillermo Martínez Guzman, Ilda G. de D'Angelo, Estela F. de Battig, Blanca M. de Bertini, Luisa H. de Amin, Margarita R. de García, Ana M. de Filippi, Beatriz L. de Araoz, Elena Rodríguez, Carmen C. de Torrente, Roberto Ovejero, Carlos A. Sastre.