UN MODELO COSMOLOGICO PARA LA LEY DE HUBBLE

Por FEDERICO M. STRAUSS (*)
Instituto Argentino de Radioastronomía

ABSTRACT

In part *A*, by means of Hubble's law, an expression is found for the forces acting on the expansion of the universe, based on an explosive cosmogonic model.

In part B, a newtonian model is proposed that agrees with Hubble's law, which yields an inhomogeneus distribution of matter with density slowly varying with the coordinates (and decreasing with time), which supposing that the original explosion ocurred 1.3×10^{10} years ago, measures about 6.7×10^{-29} gr/cm^3 which fits observational data. It accounts also for some of the deviations of galaxies from the straight line given by Hubble's law.

A) LEY DE HUBBLE

Esta ley empírica da la relación entre la velocidad (v) de recesión de las galaxias (corrimiento Doppler) y la distancia (r) recorrida por la luz de cada galaxia, y expresa:

$$v = \frac{r}{T} \qquad (1)$$

donde T es la constante de Hubble (aprox. 10^{10} años).

En realidad, las galaxias no caen exactamente sobre la recta dada por (1) sino que hay ciertos apartamientos.

Si suponemos un modelo cosmogónico explosivo, T puede interpretarse como el tiempo transcurrido desde la explosión original.

Ahora bien; es evidente que cuando miramos una galaxia lejana, la vemos tal como era cuando partió la luz que nos está lle-

(*) Presentado por C. M. Varsavsky.

gando ahora al tiempo T. Sea t el instante que salió la luz; será $T - t$ el tiempo que empleó la luz en llegar a nosotros.

La velocidad v que medimos es la que tenía la galaxia al tiempo t ($v(t)$); actualmente tendrá una velocidad $v(T)$ desconocida. La distancia r la conocemos también en base a la información que nos trae dicha luz, luego será también la distancia al tiempo t, $r(t)$; actualmente es $r(T)$, valor desconocido.

Consideraremos sólo regiones del espacio en que la curvatura es despreciable. Podemos entonces usar relatividad especial (y no general) para el estudio del problema (Tolman, [6]). Se cumple entonces que:

$$r = c\,(T - t) \tag{2}$$

Si reemplazamos (2) en (1) obtenemos:

$$v(t) = dr(t) \,/\, dt = r(t) \,.\, [t + r(t) \,/\, c]^{-1} \tag{3}$$

Esta ecuacin está toda al tiempo t y por tanto es integrable. Haciendo en (3) la sustitución:

$$u(t) = \frac{r(t)}{t} \tag{4}$$

resulta una ecuación separable que integrada da (volviendo a las variables originales):

$$ct \,/\, r = ln\, r - ln\, A \tag{5}$$

con $A =$ constante de integración.

Para $t = 0$, será $r = r_0$ (distancia inicial); luego:

$$ct = r\, ln\, (r \,/\, r_0) \tag{6}$$

de (6) se obtiene derivando:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{c}{1 + ln\, (r \,/\, r_0)} \tag{7}$$

y de (7) sale:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{-\,c^2}{r[1 + lt\, (r \,/\, r_0)]^3} \tag{8}$$

Esta ecuación es importante porque provee información sobre las fuerzas que actúan.

Dada una galaxia que vemos nosotros al tiempo T interesa saber, dado r, cuanto valía $r_0 = r(t=0)$. Eliminando t entre (6) y (2):

$$r_0 = r \exp\left[\frac{r - cT}{r}\right] \tag{9}$$

Por (8) vemos que para todo $t > 0$, $(r > r_0)$, es decir después de la explosión, la aceleración es negativa y por (7) la velocidad varía entre $v = c$ para $r = r_0\ (t=0)$ y $v = 0$ para $r = \infty$ $(t = \infty)$, es decir:

$$v = \begin{cases} c & \text{para } t = 0 \\ 0 & \text{para } t = \infty \end{cases} \tag{10}$$

Que el movimiento sea decelerado con fuerzas dadas por (8) nos conduce a formular el siguiente modelo.

B) MODELO

i) *Descripción.*

Sea un universo con simetría esférica respecto de un punto que llamaremos "centro del universo".

Todos los movimientos serán radiales respecto de ese punto. La densidad entonces es una función desconocida de la distancia radial r al centro, pero no dependerá de los ángulos (coordenadas esféricas). Supondremos que las fuerzas que actúan son, para $t > 0$, puramente newtonianas; que la presión es nula y no hay para $t > 0$ fuerzas repulsivas. Entonces, la fuerza que actúa en un instante determinado sobre una partícula de masa m ubicada a una distancia r del centro, será como es fácil demostrar a partir de la ecuación de Poisson y el teorema de Gauss,

$$F = -\frac{G\,M}{r^2}\,m \tag{11}$$

con $M =$ masa de toda la materia incluida en la esfera de radio r y centrada en el origen de coordenadas (centro del universo); $G =$ cte. gravitatoria. (Ver también los Teoremas de Layzer, [3]).

Si la esfera considerada se expande en co-movimiento, la masa M será constante en el tiempo si suponemos que las galaxias no se pasan mutuamente, cosa que es cierta si por ejemplo suponemos aplicable la ecuación (6); puede demostrarse que si r_1 y r_2 son las distancias de dos galaxias al centro, y $r_1(0) > r_2(0)$ será $r_1(t) > r_2(t)$ para todo t.

Por (11) será:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \tag{12}$$

Esta ecuación puede integrarse.

ii) *Integración*:

Una cuadratura de (12) da:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2}\left[\frac{GM}{r} + B\right]^{1/2} \tag{13}$$

con $B =$ cte. de integración.

Para determinar B, impongo la condición de que se cumpla (10), lo que será justificado al final del párrafo (iii).

Por la segunda condición de (10), $B = 0$ y por la primera resulta:

$$GM = r_0 \frac{c^2}{2} \tag{14}$$

de (13) y (14):

$$\frac{dr}{dt} = c\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2} \tag{15}$$

Una nueva cuadratura, con la condición de que en $t = 0$, $r = r_0$ da finalmente:

$$r(t) = r_0 \left[\frac{3}{2} \frac{ct}{r_0} + 1 \right]^{2/3} \tag{16}$$

De esta ecuación se obtiene también la conservación de la masa M contenida en una esfera en co-movimiento, justificando así nuestra suposición a posteriori.

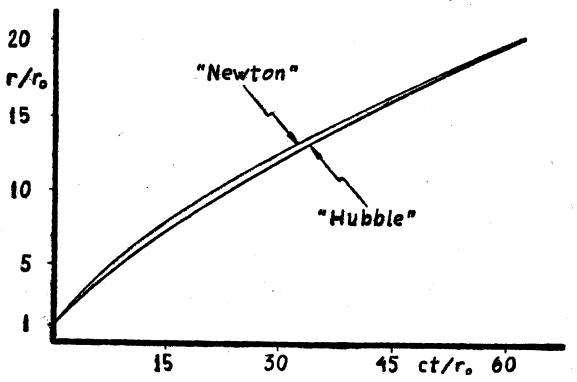

FIGURA 1: Gráfico de las ecuaciones (6) (Hubble) y (16) (Newton)

Por (16) y (15):

$$\frac{dr}{dt} = \frac{c}{\left[\frac{3}{2} \frac{ct}{r_0} + 1 \right]^{1/3}} \tag{17}$$

Graficando (6) y (16) (figura 1), vemos que ambas leyes se ajustan dentro del 10 %.

Si de (16) despejamos r_0 resolviendo la ecuación, se obtiene:

$$r_0 = \frac{ct}{2} \left\{ \left[\sqrt{2 \left(\frac{r}{ct} \right)^3} + \sqrt{1 + 2 \left(\frac{r}{ct} \right)^3} \right]^{1/3} - \right.$$

$$\left. - \left[\sqrt{2 \left(\frac{r}{ct} \right)^3} + \sqrt{1 + 2 \left(\frac{r}{ct} \right)^3} \right]^{-1/3} \right\}^2 \tag{18}$$

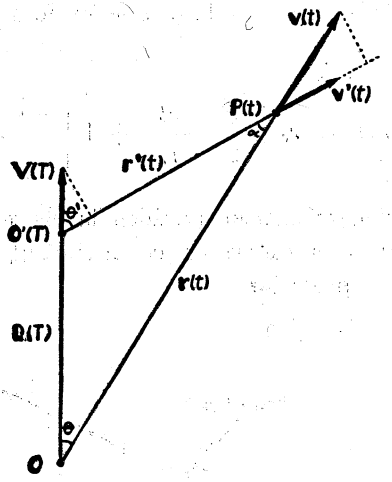

FIGURA 2: Galaxia en P observada al tiempo T por un observador ubicado en 0'.

iii) Observador fuera del centro del universo.

Sea 0 el centro del universo y 0' la posición de un observador que al tiempo T se encuentra a una distancia D del centro y posee una velocidad radial V (fig. 2).

Sea P la posición a un cierto tiempo t de una galaxia, cuya distancia a 0 es r en la dirección θ medida a partir de la semirecta 00' y su distancia a 0' (observador) es r' en la dirección θ' medida también desde 00'; su velocidad respecto de 0 será v y respecto de 0' será v' la componente radial.

Sea t el instante en que sale un haz de luz que llega a 0' en T. Entonces:

$$t = T - \frac{r'}{c} \tag{19}$$

Siendo α el ángulo entre las direcciones de r y r', de la figura 2 se desprende:

$$v' = v \cos \alpha - V \cos \theta' \tag{20}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = (D \operatorname{sen} \theta') / r \tag{21}$$

$$r^2 = r'^2 + D^2 + 2Dr' \cos \theta' \tag{22}$$

Reemplazando t de (19) en (18) y ésta en (15) se obtiene:

$$v(r, r', T) = c\sqrt{\frac{cT - r'}{2r}}\left\{\left[\sqrt{2}\left(\frac{r}{cT - r'}\right)^{3/2} + \sqrt{1 + 2\left(\frac{r}{cT - r'}\right)^{3}}\right]^{1/3} - \right.$$

$$\left. - \left[\sqrt{2}\left(\frac{r}{cT - r'}\right)^{3/2} + \sqrt{1 + 2\left(\frac{r}{cT - r'}\right)^{3}}\right]^{-1/3}\right\} \qquad (23)$$

y finalmente reemplazando r de (22) en (23) queda:

$$v = v\ (r', \theta', D, T) \qquad (24)$$

es decir en función de las variables del observador ubicado en 0'. Por otra parte, si en (23) ponemos $r = D$ y $r' = 0$ resulta $v = V$ la velocidad de 0' respecto de 0:

$$V(D, T) = c\ \sqrt{\frac{cT}{2D}}\left\{\left[\sqrt{2}\ \left(\frac{D}{cT}\right)^{3/2} + \sqrt{1 + 2\left(\frac{D}{cT}\right)^{3}}\right]^{1/3} - \right.$$

$$\left. \left[\sqrt{2}\left(\frac{D}{cT}\right)^{3/2} + \sqrt{1 + 2\left(\frac{D}{cT}\right)^{3}}\right]^{-1/3}\right\} \qquad (25)$$

Reemplazando v de (24), a de (21) y V de (25) en (20), se obtiene finalmente:

$$v' = v'\ (r', \theta', D, T) \qquad (26)$$

que es función únicamente de las variables medidas por el observador. Se calculó v' para diferentes valores de los parámetros mediante la computadora del Instituto de Cálculo de la UNBA y se adoptaron finalmente los valores: $T = 1.3 \times 10^{10}$ años (valor estimado por Sandage [5]) y $D = 3 \times 10^{9}$ años luz.

En la tabla I aparece v' / c como función de r' (años luz) y θ' (grados) para los mencionados valores de T y D.

Puede observarse que para $r' < 10^{9}$ años luz, las velocidades v' / c se ajustan a la recta

$$v' = r' / T' \qquad (27)$$

$$T' = 3\,T / 2 \qquad (28)$$

variando con θ' desde $\pm$ 25 % para $r' = 10^6$ años luz hasta $\pm$ 12 % para $r' = 10^{10}$ años luz. Puede compararse estas dispersiones con lo observado; Neyman & Scott [4] discuten la variación estadística de la magnitud absoluta de diferentes galaxias. Tomando como base la figura 6 de su trabajo [4] se ve que si suponemos que todas las galaxias de igual magnitud aparente están a la misma distancia de r', hay (para magnitud aparente 12) una variación desde 10^{-3} hasta 10^{-2} en v'/c observada contra 392×10^{-3} a 6.26×10^{-3} de la Tabla I. El hecho que este último valor sea menor que el observado indica que deben tenerse en cuenta las diferencias en magnitud absoluta de las galaxias, ya que la dispersión dada por la Tabla I no da cuenta de toda la variación observada, la que puede enmascarar el efecto mencionado. En cambio las velocidades se conocen en general con bastante precisión (Humason, Mayall and Sandage, [2] dan hasta 5 cifras).

Por otra parte, de (27) se desprende que a pesar de que el observador no está en el centro del universo, descubrirá que vale la ley de Hubble para él también como buena aproximación y esto es cierto para cualquier valor de D; o sea que en cualquier parte del universo un observador en co-movimiento va a encontrar siempre una ley aproximadamente rectilínea para la expansión. Esto justifica a posteriori el haber postulado la validez aproximada de la ley de Hubble para un observador ubicado en el centro del universo, hecha al imponer las condiciones (10) a la ecuación newtoniana (13).

iv) *Densidad de Materia.*

De la ecuación (14) obtenemos (en $t = 0$):

$$G\, dm = \frac{1}{2}\, c^2\, dr_0 \tag{29}$$

pero

$$dm = \rho(r_0)\, dV_0 = \rho(r_0)\, .\, 4\pi r^2_0\, dr_0 \tag{30}$$

(en la aproximación no relativista).

De (29) y (30):

$$\rho(r_0) = c^2 / (8\pi G\, r^2_0) \tag{31}$$

Para $t > 0$ se debe incluir la dependencia temporal dada por (16) y pasando luego a las variables del observador ubicado en 0' mediante las ecuaciones (18), (19) y (22) se obtiene finalmente la función

$$\rho = \rho\,(r', \theta', D, T) \tag{32}$$

que está tabulada en la Tabla II para $D = 3 \times 10^9$ años luz y $T = 1.3 \times 10^{10}$ años (en gr/cm^3). En dicha tabla puede observarse que ρ se mantiene aproximadamente constante para $r' < 10^9$ años luz en alrededor de 6.7×10^{-29} gr/cm^3. El valor estimado por Bondi [1] para ρ es 3×10^{-29} gr/cm^3 con error posiblemente menor que un orden, como densidad media de la parte conocida del universo (hasta 10^9 años luz), lo que muestra un buen acuerdo con los resultados obtenidos.

v) *Discusión.*

Es de hacer notar que con la ley de Hubble solamente, no fue posible hallar la distribución de materia; hizo falta pasar a un modelo (como el newtoniano) donde la interacción de las masas es conocida. No obstante, el modelo adoptado no es necesariamente el único que se puede formular que se ajuste a las ecuaciones halladas en la parte *A*, pero es posiblemente el más sencillo matemáticamente.

Debemos hacer notar sin embargo que al despreciar efectos relativistas, se ha limitado efectivamente el rango de validez del modelo a distancias menores que unos 10^9 años luz; en esta región $v^2 / c^2 << v / c$, y por ser la densidad de materia muy baja estamos en el rango de validez de la mecánica newtoniana (Tolman, [6]).

$r' =$ / θ'	10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}
0	6.2215×10^{-5}	6.2255×10^{-4}	6.2640×10^{-3}	6.6569×10^{-2}	7.3189×10^{-1}
30	6.0798×10^{-5}	6.0829	6.1213	6.5167	7.4344
60	5.6798	5.6835	5.7209	6.1153	7.7542
90	4.8618	5.1122	5.1489	5.5259	8.2129
120	4.5140	4.5164	4.5486	4.8956	8.7336
150	4.0579	4.0617	4.0916	4.4132	9.2121
180	3.8903	3.8918	3.9207	4.2333	9.4294

Tabla I. — Velocidades (v'/c) como función de r' (años luz) y θ' (grados) para $T = 1.3 \times 10^{10}$ años y $D = 3 \times 10^9$ años luz

$r' =$ / θ'	10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}
0	6.657×10^{-29}	6.617×10^{-29}	6.239×10^{-29}	3.747×10^{-29}	3.548×10^{-30}
30	6.658×10^{-29}	6.623	6.291	3.945	3.725
60	6.659	6.639	6.440	4.612	4.313
90	6.661	6.661	6.654	5.995	5.500
120	6.664	6.684	6.883	8.565×10^{29}	7.588×10^{-30}
150	6.665	6.700	7.061	1.248×10^{-28}	1.051×10^{-29}
180	6.666	6.706	7.129	1.499×10^{-28}	1.224×10^{-29}

Tabla II. — Densidades (gr/cm^3) como función de r' (años luz)) y θ' (°) para $T = 1.3 \times 10^{10}$ años y $D = 3 \times 10^9$ años luz

BIBLIOGRAFIA

[1] BONDI, H.: *Cosmology*, Cambridge Univ. Press, 2nd. ed. (1960).

[2] HUMASON, M., MAYALL, N. U. and SANDAGE, A. R., *Astronom. J. 61*, 97 (1956).

[3] LAYZER, D., *Astrophys. J. 59*, 268 (1954).

[4] NEYMAN, J. and SCOTT, E. L., *Handbuch der Phys.* LIII, 416 (1959).

[5] SANDAGE, A. R., *Proc. Int. Solvay Conference*, 1958.

[6]) TOLMAN, R. C., *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, Oxf. (1934).