

# TRAYECTORIAS DE REGGE PARA EL POTENCIAL COULOMBIANO CORTADO

por MIGUEL A. VIRASORO

Depto. de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Buenos Aires, Argentina

RESUMEN: Se considera el potencial coulombiano cortado en el origen y en el infinito. Se estudian los polos de Regge para la energía tendiente a infinito y cero. Se puede verificar de esa manera que: el comportamiento para energías grandes está determinado por los valores del potencial a distancias pequeñas, mientras que el comportamiento a baja energía está determinado por valores del potencial a distancias grandes. Se dan también argumentos generales que demuestran dicha proposición y que permiten proponer la forma de la trayectoria para los distintos potenciales considerados.

ABSTRACT: The coulombian potential cut at zero and at infinity is studied. Regge's poles are obtained for the energy tending to infinity and to zero. It can be verified in this way that the behaviour for high energies is determined by the potential values for short distances, while the behaviour for low energies is determined by the potential values for large distances. General arguments are also given that demonstrate such statement and that allows us to anticipate the shape of the trajectories for the different potentials considered.

## INTRODUCCION

Es sabido que una de las herramientas matemáticas para estudiar las propiedades analíticas y asintóticas de la matriz  $S$  y de otras magnitudes físicas relacionadas) es posponer la cuantificación del momento angular formalmente y considerarlo no sólo como una variable continua sino aún como compleja.

Dentro de esta técnica ocupa lugar preponderante el estudio de las trayectorias de los polos de Regge para distintos potenciales. Estos polos pueden considerarse como autovalores de la ecuación de Schrödinger, donde el problema de autovalores, generalizado del correspondiente a los estados ligados para  $l$  (impulso angular) y  $k$  (raíz cuadrada de la energía) físicos, se define como sigue:

"Para un  $k$  determinado, imaginario positivo o real positivo, encontrar un  $l$  tal que la ecuación:

$$\left[ -\frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} - k^2 \right] \Psi(r) = 0 \quad (1)$$

tenga una solución que se comporte en el origen como  $r^{l+1}$  y en el infinito como  $\exp(ikr)$ ." (1).

De esta manera queda definida  $l = \alpha(k)$ , las trayectorias de Regge si se cumplen ciertas relaciones sobre el potencial  $V(r)$ , a saber:

$$(A) \quad \int_0^{\infty} r V(r) dr \leq M$$

$$(B) \quad \int_0^{\infty} r^2 V(r) dr \leq N$$

(A) garantiza que el comportamiento en el origen va a estar dominado por el término  $l(l+1)/r^2$  y por lo tanto que habrá soluciones en ese punto que se comporten como  $r^{l+1}$  y  $r^{-l}$ .

(B) garantiza que en el infinito habrá soluciones de la forma  $\exp(ikr)$  y  $\exp(-ikr)$ . Esta condición no se cumple para el potencial euclombiano pues si  $V(r) = 2\gamma/r$  entonces las soluciones de I) se comportan como  $\exp(ikr + i\frac{\gamma}{k} \ln 2kr)$  y  $\exp(-ikr - i\frac{\gamma}{k} \ln 2kr)$ , hay que cambiar consecuentemente la definición del problema de autovalores.

Las trayectorias de Regge han sido estudiadas para el potencial de Yukawa numéricamente (2), para el pozo de potencial numéricamente (3) y analíticamente (4), para el potencial coulombiano analíticamente (5).

En este trabajo consideramos el potencial coulombiano modificado mediante un corte ya en el origen ya en el infinito. En las dos primeras secciones estudiamos los polos de Regge para  $k \rightarrow \infty$  y  $k \rightarrow 0$  respectivamente. Se podrá verificar de esa manera que:

a) el comportamiento para  $k$  tendiendo a infinito está determinado por los valores del potencial  $V(r)$  para  $r$  menor que un  $r_0$  arbitrario.

b) el comportamiento para  $k \rightarrow 0$  está dominado por la forma del potencial para  $r$  grande. (6)

En la sección (3) damos argumentos generales que demuestran a) y b), también estudiamos en qué casos los polos de Regge pueden tender a infinito.

En la sección (4) usamos los resultados de las secciones anteriores para proponer la posible forma de las trayectorias. Para un potencial coulombiano cortado en el origen y en el infinito obtenemos, dentro de lo plausible de los argumentos usados, que la trayectoria tiene un lazo en el semiplano de la derecha de  $l$  de tal modo que para un mismo valor del momento angular (y en una misma trayectoria) puede producirse dos resonancias para distintos valores de la energía.

La notación en este artículo corresponde a la usada por Jahnke & Emde (7) para las funciones de Bessel, y a la de referencia (8) para las funciones de onda en un potencial coulombiano. La mayoría de las propiedades analíticas usadas están en esas tablas.

### Sección (0)

Vamos a considerar los potenciales coulombianos cortados atractivos definidos como:

$$V_1(r) = -\frac{2\gamma}{r} \quad r < a \quad ; \quad \gamma > 0$$

$$= 0 \quad r > a$$

$$V_2(r) = -\frac{2\gamma}{r} \quad r > a \quad ; \quad \gamma > 0$$

$$= -\frac{2\gamma}{a} \quad r < a \quad ;$$

Definimos la solución irregular de (I) como aquella que satisface la condición de contorno en el infinito es decir

$$\lim f(l, k, r) \exp(-ikr) = 1 \quad \text{para } V_1(r)$$

$$\lim f(l, k, r) \exp(-ikr - i\frac{\gamma}{k} \ln 2kr) = 1 \quad \text{para } V_2(r)$$

y la solución regular  $\phi(l, k, r)$  que satisface la condición de contorno en el origen:

$$\lim \phi(l, k, r) r^{-l-1} = 1$$

Si  $l$  es un autovalor de (I) entonces las soluciones regular e irregular deben ser la misma función salvo una constante, es decir construyendo el wronskiano de las dos soluciones:

$$W [f(l, k, r), \phi(l, k, r)] = 0 \quad (2)$$

En el caso de potenciales cortados es cómodo resolver (2) en el punto de corte  $a$  pues de esta manera sólo es necesario conocer  $f(l, k, r)$  para  $r \geq a$  y  $\phi(l, k, r)$  para  $r \leq a$ .

En el potencial  $V_1(r)$ ,  $f(l, k, r)$  para  $r \geq a$  es idéntica a la solución correspondiente a una partícula libre, es decir:

$$f(l, k, r) = A(kr)^{1/2} H^{(1)}_{l+1/2}(kr) \quad r \geq a$$

mientras  $\phi(l, k, r)$  para  $r \leq a$  es la función de onda de Coulomb

$$\phi(l, k, r) = B.F_l \left( \frac{\gamma}{k}, kr \right) \text{ ver ref. (7), (8)}$$

Para el potencial  $V_2(r)$ ,  $f(l, k, r)$  en la región  $r \geq a$  es la solución correspondiente al potencial coulombiano que se comporta en el infinito como la función  $\exp(ikr + i \frac{\gamma}{k} \ln 2kr)$ . En la notación de (8) es:

$$f(l, k, r) = C[F_l(-\gamma/k, kr) + iG_l(-\gamma/k, kr)]$$

mientras

$$\phi(l, k, r) = D \cdot (r)^{1/2} J_{l+1/2} \left( \sqrt{k^2 + \frac{2\gamma}{a}} \cdot r \right)$$

*Sección (i) Comportamiento para  $|k| \rightarrow \infty$*

Tomemos en primer lugar el potencial  $V_1(r)$

$$W[(kr)^{1/2} H^{(1)}_{l+1/2}(kr), F_l(-\gamma/k, kr)]_{r=a} = 0 \quad (3)$$

La expresión asintótica de  $F_l(-\gamma/k, ka)$  válida si  $ka \gg \gamma/k$  y  $ka \gg l^2$  es:

$$F_l(\eta, \rho) \cong U_l \sin \Theta_l + V_l \cos \Theta_l \quad \eta = -\gamma/k; \rho = ka$$

$$\Theta_l = \rho - \eta \ln 2\rho - l\pi/2 + \sigma_l$$

$$\sigma_l = \arg \Gamma(l+1+i\eta)$$

$$U_l + iV_l = 1 + \frac{(i\eta - l)(i\eta + l + 1)}{2i\rho} +$$

$$+ \frac{(i\eta - l)(i\eta - l + 1)(i\eta - l + 1)(i\eta + l + 2)}{2!(2i\rho)^2} + \dots$$

Para  $H^{(1)}_{l+1/2}(ka)$  la expresión asintótica válida si  $ka \gg l^2$  es:

$$(ka) H^{(1)}_{l+1/2}(ka) = i^{-l-1} \exp(ika) \left[ 1 + \frac{l(l+1)}{-2ika} + \frac{l(l-1)(l+1)(l+2)}{2!(-2ika)^2} + \dots \right]$$

Reemplazando en (3), y agrupando términos obtenemos una serie de la forma:

$$\left[ \frac{\alpha_1}{k a} + \frac{\alpha^2}{(ka)^2} + \dots \right] + \exp(-2i\Theta_l) \left[ \beta_0 + \frac{\beta_1}{ka} + \frac{\beta_2}{(ka)^2} + \dots \right] = 0$$

Observemos que las ecuaciones a resolver son las mismas tanto si hacemos tender  $a \rightarrow \infty$  manteniendo  $k$  fijo (distinto de cero) o hacemos tender  $k \rightarrow \infty$  manteniendo  $a$  fijo. Esto por un lado corrobora la proposición a), por otro lado permite obtener explícitamente los polos de Regge para  $k$  cualquiera distinto de cero en un potencial cortado a una distancia suficientemente grande.

En orden cero obtenemos:

$$\exp(-2i\Theta(l, k)) = 0$$

es decir

$$\Gamma(l+1+i\gamma/k) / \Gamma(l+1-i\gamma/k) = 0$$

Esta ecuación es idéntica a la que determina los polos de Regge en un potencial coulombiano puro (5):

$$l = -n - 1 + \gamma/k \quad (n \text{ es un } n^\circ \text{ entero que caracteriza la trayectoria}).$$

Es decir las trayectorias del potencial cortado tienden cuando  $a \rightarrow \infty$  a las trayectorias del potencial coulombiano puro. Además este límite es uniforme en cualquier intervalo de  $k$  que no contenga el origen. También demuestra esta fórmula que para cualquier valor de  $a$  las trayectorias de ambos potenciales, cortado y puro, tienden para  $k \rightarrow \infty$  a los enteros negativos.

En primer orden el resultado obtenido es:

$$l = -n - 1 + i\gamma/k + \frac{\gamma}{k} \cdot \frac{\exp(2ika + 2i\gamma/k \ln 2ka) \cdot \exp(\gamma\pi/k)}{2n! \Gamma(-n + 2i\gamma/k)} \cdot \frac{1}{k\alpha}$$

y para energías negativas,  $k = ih$

$$l = -n - 1 + \gamma/h - \frac{\gamma}{h} \cdot \frac{\exp(-2ha - 2\gamma/h \ln 2ha)}{2n! \Gamma(-n + 2\gamma/h)} \cdot \frac{1}{ha}$$

Los términos sucesivos de aproximación pueden hallarse sin ninguna dificultad pero no introducen modificaciones significativas en las trayectorias.

Para el potencial  $V_2(r)$  la ecuación a resolver es:

$$W[\sqrt{r} J_{l+1/2}(\sqrt{2\gamma/a+k^2} \cdot r), F_l(-\gamma/k, kr) + iG_l(-\gamma/k, kr)]_{a=r} = 0 \quad (4)$$

Los comportamientos para  $|k| \rightarrow \infty$  son

$$F_l(-\gamma/k, kr) + iG_l(-\gamma/k, kr) \rightarrow A \exp(ikr)$$

$$\sqrt{r} J_{l+1/2}(\sqrt{2\gamma/a+k^2} \cdot r) \rightarrow B [\exp(ikr) - \exp(-ikr)]$$

Reemplazando en (4) la ecuación resulta incompatible. Esto significa que para  $|k| \rightarrow \infty$  las trayectorias de Regge no terminan en ningún valor finito del plano complejo  $l$  y por consiguiente se van a infinito. Notar que la ecuación (4) es continuable analíticamente en el semiplano  $Re l < -1/2$  por lo tanto sus soluciones en esa región determinan la prolongación correcta de las trayectorias de Regge.

Para obtener como tiende  $l$  a infinito explícitamente, es necesario usar las expresiones asintóticas de  $F_l, G_l$ , y  $J_{l+1/2}$  cuando ambos  $k$  y  $l$  son grandes.

### Sección 2. Comportamiento para $|k| \rightarrow 0$

En el caso del potencial  $V_i(r)$  tenemos que hallar el comportamiento de  $F_l(-\eta, \rho)$  cuando  $\eta \rightarrow +\infty, \rho \rightarrow 0, \eta\rho = \text{cte}$  y de  $\sqrt{x} H_{l+1/2}(x)$  cuando  $x \rightarrow 0$

El primero se obtiene mediante un desarrollo de  $F_l(\eta, \rho)$  en funciones de Bessel

$$F_l(-\eta, \rho) = C \rho^{l+1} [\xi_{2l_0+1}(2\eta\rho) + \sum_{s=1}^{\infty} \beta_s(\eta) \xi_{2l_0-s}(2\eta\rho)]$$

donde

$$\xi_n(z) = z^{-n/2} J_n(2\sqrt{z})$$

$$4\eta^2 \beta_1 = l; \quad 12\eta^2 \beta_2 = -1; \quad (4\eta^2)^2 \beta_3 =$$

$$= l(l+1)/2; \quad 4\eta^2(s+1)\beta_s = (2l+1-s)\beta_{s-2} - \beta_{s-3}, \quad s \geq 4$$

El segundo se obtiene a partir de

$$H^{l+1/2}(x) = \frac{i}{\text{sen}(l+1/2)\pi} [\exp(-(l+1/2)i\pi) J_{l+1/2}(x) - J_{-l-1/2}(x)]$$

$$J_p(x) = (x/2)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!((p+k)!)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

Reemplazando en la ecuación a resolver vamos a obtener una serie en potencias de  $k$  igualada a cero. De allí puede obtenerse los polos de Regge para  $k=0$  que en función de  $\gamma a$  resultan:

$$J_{2l_0}(\sqrt{8\gamma a}) = 0 \quad \text{si } l_0 > -\frac{1}{2} \quad (\text{i})$$

$$J_{2l_0+1}(\sqrt{8\gamma a}) = 0 \quad \text{si } l_0 < -\frac{1}{2} \quad (\text{ii})$$

Es interesante comparar este resultado con el obtenido en (4) para el pozo de potencial pues ambos potenciales son idénticos más allá del corte y por lo tanto de acuerdo con b) deben comportarse de manera similar para  $k=0$ .

Las ecuaciones que permiten obtener los polos de Regge para el pozo son:

$$J_{l_0-1/2}(\sqrt{V} a) = 0 \quad \text{si } l_0 > -\frac{1}{2}$$

$$J_{l_0+3/2}(\sqrt{V} a) = 0 \quad \text{si } l_0 < -\frac{1}{2}$$

La semejanza de estas ecuaciones con (i) y (ii) garantiza que el comportamiento de las trayectorias en ambos casos sea similar, en particular se deduce en nuestro caso como en (4) que:

Las soluciones de (i) y (ii) son todas reales, simples y tienden asintóticamente a los enteros negativos (tanto para  $l \rightarrow \infty$  como cuando  $\gamma a \rightarrow 0$ ). El n° de soluciones para  $l > -1/2$  es igual al n° de ceros de  $J_1(x)$  para  $0 \leq x < \sqrt{8\gamma a}$ .

El siguiente paso es estudiar como se separan las trayectorias del eje real cuando  $k$  crece a partir de cero. El comportamiento es nuevamente similar al obtenido en (4). Newton (10) demuestra que el orden de contacto de la trayectoria con el eje real en  $k = 0$  es el mismo para cualquier potencial que cumpla (A) y (B) y que sea nulo para  $r > r_0$ . Un argumento simple que demuestra eso es el siguiente: la ecuación a resolver (2) es:

$$W[\phi(l, k, r), J_{l+1/2}(kr)\sqrt{kr}] - \exp\left(l + \frac{1}{2}\right) i\pi W[\phi(l, k, r), J_{-l-1/2}(kr)\sqrt{kr}] = 0$$

Como  $\phi(l, k, r)$  y  $J_{\pm(l+1/2)}(kr)$  son funciones reales para  $k$  y  $l$  reales y  $J_{|l+1/2|}(kr)/J_{-|l+1/2|}(kr) \sim k^{l+1}$  para  $k \rightarrow 0$  podemos poner la ecuación de la forma:

$$W(l, k) = R(l, k) + k^{l+1} I(l, k) = 0 \quad (4)$$

donde  $R(l, k)$  es real e  $I(l, k) = 0$  (1) para  $k \rightarrow 0$ . Es obvio entonces que en las derivadas parciales  $\partial^n W / \partial l^n \partial k^n$  en  $k = 0$ ,  $l = l_0$  no va a contribuir  $I(l, k)$  mientras  $n < |2l_0 + 1|$ . Por consiguiente la derivada enésima de la función implícita  $l(k)$  definida por (4) va a ser real mientras  $n < |2l_0 + 1|$ , lo que quiere decir que  $l(k)$  puede escribirse como

$$l(k) = \sum_{i=0}^n a_i k^i + \epsilon(k)$$

donde  $n < |2l_0 + 1|$

$$\epsilon(k)/k^n \rightarrow 0$$

$a_i$  son reales

Luego en primera aproximación para  $k$  creciendo a partir de

cero el incremento de la parte imaginaria de  $l$  es igual a la parte imaginaria de  $\epsilon(k)$  mientras el incremento de la parte real es proporcional a  $k$  luego:

$$\Delta \text{Im}l / (\Delta \text{Re}l)^n \rightarrow 0 \quad \text{para } k \rightarrow 0$$

ecuación que nos da el orden de contacto en  $k = 0$ .

En cuanto al potencial  $V_2(r)$  tenemos que hallar el límite de la función  $G_l(\eta, \rho) + iF_l(\eta, \rho)$  cuando  $k \rightarrow 0$ . El resultado es:

$$G_l(\eta, \rho) + iF_l(\eta, \rho) \rightarrow \sqrt{r} H_{2l+1}(\sqrt{8\gamma r})$$

Si tomamos el límite por valores de  $k$  reales y buscamos un autovalor  $l$  entonces hay dos posibilidades:

- a) existe alguna solución real y acotada
- b) sólo  $|l| = \infty$  es solución

Podemos desechar a) usando el siguiente argumento: en la ecuación a resolver separamos parte real e imaginaria e igualamos ambas a cero, resulta:

$$W[\phi(l, 0, r), \sqrt{r} J_{2l+1}(\sqrt{8\gamma r})] = 0$$

$$W[\phi(l, 0, r), \sqrt{r} N_{2l+1}(\sqrt{8\gamma r})] = 0$$

Para que estas dos ecuaciones sean compatibles deben ser las funciones  $J_{2l+1}$  y  $N_{2l+1}$  linealmente dependientes, lo que es absurdo.

### Sección 3

Vamos a considerar ahora algunos argumentos heurísticos por los cuales podemos generalizar resultados de las secciones anteriores.

En primer lugar en la ecuación (2)

$$W[\phi(l, k, r), f(l, k, r)] = 0$$

si hacemos tender  $k \rightarrow \infty$ , como se cumple que  $f(l, k, r) \rightarrow \exp(ikr)$  independientemente de la forma del potencial (11) resulta que toda la información sobre este proviene de  $\phi(l, k, r)$ ; la cual a su vez

dado que está definida por una condición de contorno en el origen depende del valor del potencial en el intervalo  $(0, r)$ . Por otra parte  $r$  puede tomarse tan pequeño como se quiera, luego el comportamiento para  $k \rightarrow \infty$  está estrictamente determinado por la forma del potencial en un entorno del origen.

Para el comportamiento en  $k = 0$  no podemos esperar un resultado tan fuerte pues el potencial coulombiano cortado  $V_1(r)$  es idéntico al pozo de potencial para cualquier  $r$  mayor que el corte y sin embargo los polos de Regge en  $k = 0$  difieren. En cambio podemos afirmar que si el potencial es para  $r$  mayor que un  $r_0$  arbitrario idéntico al potencial coulombiano las trayectorias deben irse a  $\infty$  para  $k = 0$  pues en el argumento de la sección (2) para  $V_2(r)$  lo único que se utiliza de  $\phi(l, k, r)$  (que depende de la forma del potencial para  $r < r_0$ ) es que es una función real para  $l$  y  $k^2$  real. Para cualquier potencial, por el contrario, que tienda a cero más rápidamente que  $1/r^2$  podemos decir que cuando  $l \rightarrow \infty$

$$l(l+1)/r^2 + V(r) \sim l(l+1)/r^2$$

y por lo tanto las soluciones de la ecuación de Schrödinger serían:

$$f(l, k, r) = \sqrt{r} H^{(1)}_{l+1/2}(kr)$$

$$\phi(l, k, r) = \sqrt{r} J_{l+1/2}(kr)$$

luego el wronskiano no se anula para ningún valor de  $k$  y  $l$  incluso  $k = 0$ . Si  $k \neq 0$  por supuesto la trayectoria de Regge no puede irse a  $\infty$  con ningún potencial que se anule en el infinito pues

$$l(l+1)/r^2 + k^2 \gg V(r) \text{ para cualquier } r \text{ si } l \rightarrow \infty$$

Estos argumentos obtenidos haciendo aproximaciones directamente en la ecuación diferencial, pueden ser expresados de una manera más rigurosa recurriendo a las ecuaciones integrales que satisfacen  $\phi(l, k, r)$  y  $f(l, k, r)$ . De esa manera, sin embargo, se pierde mucho de la simplicidad y transparencia que tienen.

#### Sección 4

Los resultados de las secciones anteriores, sobre todo las proposiciones a) y b) demostradas tienen la particularidad de relacionar

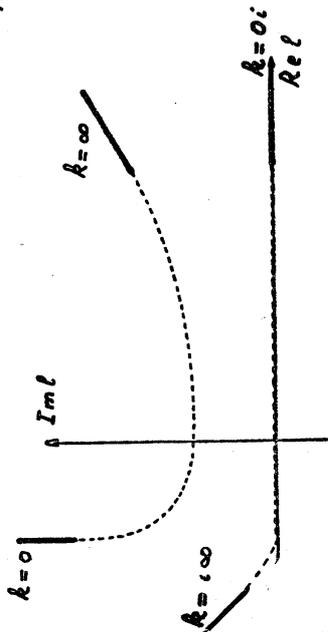
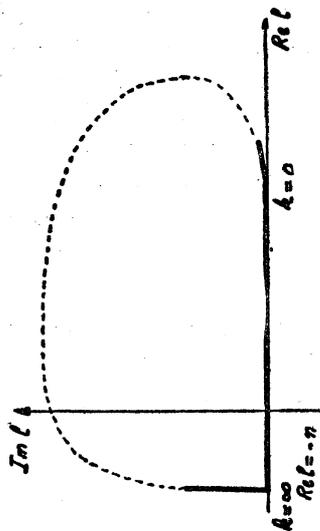
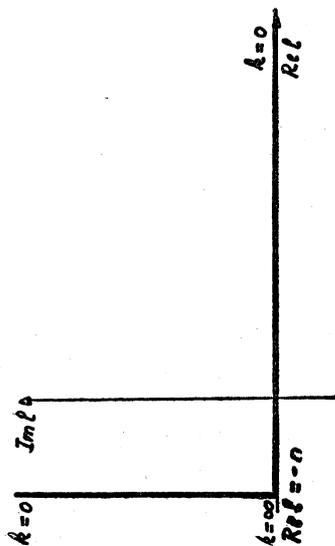


Fig. i  
Fig. ii

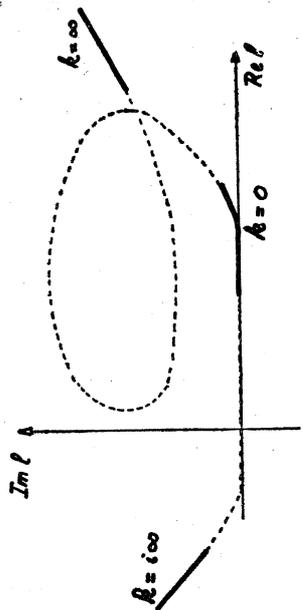


Fig. i: Coulombiano en el origen y en infinito, Fig. ii: Coulombiano en el origen, Cortado en infinito.

Fig. iii: Cortado en el origen, Coulombiano en infinito, Fig. iv: Cortado en el origen y en infinito

el comportamiento local del potencial con la forma de las trayectorias de Regge. Como éstas a su vez determinan las resonancias y los estados ligados correspondientes nos encontramos ante la posibilidad de estudiar qué cambios produce en el espectro de autovalores de un cierto potencial el modificarlo localmente en el origen o en el infinito. Como ejemplo podemos tratar de hallar las trayectorias para los potenciales  $V_1(r)$  y  $V_2(r)$ . El primero es un potencial coulombiano cortado en el infinito de tal modo que sus trayectorias serán idénticas a las del potencial coulombiano para  $k$  tendiendo a infinito, mientras en  $k = 0$  van a asemejarse a las del pozo de potencial (ver Fig. ii trazo lleno), si ahora unimos en la manera más simple esas porciones (trazo punteado) obtenemos aproximadamente la trayectoria.

Para  $V_2(r)$  el procedimiento es similar, conocemos el comportamiento para  $k \rightarrow 0$ , como el potencial coulombiano, y para  $k \rightarrow \infty$ , como el pozo (Fig. iii trazo lleno) uniendo resulta la trayectoria de la figura.

Más interesante es considerar un tercer potencial:

$$\begin{aligned} V_3(r) &= -2\gamma/a && \text{para } r \leq a \\ &= -2\gamma/r && \text{para } a < r \leq b \\ &= 0 && \text{para } b < r \end{aligned}$$

Este puede considerarse en primer lugar como el potencial  $V_2(r)$  cortado en el infinito. Ya se conoce el efecto que produce cortar de esa manera el potencial coulombiano, a saber, que la trayectoria en vez de irse a infinito para  $k = 0$  y luego aparecer en el semiplano de la izquierda, termina en un valor finito para energía cero, sale del eje real y atraviesa el primer cuadrante antes de aparecer en el semiplano de la izquierda. Se puede suponer que en este caso ocurrirá el mismo tipo de modificación y que por lo tanto la trayectoria tomara el aspecto de la figura iv.

Pero además el potencial  $V_3(r)$  puede verse como una modificación de  $V_1(r)$  en el origen y por lo tanto su trayectoria debe ser obtenible a partir de la correspondiente a este último mediante una deformación idéntica a la que permite obtener la trayectoria de  $V_2(r)$  a partir de la coulombiana. En la figura se ve que al pasar de (i) a (iii) se produce la misma modificación que al pasar de

(ii) a (iv). Es decir la trayectoria obtenida anteriormente es compatible con esta nueva consideración.

Pero todavía podemos hacer tender  $b \rightarrow a$  de tal manera que este potencial se convierta en el pozo, en este caso tiene que ser posible una deformación continua de la trayectoria correspondiente a  $V_3(r)$  hasta que coincida con la del pozo. Esto es obviamente posible con sólo hacer que el lazo que aparece en la trayectoria tienda a cero.

Todo esto conduce a pensar que la forma de la trayectoria dibujada en iv es la forma correcta para el potencial coulombiano cortado en el origen y en el infinito.

Como resultado interesante se observa que para  $V_2(r)$  puede haber en una misma trayectoria y para un mismo impulso angular un estado ligado y una resonancia lo cual en  $V_3(r)$  se transforma en 2 resonancias posibles.

Agradezco al Dr. Bollini por sus importantes sugerencias y ayuda y por haber sido él quien orientó este trabajo.

#### REFERENCIAS

- (1) T. REGGE, *Nuovo Cimento* 14, 951 (1959). El problema de autovalores define unívocamente una solución para  $k$  tal que  $Imk \geq 0$  y  $k \neq 0$  y para  $l$  tal que  $Re l \geq -\frac{1}{2}$ . Para otro rango de valores la trayectoria se define por continuación analítica.
- (2) A. AHMADZADEH, R. G. BURKE & C. Tate UCRL 10140 y 10126, Lawrence Radiation Laboratory.
- (3) A. O. BARUT & F. CALOGERO, *Poles in complex angular momentum for a class of potentials*, Preprint.
- (4) C. G. BOLLINI & J. J. GIAMBIAGGI, *Regge trajectories for the Square-well potential*, *Nuovo Cimento*. Vol. XXVIII, 356 (1963).
- (5) V. SINGH, *Phys. Rev.* vol. 127, 632 (1962).
- (6) Ver referencia (4). En ese trabajo por comparación de las trayectorias para los potenciales coulombiano, Yukawa y pozo se propone que a) y b) son válidas en general.
- (7) JAHNKE & EMDE, *Tables of functions*, Dover
- (8) *Tables of Coulomb wave functions*, U. S. Departm. of Commerce, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 17.
- (9) M. J. COULOMB, *Bull. Sci. Math.* vol. 60, 297 (1936), citado en (4).
- (10) R. G. NEWTON, *Journal of Math. Physics* vol. 3, 867 (1962).