GRUPOS DEL PLANO RESPECTO DE LOS CUALES LOS CONJUNTOS DE PUNTOS Y DE RECTAS ADMITEN UNA MEDIDA INVARIANTE

por L. A. SANTALO

SUMMARY. Let P_n be the group of collineations of the real n-dimensional projective space on itself. Given a subgroup G of P_n there is a general method for deciding if sets of linear subspaces L_r $(0 \leq r \leq n-1)$ have or have not an invariant measure mith respect to G [2], [6]). The inverse problem is less easy; "given the integer r $(0 \leqq r \leqq n-1)$ find the subgroups G of P_n such that the sets of L_r have an invariant measure with respect to G". Since the number of subgroups G of P_n is finite, a first way of solving the problem is to compute one by one for all these subgroups. This way is relatively simple for $n=2$ and we will follow it in this paper; however, for $n \geqq 3$ the method is rather long and it should be desirable to have a shorter one.

It the present paper we only consider the case $n=2$ for which the possible cases are $r=0$ (points) and $r=1$ (straight lines). The problem we solve is then: Find the subgroups of the group of collineations of the projective plane on itself such that the sets of points and the sets of straight lines have an invariant measure with respect to them. In the cases in which such an invariant measure exist we compute also its explicit expression. The obtained results may be summarized as follows:

1. The only 2 - parameter projective groups of the plane for which there exist an invariant measure for sets of points and for sets of straight lines are the following:

$$xp,\ yq;\quad xp,\ q;\quad p+xq,\ q;\quad q,\ \gamma xp+yq;$$
$$q,\ p+yq;\quad q,\ xp+(x+y)q;\quad q-2yp,\ \ 2xp+yq.$$

2. The only 3 - parameter projective groups of the plane for which there exist an invariant measure for sets of points and for sets of straight lines are

$$p,\ 2xp+yq,\ x(xp+yq);\quad p,\ q,\ xq;\quad q,\ xq,\ 2xp+yq;$$
$$p,\ q,\ xp-yq;\quad p+y(xp+yq),\ q+x(xp+yq),\ xp-yq.$$

The last of these groups correspond to the group of Cayley (collineations which leave invariant a fixed conic) and has been well studied [6]; the fourth group is isomorphic to the group of euclidean motions and is also well known; the other three groups probably deserve a little more attention from the point of view of the integral geometry.

3. There are not projective groups of the plane depending on more than 3 parameters for which there exist an invariant measure for sets of points and for sets of straight lines. In this case one could consider sets of pairs of elements (two points, two lines, point and line) and ask for the groups which give an invariant measure for sets of such pairs of elements. Some particular cases are known [7], [8].

1. Introducción. Sea P_n el grupo de las colineaciones del espacio proyectivo real n-dimensional sobre sí mismo. Dado un subgrupo G de P_n, existe un método general para averiguar si los conjuntos de subespacios lineales L_r $(0 \leqq r \leqq n-1)$ admiten o no una medida invariante respecto de G. Mas generalmente, se puede calcular de manera fácil si conjuntos de figuras formadas por subespacios lineales que se transforman transitivamente por G, admiten o no una medida invariante respecto de G; ver Chern [2], Santaló [6], Varga [12], Luccioni [13]. Veamos algunos ejemplos:

a). Los conjuntos de hiperplanos L_{n-1} no poseen medida invariante respecto de P_n, pero si la poseen respecto del grupo de las centro-afinidades unimodulares [5], [4] y también respecto del grupo de los movimientos, euclidianos o no (Blaschke [1]);

b) Los conjuntos de "pares de hiperplanos paralelos" no poseen medida invariante respecto de P_n, pero si respecto del grupo de las afinidades unimodulares [7];

c) Los conjuntos de "ternas de rectas paralelas" del espacio proyectivo de tres dimensiones no poseen medida invariante con respecto de P_3 pero si respecto del grupo de las afinidades unimodulares [8];

d) Los conjuntos de "pares de rectas" del plano proyectivo no poseen medida invariante respecto de P_2, pero si la poseen respecto del grupo centro-afin y también respecto del grupo afin unimodular (Stoka [9].

Ejemplos del mismo estilo se conocen en abundancia. Mas complicado es el problema inverso, a saber: dado L_r (o una configuración formada por subespacios lineales) encontrar todos los subgrupos G de P_n respecto de los cuales los conjuntos de L_r (o los conjuntos de configuraciones dadas) admiten una medida invariante respecto de G.

Nos limitamos a subgrupos G de P_n puesto que los subespacios lineales para cuyos conjuntos deseamos saber si existe o no medida invariante, deben transformarse transitivamente por G. Si en vez de subespacios lineales o de configuraciones con ellos, se consideran otras figuras y en vez de P_n se considera un grupo de transformaciones más general, el problema directo es también fácil de resolver y el problema inverso se plantea igualmente, con solución también al parecer menos simple.

Naturalmente que un camino para resolver el problema inverso enunciado consiste en ir probando sucesivamente todos los subgrlpos G de P_n. Puesto que ya desde Sophus Lie se conoce un método para calcular todos estos subgrupos, que son en número finito, probando uno por uno se tendrá resuelto el problema. Sin embargo, para $n = 3$ el problema ya es largo y para $n > 3$ el método resulta impracticable dado el gran número de subgrupos de P_n. No es difícil dar algunos criterios que permiten simplificar la tarea, por eliminación de familias de subgrupos, pero de todas maneras una solución directa y cómoda sería deseable.

En este trabajo nos limitamos al caso del plano proyectivo ($n = 2$) para el cual los únicos subespacios son los puntos L_0 y las rectas L_1. El caso de los puntos ha sido estudiado desde otro punto de vista (Stoka [10]), pero aquí vamos a dar la forma explícita de la medida invariante en los casos en que existe.

En resumen, el problema que resolvemos es: *averiguar todos los subgrupos del grupo de las colineaciones del plano proyectivo real, respecto de los cuales los conjuntos de puntos o los conjuntos de rectas admiten una medida invariante y dar la forma explícita de esta medida en cada caso.*

Los grupos para los cuales existe medida invariante para conjuntos de puntos y para conjuntos de rectas están resumidos en el número final. Ellos son los únicos para los cuales tiene sentido estudiar una geometría integral en el sentido usual de esta palabra. Midiendo conjuntos de puntos y de rectas particulares y teniendo en cuenta que las transformaciones proyectivas conservan la convexidad proyectiva de los conjuntos de puntos, es posible que de ello resulten propiedades de los conjuntos convexos invariantes respecto de determinado grupo. Para los grupos que no admiten medida invariante para conjuntos de puntos y rectas, cabe considerar conjuntos de pares de estos elementos, de cuyas medidas pueden resultar también propiedades interesantes para la teoría de los conjuntos convexos, como fueron obtenidas por ejemplo en [4], [7], [8]. Dejamos este estudio para otra oportunidad.

En lugar de "medida" hablaremos en general de "densidad" invariante, bien entendido que la densidad para un conjunto respecto de determinado grupo es la forma diferencial cuya integral da una medida invariante. Tratándose de conjuntos transitivos, es bien sabido, además, que la densidad o la medida invariante, caso de existir, es siempre única salvo un factor constante.

2. Grupos proyectivos del plano. Los grupos proyectivos del plano (subgrupos del grupo de las colineaciones) fueron obtenidos

por Sophus Lie. Con el simbolismo usual estos grupos son los siguientes (ver, por ejemplo, G. Kowalewski [3] pág. 384):

I. *Grupos dependientes de un sólo parámetro.*

No nos van a interesar, puesto que no pueden ser transitivos respecto de los puntos ni respecto de las rectas, que son dependientes de dos parámetros.

II. *Grupos dependientes de 2 parámetros:*

1. p, q; 2. xp, yq; 3. xp, q; 4. $p + xq, q$;
5. $q, xp + yq$; 6. $q, \gamma xp + yq$ $(\gamma \neq 0, 1)$;
7. $q, p + yq$; 8. $q, xp + (x + y)q$;
9. $q - 2yp, 2xp + yq$; 10. q, xq; 11. q, yq.

III. *Grupos dependientes de 3 parámetros.*

1. $p, q, xp + yq$;
2. $p, 2xp + yq, x(xp + yq)$;
3. $p + yq, q, xq$;
4. $p, q, (\alpha + 1)xp + (\alpha - 1)yq$;
5. q, xp, yq;
6. $p, q, xp + (x + y)q$;
7. $q, xq, xp + \gamma yq$;
8. p, q, xq;
9. $p - xq, q, xp + 2yq$;
10. $p + y(xp + yq), q + x(xp + yq), xp - yq$;
11. q, xq, yq.

IV. *Grupos dependientes de 4 parámetros:*

1. p, xp, q, yq;
2. $p, q, xq, xp + \gamma yq$;
3. p, q, xq, yq;
4. q, xp, xq, yq;
5. $p, xp, yq, x(xp + yq)$.

V. *Grupos dependientes de 5 parámetros:*

1. $p, q, xq, 2xp + yq, x(xp + yq)$;
2. p, q, xp, yq, xq;
3. $p, q, yp, xq, xp - yq$.

VI. *Grupos dependientes de 6 parámetros.*

1. $p, q, xp, yq, xq, x(xp + yq)$;
2. p, q, xp, yp, xq, yq;

VII. *Grupos dependientes de 7 parámetros*: no existen.

VIII. *Grupo proyectivo, o grupo de todas las colineaciones, dependiente de 8 parámetros*:

$$p,\ q,\ xp,\ xq,\ yp,\ yq,\ x(xp + yq),\ y(xp + yq).$$

Para nuestro objeto es conveniente tener expresados estos grupos de manera explícita, como grupos de transformaciones del plano proyectivo sobre si mismo. Esto es lo que haremos en cada caso. El resultado podrá presentar uno de los dos siguientes tipos:

1. *Tipo afín.* En notación matricial será de la forma

$$x' = A\,x + B \tag{2.1}$$

siendo A una matriz 2×2 no singular y B una matriz 2×1. Las coordenadas son no-homogéneas. En este caso las formas de Maurer-Cartan o componentes relativas del grupo, que representaremos siempre por ω_i y que están definidas salvo una combinación lineal entre ellas con coeficientes constantes, son los elementos de las matrices (ver [7]):

$$\Omega_1 = A^{-1}\,dA \quad , \quad \Omega_2 = A^{-1}\,dB \tag{2.2}$$

y las ecuaciones de estructura, obtenidas por diferenciación exterior de estas matrices, toman la forma

$$d\Omega_1 = -\,\Omega_1 \wedge \Omega_1 \qquad d\Omega_2 = -\,\Omega_1 \wedge \Omega_2. \tag{2.3}$$

2. *Tipo proyectivo.* En este caso hay que usar coordenadas homogéneas y la forma matricial de las fórmulas de transformación es

$$x' = A\,x \tag{2.4}$$

siendo ahora A una matriz 3×3 que por tratarse de coordenadas homogéneas se puede siempre normalizar de manera que sea det. $A = 1$. Las formas de Maurer-Cartan son ahora los elementos de la matriz

$$\Omega = A^{-1}\,dA \tag{2.5}$$

y las ecuaciones de estructura se expresan

$$d\Omega = -\Omega \wedge \Omega. \tag{2.6}$$

Otra manera cómoda de hallar las formas de Maurer-Cartan en este caso proyectivo, consiste en considerar las filas de la matriz A como coordenadas homogéneas de tres puntos A_0, A_1, A_2; tomando estos puntos como base de un sistema de coordenadas homogéneas, las formas de Maurer-Cartan están determinadas por las relaciones

$$dA_i = \sum_{k=0}^{2} \omega_{ik} A_k \quad , \qquad i = 0, 1, 2, \tag{2.7}$$

de las cuales se deduce, por ejemplo

(2.8)

$$\omega_{00} = |dA_0\, A_1\, A_2\,| \,, \; \omega_{01} = |\, A_0\, dA_0\, A_2\,| \,, \; \omega_{10} = |\, dA_1\, A_1\, A_2\,| \,, \text{ etc.}$$

donde los segundos miembros indican los determinantes cuyas filas son las coordenadas de los elementos indicados (ver [7], [5]).

3. Grupos proyectivos dependientes de 2 parámetros. En este caso la medida para conjuntos de puntos o de rectas debe coincidir con la medida invariante del grupo, llamada en geometría integral la medida cinemática del grupo y que es bien sabido que existe siempre (es la medida de Haar para estos grupos particulares). Lo único que hay que ver es si el grupo es transitivo o no respecto de los puntos o rectas del plano; si es transitivo, la medida del grupo nos da la medida correspondiente y solo hará falta expresarla en función de las coordenadas del punto o de la recta según el caso.

En todo este trabajo, al decir que un grupo es transitivo respecto de los puntos o de las rectas entenderemos que es "en general" transitivo, o sea, transitivo salvo posiciones excepcionales. Por ejemplo, el grupo $x' = ax$, $y' = by$ diremos que es transitivo respecto de las rectas, si bien hacen excepción las rectas que pasan por el origen, puesto que ellas se transforman siempre en rectas que también pasan por el origen. Tampoco distinguiremos, por no ser necesario para nuestro objeto, entre la transitividad local y la global; por ejemplo, respecto del grupo de las colineaciones que dejan invariante una cónica real (grupo de Cayley) diremos que los puntos se transforman transitivamente, si bien es evidente que los puntos interiores no pueden transformarse en exteriores.

Pasemos a examinar, caso por caso, los grupos proyectivos dependientes de 2 parámetros.

1. p, q.

Es el grupo de las traslaciones

$$x' = x + a, \qquad y' = y + b. \tag{3.1}$$

Existe medida para conjuntos de puntos, que es el área ordinaria (integral de la densidad $dP = dx \wedge dy$), pero nó para conjuntos de rectas, puesto que el grupo no es transitivo respecto de ellas.

2. $xp, \quad yq$.

Es el grupo

$$x' = ax \quad , \quad y' = by \tag{3.2}$$

que es transitivo para puntos y para rectas. Por tanto, existe densidad invariante para conjuntos de puntos y para conjuntos de rectas. Para hallar la forma explícita de estas densidades, se observa que según (2.2) las formas de Maurer-Cartan son

$$\omega_1 = \frac{da}{a} \quad , \quad \omega_2 = \frac{db}{b} \tag{3.3}$$

y la densidad cinemática será $\omega_1, \wedge \omega_2$. Para interpretar esta densidad cinemática en cada caso, se observa que el punto de coordenadas $(1, 1)$ por la transformación general $(3, 2)$ pasa al punto de coordenadas (a, b) y, por tanto, llamando x,y a las coordenadas de este punto general se tiene, como densidad para conjuntos de puntos,

$$dP = \frac{dx \wedge dy}{xy} \quad . \tag{3.4}$$

Para rectas, la recta que no pasa por el origen de ecuación $x + y - 1 = 0$ se transforma en $x'/a + y'/b - 1 = 0$; por otra parte la ecuación normal de esta recta general es

$$x' \cos \phi + y' \operatorname{sen} \phi - p = 0, \tag{3.5}$$

siendo p la distancia al origen y ϕ el ángulo de la normal con el eje x. Por tanto es $a = p/\cos\phi$, $b = p/\operatorname{sen}\phi$. Sustituyendo en (3.3) y multiplicando exteriormente, resulta que la densidad para conjuntos de rectas, salvo el signo que es inesencial pues las densidades invariantes están siempre definidas salvo un factor constante, es

$$dG = \frac{dp \wedge d\phi}{p \operatorname{sen}\phi \cos\phi} \tag{3.6}$$

3. xp, q.

Es el grupo

$$x' = ax \quad , \quad y' = y + h \tag{3.7}$$

que es transitivo para puntos y para rectas y, por tanto, admite densidad invariante para ambos conjuntos de elementos. Según (2.2) las formas de Maurer-Cartan son

$$\omega_1 = \frac{da}{a} \quad , \quad \omega_2 = dh \tag{3.8}$$

y la densidad cinemática será $\omega_1 \wedge \omega_2$. El punto (1,0) pasa al punto general (a, h) y por tanto la densidad para puntos $P(x, y)$ es

$$dP = \frac{dx \wedge dy}{x} \quad . \tag{3.9}$$

La recta $x + y - 1 = 0$ pasa a $x'/a + y' - h - 1 = 0$, que comparando con la forma normal (3.5) nos dice que $a = \tan\phi$, $h = p/\operatorname{sen}\phi - 1$. De aquí, sustituyendo en (3.8) y haciendo el producto exterior resulta que la densidad para conjuntos de rectas $G(p, \phi)$ es

$$dG = \frac{dp \wedge d\phi}{\operatorname{sen}^2\phi \cos\phi} \quad . \tag{3.10}$$

4. $p + xq$, q.

Es el grupo

$$x' = x + c \quad , \quad y' = cx + y + h \tag{3.11}$$

que es transitivo para puntos y rectas; por tanto existe densidad invariante para ambos conjuntos de elementos. Para hallar la forma explícita de estas densidades, se observa que las formas de Maurer-Cartan son

$$\omega_1 = dc \quad , \quad \omega_2 = - c\, dc + dh \tag{3.12}$$

y por tanto la densidad cinemática $\omega_1 \wedge \omega_2 = dc \wedge dh$.

El punto $(0,0)$ pasa al (c, h) y por tanto la densidad para conjuntos de puntos es

$$dP = dx \wedge dy\,. \tag{3.13}$$

La recta $y = 0$ pasa a $cx' - y' + c^2 + h = 0$, de donde, comparando con (3.5) resulta $c = -\cot \phi$, $c^2 + h = p/\operatorname{sen} \phi$. De aquí, la densidad cinemática mediante los parámetros p, ϕ de la recta G, se expresa

$$dG = \frac{dp \wedge d\phi}{\operatorname{sen}^3 \phi} \tag{3.14}$$

que es la densidad para conjuntos de rectas.

5. q , $xp + yq$.

Es el grupo

$$x' = ax \quad , \quad y' = ay + h\,. \tag{3.15}$$

Los puntos se transforman transitivamente, pero no así las rectas, puesto que la transformada de una recta es siempre una paralela a ella. Por tanto: existe densidad invariante para conjuntos de puntos, pero no para conjuntos de rectas.

La expresión de la densidad para conjuntos de puntos se ve inmediatamente que es

$$dP = \frac{dx \wedge dy}{x^2} \tag{3.16}$$

6. q , $\gamma xp + yq$ $(\gamma \neq 0,1)$.

Es el grupo

$$x' = a^{\gamma} x \quad , \quad y' = ay + h \tag{3.17}$$

que es transitivo para puntos y rectas, o sea: existe densidad invariante para conjuntos de puntos y para conjuntos de rectas.

Las formas de Maurer-Cartan son

$$\omega_1 = \gamma \frac{da}{a} \quad , \quad \omega_2 = \frac{dh}{a} \, . \tag{3.18}$$

El punto (1,0) pasa al punto general (a^{γ}, h) y por tanto poniendo $x = a^{\gamma}$, $y = h$, la densidad para conjuntos de puntos resulta

$$dP = \frac{dx \wedge dy}{x^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}} \, . \tag{3.19}$$

Para rectas, se observa que la recta $y = x$ pasa a la recta general $y' = a^{-\gamma+1} x' + h$. Por tanto, comparando con (3.5) resulta $a^{-\gamma+1} = -\cot \phi$, $h = p/\operatorname{sen} \phi$ y la densidad para rectas resulta ser

$$dG = (-\tan \phi)^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}} \frac{dp \wedge d\phi}{\operatorname{sen}^3 \phi} \tag{3.20}$$

7. $q \, , p + yq$.

Es el grupo

$$x' = x + \log a \quad , \quad y' = ay + h \tag{3.21}$$

que es transitivo para puntos y rectas, o sea: existe densidad invariante para conjuntos de puntos y para conjuntos de rectas.

Las formas de Maurer-Cartan son

$$\omega_1 = \frac{da}{a} \quad , \quad \omega_2 = \frac{dh}{a} \tag{3.22}$$

y la medida cinemática $\omega_1 \wedge \omega_2$. La expresión de esta densidad para conjuntos de puntos resulta observando que el punto (0,0) se transforma en el punto general $(\log a, h)$ y por tanto, llamando x, y a sus coordenadas, resulta

$$dP = e^{-x} \, dx \wedge dy \, . \tag{3.23}$$

Para rectas se observa que la recta $y = x$ pasa a $y' = ax' - a \log a + h$ y por tanto es $a = -\cot \phi$, $h - a \log a = p/\operatorname{sen} \phi$ de donde, sustituyendo en (3.22) y multiplicando exteriormente, resulta la siguiente expresión para la densidad para conjuntos de rectas

$$(3.24) \qquad dG = \frac{dp \wedge d\phi}{\cos^2\phi \operatorname{sen} \phi}$$

8. q , $xp + (x + y)\, q$.

Es el grupo

$$(3.25) \qquad x' = ax \ , \ y' = a \log ax + ay + b$$

que es transitivo para puntos y rectas, o sea: existe densidad invariante para conjuntos de puntos y para conjuntos de rectas.

Aplicando (2.2) resulta

$$(3.26) \qquad \omega_1 = \frac{da}{a} \quad , \quad \omega_2 = \frac{db}{a} \ .$$

El punto $P(1,0)$ pasa al $P\,(a,\ a \log a + b)$ o sea, poniendo $a = x$, $a \log a + b = y$, sustituyendo en (3.26) y haciendo el producto exterior, resulta que la expresión de la densidad para puntos $P\,(x, y)$ es

$$(3.27) \qquad dP = \frac{dx \wedge dy}{x^2} \ .$$

Para rectas, tomando la $y = 0$ que se transforma en la recta general $y' = x' \log a + b$, y comparando como siempre con la ecuación normal (3.5) resulta $\log a = -\cot \phi$, $b = p/\operatorname{sen} \phi$ con lo cual, diferenciando, sustituyendo en (3.26) y haciendo el producto exterior, resulta

$$(3.28) \qquad dG = e^{\cot \phi} \frac{dp \wedge d\phi}{\operatorname{sen}^3 \phi} \ .$$

9. $q - 2yp$, $2xp + yq$.

Es el grupo

$$(3.29) \qquad x' = a^2x - 2ahy - h^2 \quad , \quad y' = ay + h$$

de las afinidades que dejan invariante a la cónica $y^2 + x = 0$. Puesto que tanto los puntos como las rectas se transforman transitivamente por este grupo, resulta que existe medida invariante para ambos elementos. Aplicando (2.2) resulta

$$\omega_1 = \frac{da}{a} \quad , \qquad \omega_2 = \frac{dh}{a} \; .$$

El punto $(1, 0)$ pasa al punto general $(a^2 - h^2, h)$; por tanto las coordenadas generales de un punto son $a^2 - h^2 = x \quad , \quad h = y$, con lo cual la sensidad cinemática $\omega_1 \wedge \omega_2$ toma la forma

$$dP = \frac{dx \wedge dy}{(y^2 + x)^{3/2}} \tag{3.30}$$

que es la expresión de la densidad para puntos.

Para rectas, se observa que la recta $x = 1$ se transforma en la recta general $x' + 2hy' - a^2 - h^2 = 0$, de donde, comparando con (3.5) resulta $2h = \tan\phi$, $a^2 + h^2 = p/\cos\phi$. De aquí, un cálculo inmediato da para la densidad cinemática la nueva expresión

$$dG = \frac{dp \wedge d\phi}{(4\, p \cos\phi - \operatorname{sen}^2\phi)^{3/2}} \tag{3.31}$$

que es la expresión de la densidad para conjuntos de rectas (siempre salvo un factor constante).

10. q , xq.

Es el grupo

$$x' = x \quad , \quad y' = ax + y + b \tag{3.32}$$

que no es transitivo para puntos, pero si lo es para las rectas. Por tanto: no existe densidad invariante para conjuntos de puntos, pero si existe para conjuntos de rectas.

Para hallarla se procede como siempre, observando que las formas de Maurer-Cartan son $\omega_1 = da$, $\omega_2 = db$ y que la recta $y = 0$ se transforma en la recta general $ax' - y' + b = 0$, por lo cual se puede poner $a = \cot\phi$, $b = p/\operatorname{sen}\phi$ y la densidad para conjuntos de rectas (igual a la densidad cinemática $da \wedge db$) resulta

$$dG = \frac{dp \wedge d\phi}{\operatorname{sen}^3\phi} \tag{3.33}$$

11. q , yq.

Es el grupo

$$x' = x \quad , \quad y' = ay + b, \tag{3.34}$$

No es transitivo para los puntos, pero si para las rectas, o sea: no existe densidad invariante para conjuntos de puntos, pero si existe para conjuntos de rectas. Para hallar esta última basta observar que aplicando (2.2) resulta

$$\omega_1 = \frac{da}{a}, \quad \omega_2 = \frac{db}{a} \tag{3.35}$$

y que la recta $y = x$ pasa a la recta general $y' = ax' + b$, por lo cual se puede poner $a = -\cot\phi$, $b = p/\text{sen}\phi$ y por consiguiente la densidad para conjuntos de rectas (igual a la densidad cinemática $\omega_1 \wedge \omega_2$) resulta valer

$$dG = \frac{dp \wedge d\phi}{\cos^2\phi \ \text{sen}\phi}. \tag{3.36}$$

4. Grupos proyectivos dependientes de 3 parámetros. Vamos a analizar uno por uno.

1. p, q , $xp + yq$.

Es el grupo

$$x' = ax + c, \quad , \quad y' = ay + h. \tag{4.1}$$

No es transitivo para las rectas, pues toda recta se transforma en una paralela, pero si lo es para los puntos. Veamos si para estos últimos existe densidad invariante.

Según (2.2) las formas de Maurer-Cartan son

$$\omega_1 = \frac{da}{a} \quad \omega_2 = \frac{dc}{a} \quad \omega_3 = \frac{dh}{a} \tag{4.2}$$

y las ecuaciones de estructura, según (2.3),

$$d\omega_1 = 0 \quad , \quad d\omega_2 = -\ \omega_1 \wedge \omega_2 \quad , \quad d\omega_3 = -\ \omega_1 \wedge \omega_3. \tag{4.3}$$

El punto (0,0) se transforma en el punto general (c, h); el sistema que define los puntos es por tanto $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$. Si existe densidad invariante, ella debe ser $\omega_2 \wedge \omega_3$ y para que esta forma sea una densidad, según la teoría general [5], [6], debe ser nula su diferencial exterior. Teniendo en cuenta las ecuaciones de estructura (4.3), se tiene

$$d(\omega_2 \wedge \omega_3) = -2\, \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \neq 0.$$

Por tanto: no existe densidad invariante para conjuntos de puntos ni para conjuntos de rectas.

2. $p\,, 2xp + yq \quad , \quad (xp + yq.$

Es el grupo

$$(4.4) \qquad x' = \frac{ax+b}{cx+h} \quad , \quad y' = \frac{y}{cx+h} \quad , \quad ah - bc = 1.$$

Las matrices que aparecen en (2.5) son en este caso

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & h \end{pmatrix} \quad , \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} h & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ -c & 0 & a \end{pmatrix}$$

y por tanto las formas de Maurer-Cartan son

$$(4.5) \qquad \omega_1 = c db - a dh, \; \omega_2 = h\, db - b\, dh, \; \omega_3 = -c\, da + a\, dc$$

y las ecuaciones de estructura, según (2.6),

$$(4.6) \qquad d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_3 \; , \; d\omega_2 = 2\omega_1 \wedge \omega_2 \; , \; d\omega_3 = 2\omega_3 \wedge \omega_1 .$$

El punto (0,1) se transforma en el punto general $(b/h,\, 1/h)$. Por tanto las ecuaciones que definen los puntos son $\omega_2 = 0$, $\omega_1 = 0$. Siendo $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = 0$, resulta que existe densidad para conjuntos de puntos. Para hallar la forma explícita de la misma basta poner $x = b/h$, $y = 1/h$, con lo cual resulta (teniendo en cuenta la relación $ah - bc = 1$), $\omega_1 \wedge \omega_2 = - dh \wedge db = h^3\; dx \wedge \wedge\, dy = y^{-3}\, dx \wedge dy$, o sea, la densidad para conjuntos de puntos es

$$(4.7) \qquad dP = \frac{dx \wedge dy}{y^3} .$$

Para rectas, se observa que la recta $y = x$ se transforma en la recta general $y' = hx' — b$. Las ecuaciones que definen las rectas son por tanto $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$. Siendo $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = 0$, resulta que las rectas tienen también densidad invariante. Para hallar su forma explícita, comparando $y' = hx' — b$ con la forma normal (3.5) resulta $h = — \cot \phi$, $b = — p/\mathrm{sen}\, \phi$ y por tanto el producto $\omega_1 \wedge \omega_2 = dh \wedge db$ se escribe

$$dG = \frac{dp \wedge d\phi}{\mathrm{sen}^3 \phi} \tag{4.8}$$

Obsérvese que en coordenadas homogéneas (x, y, t) el grupo (4.4) se escribe

$$x' = ax + bt \ , \ y' = y \ , \ t' = cx + ht \tag{4.9}$$

con la condición $ah — bc = 1$ que se puede imponer siempre por tratarse de coordenadas homogéneas. Por el cambio de coordenadas $x \to x$, $y \to t$, $t \to y$ el grupo (4.9) se escribe $x' = ax + by$, $y' = cx + hy$, $t' = t$ o bien, pasando nuevamente a coordenadas no-homogéneas

$$x' = ax + by \, , \ y' = cx + hy \, , \ ah — bc = 1, \tag{4.10}$$

que es el grupo de las centro-afinidades unimodulares. La existencia de densidad para puntos y rectas, invariante respecto de este grupo, es conocida y tiene mucha importancia [4].

3. $p + yq, \ q \, , xq$.

Es el grupo

$$x' = x + \log c \ , \ y' = ax + cy + h \, , \tag{4.11}$$

Aplicando (2.2) resulta que las formas de Maurer-Cartan son

$$\omega_1 = \frac{da}{c} \, , \ \omega_2 = \frac{dc}{c} \ \ \omega_3 = — \frac{a\, dc}{c^2} + \frac{dh}{c} \tag{4.12}$$

y las ecuaciones de estructura

$$d\omega_1 = \omega_1 \wedge \omega_2 \, , \ d\omega_2 = 0 \, , \ d\omega_3 = — \omega_2 \wedge \omega_3 — \omega_1 \wedge \omega_2 \, . \tag{4.13}$$

El punto (0,0) pasa al punto general ($\log c$, h); por tanto el sistema que define los puntos es $\omega_2 = \omega_3 = 0$; siendo $d(\omega_2 \wedge \omega_3) = 0$, como resulta aplicando las ecuaciones de estructura, existe densidad para conjuntos de puntos. Poniendo $\log c = x$, $h = y$, resulta que la forma explícita de esta densidad es

$$dP = e^{-x}\, dx \wedge dy. \tag{4.14}$$

Para conjuntos de rectas se observa que la recta $y = 0$ se transforma en la recta general $y' = ax' + h - a \log c$. Para que esta recta quede fija debe ser $da = 0$, $d(h - a \log c) = 0$, o sea $\omega_1 = 0$, $\omega_3 = 0$. Según las ecuaciones de estructura es $d(\omega_1 \wedge \omega_3) = 2\,\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \neq 0$. Por tanto: no existe densidad invariante para conjuntos de rectas.

4. p , q, $(\alpha + 1)\, xp + (\alpha - 1)\, yq$.

Es el grupo

$$x' = a^{\alpha+1}\, x + c \quad , \quad y' = a^{\alpha-1}\, y + h, \tag{4.15}$$

para el cual las formas de Maurer-Cartan son

$$\omega_1 = \frac{da}{a}\,, \quad \omega_2 = \frac{dc}{a^{\alpha+1}}\,, \quad \omega_3 = \frac{dh}{a^{\alpha-1}} \tag{4.16}$$

y las ecuaciones de estructura

$$d\omega_1 = 0, d\omega_2 = -(\alpha + 1)\omega_1 \wedge \omega_2, d\omega_3 = -(\alpha - 1)\omega_1 \wedge \omega_3. \tag{4.17}$$

El punto (0,0) pasa al punto general (c, h). Las ecuaciones que definen los puntos son, por tanto, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$. Siendo $d(\omega_2 \wedge \omega_3) = -2\,\alpha\,\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \neq 0$, resulta: no existe densidad invariante para conjuntos de puntos, excepto para el caso $\alpha = 0$.

El caso $\alpha = 0$ corresponde al grupo

$$x' = ax + c \quad , \quad y' = \frac{1}{a}\, y + h \tag{4.18}$$

para el cual la densidad para los puntos es

$$dP = dx \wedge dy. \tag{4.19}$$

Para rectas, se observa que la recta $y = x$ se transforma en la $y' = a^{-2}x' - c\,a^{-2} + h$; por tanto las ecuaciones que definen las rectas son $\omega_1 = 0$, $\omega_2 - \omega_3 = 0$. Siendo $d(\omega_1 \wedge (\omega_2 - \omega_3) = 0$, resulta que existe densidad para conjuntos de rectas. La forma explícita de la misma resulta de las igualdades $a^2 = -\tan\phi$, $-c/a^2 + h = p/\mathrm{sen}\phi$, de donde

$$\omega_1 \wedge (\omega_2 - \omega_3) = \frac{dp \wedge d\phi}{2\,a^{\alpha+1}\ \mathrm{sen}\phi\ \cos^2\phi}$$

o bien, prescindiendo de un factor constante,

$$dG = \frac{dp \wedge d\phi}{(-\tan\phi)^{(\alpha+1)/2}\ \mathrm{sen}\phi\ \cos^2\phi} \tag{4.20}$$

Para el caso $\alpha = 0$ del grupo (4.18) esta densidad toma la forma

$$dG = \frac{dp \wedge d\phi}{(-\mathrm{sen}\ 2\phi)^{3/2}} \tag{4.21}$$

La existencia de densidad invariante para puntos y rectas para el grupo (4.18) era de prever, puesto que este grupo es proyectivamente equivalente al de los movimientos del plano euclidiano. En efecto,, el grupo de los movimientos es

$$x' = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\theta + a,\quad y' = x\,\mathrm{sen}\theta + y\cos\theta + b \tag{4.22}$$

de donde

$$x' + i\,y' = e^{i\theta}(x + iy) + a + ib,$$
$$x' - iy' = e^{-i\theta}(x - iy) + a - ib$$

y por el cambio lineal de coordenadas $X = x + iy$, $Y = x - iy$, poniendo $e^{i\theta} = A$, $a + ib = B$, $a - ib = C$, resulta

$$X' = AX + B, \qquad Y' = \frac{1}{A}\,Y + C$$

que es el grupo (4.18).

5. q , xp , yq.

Es el grupo

(4.23) $$x' = ax, \quad , \quad y' = by + h.$$

Las fórmulas (2.2) y (2.3) dan

(4.24) $$\omega_1 = \frac{da}{a} \quad , \quad \omega_2 = \frac{db}{b} \quad , \quad \omega_3 = \frac{dh}{b}$$

(4.25) $$d\omega_1 = 0, \quad d\omega_2 = 0, \quad d\omega_3 = -\omega_2 \wedge \omega_3 .$$

En el punto (1,0) pasa al punto general (a, h) y por tanto las ecuaciones que definen los puntos son $\omega_1 = 0$, $\omega_3 = 0$. Siendo $d(\omega_1 \wedge \omega_3) = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \neq 0$, resulta: no existe densidad invariante para conjuntos de puntos.

La recta $y = x$ pasa a $y' = (b/a)x' + h$. Las ecuaciones que definen las rectas son, por tanto, $\omega_2 - \omega_1 = 0$, $\omega_3 = 0$ y siendo $d(\omega_3 \wedge (\omega_2 - \omega_1)) = -\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \neq 0$, resulta: no existe densidad invariante para conjuntos de rectas.

6. p , q , $xp + (x + y)q$.

Es el grupo

(4.26) $$x' = ax + c, \quad y' = (a \log a)\ x + ay + h$$

cuyas formas de Maurer-Cartan son

(4.27) $$\omega_1 = \frac{da}{a}, \quad \omega_2 = \frac{dc}{a}, \quad \omega_3 = -\log a \ \frac{dc}{a} + \frac{dh}{a}$$

y las ecuaciones de estructura

(4.28) $$d\omega_1 = 0, \ d\omega_2 = -\omega_1 \wedge \omega_2, \ d\omega_3 = -\omega_1 \wedge \omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_3 .$$

El punto (0,0) pasa al (c, h); por tanto las ecuaciones que definen los puntos son $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$. Siendo $d(\omega_2 \wedge \omega_3) = -2\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \neq 0$ resulta: no existe densidad invariante para conjunto de puntos.

La recta $y = 0$ pasa a la recta general $y' = x' \log a - c \log a + h$. Las ecuaciones que definen las rectas son, por consiguiente, $\omega_1 = 0$, $\omega_3 = 0$. Siendo $d(\omega_1 \wedge \omega_3) = 0$, resulta que existe densidad invariante para conjuntos de rectas. Para hallar su forma explícita se tienen las ecuaciones $\log a = -\cot\phi$, $-c \log a + h = p/\text{sen}\phi$ de donde sigue que la densidad $\omega_1 \wedge \omega_3$ para conjuntos de rectas se puede escribir

$$dG = e^{\cot\varphi} \frac{dp \wedge d\phi}{\text{sen}^3\phi}. \tag{4.29}$$

7. q , xq , $xp + \gamma\, yq$.

Es el grupo

$$x' = ax \quad , \quad y' = bx + a^{\gamma}\; y + h \tag{4.30}$$

para el cual se obtiene

$$\omega_1 = \frac{da}{a}, \quad \omega_2 = -\frac{b\, da}{a^{\gamma+1}} + \frac{db}{a^{\gamma}}, \quad \omega_3 = \frac{dh}{a^{\gamma}} \tag{4.31}$$

$$d\omega_1 = 0, \quad d\omega_2 = (1-\gamma)\, \omega_1 \wedge \omega_2, \quad d\omega_3 = -\gamma\; \omega_1 \wedge \omega_3. \tag{4.32}$$

El punto (1,0) se transforma en el punto general $(a,\, b + h)$ y por tanto las ecuaciones que definen los puntos son $\omega_1 = 0$, $\omega_2 + \omega_3 = 0$. Siendo $d(\omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega_3)) = 0$, resulta que existe densidad para puntos. Esta densidad es $\omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega_3)$, que poniendo $x = a$, $y = b + h$ resulta

$$dP = \frac{dx \wedge dy}{x^{\gamma+1}}. \tag{4.33}$$

Para ver si hay densidad para rectas, se procede como siempre. La recta $y = x$ se transforma en $y' = (a^{\gamma-1} + b/a)x' + h$. Las ecuaciones que definen las rectas son por tanto $(\gamma - 1)\omega_1 + \omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$. Siendo $d[\omega_3 \wedge ((\gamma-1)\omega_1 + \omega_2)] = (2\gamma - 1)\, \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \neq 0$, resulta: no existe densidad invariante para conjuntos de rectas.

Hace excepción el caso $\gamma = \dfrac{1}{2}$ para el cual existe densidad para rectas cuya forma explicita resulta ser, como se obtiene facilmente,

$$dG = \frac{dp \wedge d\phi}{\text{sen}^3\phi}. \tag{4.34}$$

8. p , q , xq.

Es el grupo

$$(4.35) \qquad x' = x + c \quad , \quad y' = ax + y + b$$

para el cual se obtiene

$$(4.36) \qquad \omega_1 = da, \qquad \omega_2 = dc, \qquad \omega_3 = -a\,dc + db,$$

$$(4.37) \qquad d\omega_1 = 0, \qquad d\omega_2 = 0, \qquad d\omega_3 = -\,\omega_1 \wedge \omega_2 .$$

La densidad para puntos existe en este caso de manera evidente y vale

$$(4.38) \qquad dP = dx \wedge dy .$$

La recta $y = x$ se transforma en la recta general $y=(a+1)x' - ac + b - c$. Las ecuaciones que definen las rectas son $\omega_1 = 0$, $\omega_3 - \omega_2 = 0$; siendo $d(\omega_1 \wedge (\omega_3 - \omega_2)) = 0$, resulta que existe densidad para rectas. Su forma explicita resulta de las igualdades $a + 1 = -\cot\phi$, $-ac + b - c = p/\mathrm{sen}\phi$, con lo cual la densidad para conjuntos de rectas $\omega_1 \wedge (\omega_3 - \omega_2)$ puede escribirse en la forma

$$(4.39) \qquad dG = \frac{dp \wedge d\phi}{\mathrm{sen}^3\phi} .$$

9. $p - xq$, q , $xp + 2yq$.

Es el grupo

$$(4.40) \qquad x' = ax + \frac{b}{a} \quad , \quad y' = -bx + a^2 y + h .$$

Según (2.2) y (2.3) sus formas de Maurer-Cartan son

$$(4.41) \qquad \omega_1 = \frac{da}{a}, \; \omega_2 = \frac{b\,da}{a^3} - \frac{db}{a^2} = -\frac{1}{a}\, d\left(\frac{b}{a}\right),$$

$$\omega_3 = \frac{b}{a^3}\, d\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{dh}{a^2}$$

y las ecuaciones de estructura

(4.42) $$d\omega_1 = 0 \ , \ d\omega_2 = \omega_2 \wedge \omega_1 \ , \ d\omega_3 = 2\,\omega_3 \wedge \omega_1 .$$

El punto (0,0) se transforma en el punto general $(b/a,\ h)$ y por tanto las ecuaciones que definen los puntos son $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$. Siendo $d(\omega_2 \wedge \omega_3) = -3\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \neq 0$, resulta: no existe densidad invariante para conjuntos de puntos.

La recta $y = 0$ se transforma en la recta general $y' = -(b/a)x' + b^2/a^2 + h$. Por consiguiente las ecuaciones que definen las rectas son las mismas $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$. Es decir: tampoco existe densidad invariante para conjuntos de rectas.

10. $p + y(xp + yq)\ ,\ \ q + x(xp + yq),\ \ xp - yq.$

Es el grupo del as proyectividades que dejan invariante a la cónica $2xy + 1 = 0$ (Kowalewski [3], pág. 389). Es, por consiguiente el llamado grupo de Cayley, para el cual se sabe que existe densidad para puntos y para rectas. La expresión y propiedades de estas densidades son bien conocidas ([6], pág. 110).

11. $q\ ,\ \ xq\ ,\ \ yq.$

Es el grupo

(4.43) $$x' = x \quad , \quad y' = ax + by + c .$$

No es transitivo respecto de los puntos, pero si lo es respecto de las rectas. Siendo

(4.44) $$\omega_1 = \frac{da}{b}\ , \quad \omega_2 = \frac{db}{b}\ , \quad \omega_3 = \frac{dc}{b}$$

(4.45) $$d\omega_1 = \omega_1 \wedge \omega_2\ , \quad d\omega_2 = 0\ , \quad d\omega_3 = -\,\omega_2 \wedge \omega_3$$

y observando que la recta $y = 0$ se transforma en la $y' = ax' + c$ y que, por tanto, las ecuaciones que definen las rectas son $\omega_1 = 0$, $\omega_3 = 0$, se calcula $d(\omega_1 \wedge \omega_3) = 2\,\omega_1 \wedge \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \neq 0$. Por consiguiente: tampoco existe densidad invariante para conjuntos de rectas.

5. Grupos proyectivos dependientes de 4 parámetros. Son los siguientes:

1. $p\ ,\ xp\ ,\ q\ ,\ y\,q.$

Es el grupo

(5.1) $$x' = ax + b \ , \ y' = cy + h \, .$$

Por el método general se obtiene

(5.2) $$\omega_1 = \frac{da}{a} \ , \quad \omega_2 = \frac{dc}{c} \ , \quad \omega_3 = \frac{db}{a} \ , \quad \omega_4 = \frac{dh}{c}$$

con las ecuaciones de estructura

(5.3) $$d\omega_1 = 0, \ d\omega_2 = 0, \ d\omega_3 = -\omega_1 \wedge \omega_3, \ d\omega_4 = -\omega_2 \wedge \omega_4 \, .$$

El punto (0,0) pasa al (b, h); luego las ecuaciones que definen los puntos son $\omega_3 = 0$, $\omega_4 = 0$. Se tiene $d(\omega_3 \wedge \omega_4) = -\omega_1 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 + \omega_3 \wedge \omega_2 \wedge \omega_4 \neq 0$. Por tanto: no hay densidad invariante para conjuntos de puntos.

La recta $y = x$ pasa a $y' = (c/a)\, x' - cb/a + h$ y por tanto las ecuaciones que definen las rectas son $\omega_1 - \omega_2 = 0$, $\ - \omega_4 = 0$. Siendo $d[(\omega_1 - \omega_2) \wedge (\omega_3 - \omega_4)] \neq 0$, resulta: no hay densidad invariante para conjuntos de rectas.

Este grupo es isomorfo al grupo de las semejanzas del plano:

$$x' = \rho\, (x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta) + a,$$

$$y' = \rho\, (x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta) + b$$

En efecto, se tiene

$$x' + iy' = \rho\, e^{i\theta}\, (x + iy) + a + ib \ , \ x' - iy' = \rho\, e^{-i\theta}\, (x - iy) +$$

$+ a - ib$ y con el cambio de coordenadas $X = x + iy$, $Y = x - iy$ y poniendo

$$\rho e^{i\theta} = A \, , \ \rho e^{-i\theta} = B \, , \ a + ib = C \, , \ a - ib = H$$

resulta $$X' = AX + C \, , \quad Y' = BY + H$$

que es el grupo (5.1). Se tiene así el hecho ya conocido de que para el grupo de las semejanzas del plano no existe densidad invariante para puntos ni para rectas. En cambio se puede ver que existe densidad invariante para conjuntos de círculos (STOKA [9]), la cual vale $R^{-2}\, dx \wedge dy$, si R es el radio y x,y son las coordenadas cartesianas ortogonales del centro.

2. p, q, xq, $xp + \alpha yq$.

Es el grupo

$$x' = ax + b\,, \quad y' = cx + a^{\alpha}\, y + h\,. \tag{5.4}$$

Según (2.2) y (2.3) se obtiene

$$\omega_1 = \frac{da}{a}\,, \quad \omega_2 = -\frac{c\,da}{a^{\alpha+1}} + \frac{dc}{a^{\alpha}}\,, \quad \omega_3 = \frac{db}{a}\,, \tag{5.5}$$

$$\omega_4 = -\frac{c\,db}{a^{\alpha+1}} + \frac{dh}{a^{\alpha}}$$

con las ecuaciones de estructura

$$d\omega_1 = 0, \quad d\omega_2 = (1-\alpha)\,\omega_1 \wedge \omega_2, \quad d\,\omega_3 = -\,\omega_1 \wedge \omega_3, \tag{5.6}$$

$$d\omega_4 = -\,\omega_2 \wedge \omega_3 . -\,\alpha\,\omega_1 \wedge \omega_4 .$$

El punto (0,0) se transforma en el punto general (b, h) y por tanto las ecuaciones de los puntos son $\omega_3 = 0$, $\omega_4 = 0$. Es $d(\omega_3 \wedge \omega_4) = -(1+\alpha)\,\omega_1 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4$ Por tanto, no existe densidad invariante para conjuntos de puntos, excepto para el caso $\alpha = -1$

Para ver que sucede con los conjuntos de rectas, se observa que la recta $y = 0$ se transforma en la $y' = (c/a)x' - cb/a + h$; por tanto las ecuaciones que definen las rectas son $\omega_2 = 0$, $\omega_4 = 0$. Siendo $d(\omega_2 \wedge \omega_4) = (1 - 2\,\alpha)\,\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_4$, resulta: no hay densidad invariante para rectas excepto en el caso $\alpha = 1/2$.

Por consiguiente conviene distinguir los dos casos siguientes:

a) $\alpha = -1$. Es el grupo

$$x' = ax + b\,, \quad y' = cx + \frac{y}{a} + h \tag{5.6}$$

que admite densidad para puntos (pero no para rectas), que vale

$$dP = dx \wedge dy\,. \tag{5.7}$$

b) $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Es el grupo

$$x' = ax + b\,, \quad y' = cx + a^{1/2}y + h \tag{5.8}$$

que admite densidad para rectas (pero no para puntos). La forma explícita de esta densidad se obtiene, como siempre, comparando la recta $y' = (c/a)x' - cb/a + h$, transformada de la $y = 0$, con su ecuación normal (3.5), lo cual da $c/a. = -\cot\phi$, $-cb/a + h = p/\text{sen}\phi$. De aquí, la expresión $\omega_2 \wedge \omega_4$ de la densidad para conjuntos de rectas resulta que se puede escribir

$$(5.9) \qquad dG = \frac{dp \wedge d\phi}{\text{sen}^3\phi}$$

3. p , q , xq , yq.

Es el grupo

$$(5.10) \qquad x' = x + a \quad , \quad y' = bx + cy + h.$$

Las formas de Maurer-Cartan y las ecuaciones de estructura son

$$(5.11) \quad \omega_1 = \frac{d\,b}{c}, \quad \omega_2 = -\frac{d\,c}{c}, \quad \omega_3 = -\frac{b\,da}{c} + \frac{d\,h}{c}, \quad \omega_4 = da$$

$$(5.12) \quad d\omega_1 = \omega_1 \wedge \omega_2, d\omega_2 = 0, \ d\omega_3 = -\omega_1 \wedge \omega_4 + \omega_3 \wedge \omega_2, d\omega_4 = 0.$$

El punto (0,0) pasa al (a, h); por tanto las ecuaciones que definen los puntos son $\omega_3 = 0$, $\omega_4 = 0$ y siendo $d(\omega_1 \wedge \omega_4) \neq 0$, resulta que no existe densidad invariante para conjuntos de puntos.

La recta $y = 0$ pasa a la $y' = bx' - ba + h$; por tanto las rectas están definidas por $\omega_1 = 0$, $\omega_3 = 0$, y siendo $d(\omega_1 \wedge \omega_3) = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \neq 0$, resulta: no existe densidad invariante para conjuntos de rectas.

4. q , xp , xq , yq.

Es el grupo

$$(5.13) \qquad x' = ax \quad , \quad y' = bx + cy + h$$

cuyas formas de Maurer-Cartan y ecuaciones de estructura, según (2.2) y (2.3), son

$$(5.14) \qquad \omega_1 = \frac{da}{a}, \quad \omega_2 = -\frac{b\,da}{ac} + \frac{db}{c}, \quad \omega_3 = \frac{dc}{c}, \quad \omega_4 = \frac{dh}{c}$$

(5.15)

$$d\omega_1 = 0,\ d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_2 \wedge \omega_3,\ d\omega_3 = 0,\ \ d\omega_4 = -\, \omega_3 \wedge \omega_4 .$$

El punto (1,0) pasa al punto general $(a, b + h)$; por tanto las ecuaciones que definen los puntos son $\omega_1 = 0$, $\omega_2 + \omega_4 = 0$. Puesto que es $d[\omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega_4)] \neq 0$, resulta: no existe densidad invariante para conjuntos de puntos.

La recta $y = 0$ pasa a la recta general $y' = (b/a)x' + h$; por tanto las ecuaciones que definen las rectas son $\omega_2 = 0$, $\omega_4 = 0$. Siendo $d(\omega_2 \wedge \omega_4) = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_4 \neq 0$, resulta: no existe densidad invariante para conjuntos de rectas.

5. $p,\ xp,\ yq,\ x(xp + yq)$.

Es el grupo

$$(5.16) \qquad x' = \frac{ax + b}{cx + h}\ , \quad y' = \frac{ey}{cx + h} .$$

Na hace falta un estudio especial. En efecto, este grupo admite al grupo p, xp, yq (grupo nº 5 de 3 parámetros, con la permutación x por y) como subgrupo. Es el subgrupo qque resulta para $c = 0$. Como dicho grupo no admite densidad invariante para puntos ni para rectas, igualmente el grupo actual no admite densidad invariante para conjuntos de puntos ni para conjuntos de rectas.

6. Grupos dependientes de 5 parámetros. Son los siguientes:

1. $p\ ,\ q\ ,\ xq\ ,\ 2xp + yq\ ,\ x(xp + yq)$.

Es el grupo

$$(6.1) \quad x' = \frac{ax + c}{mx + r}\ , \quad y' = \frac{bx + y + h}{mx + r}\ , \quad (ar - mc = 1) .$$

Aplicando el método indicado en el nº 2 se obtiene

$$\omega_1 = r\, da - c\, dm \quad , \quad \omega_2 = r\, dc - c\, dr,$$

$$\omega_3 = (mh - br)\ da + db + (bc - ah)\ dm,$$

$$\omega_4 = (mh - br)\ dc + dh + (bc - ah)\ dr,$$

$$\omega_5 = -\, m\, da + a\, dm \quad , \quad \omega_6 = -\, \omega_1 = -\, m\, dc + a\, dr$$

con las ecuaciones de estructura

$$d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_5 \quad , \; d\omega_2 = 2\,\omega_1 \wedge \omega_2 \quad , \; d\omega_3 = \omega_3 \wedge \omega_1 + \omega_4 \wedge \omega_5$$

$$d\omega_4 = \omega_3 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_4 \quad , \quad d\omega_5 = 2\,\omega_5 \wedge \omega_1 \quad , \; d\omega_6 = \omega_5 \wedge \omega_2 .$$

El punto (0,0) se transforma en $(c/r,\, h/r)$ y para que se mantenga fijo debe ser $\omega_2 = 0$, $\omega_4 = 0$. Siendo

$$d(\omega_2 \wedge \omega_4) = 3\;\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_4 \neq 0,$$

resulta: no existe densidad para conjuntos de puntos.

La recta $y = 0$ se transforma en la recta $y' = (br - hm)\; x' + + ha - bc$ y para que sea fija debe ser $\omega_3 = 0$, $\omega_4 = 0$. Puesto que $d(\omega_3 \wedge \omega_4) = 0$ resulta que existe densidad para rectas. Para ver la interpretación geométrica de la misma, se observa que $br - hm = -\cot\phi$, $ha - bc = p/\mathrm{sen}\phi$, de donde $r\omega_3 - m\omega_4 = = d\phi\,/\,\mathrm{sen}^2\phi$, $-\,c\omega_3 + a\,\omega_4 = dp\,/\,\mathrm{sen}\phi + (\ldots)d\phi$, de donde resulta que la densidad $\omega_3 \wedge \omega_4$ se escribe

$$dg = \frac{dp \wedge d\phi}{\mathrm{sen}^3\phi} \,.$$

2. $p \;,\; q \;,\; xp \;,\; yq \;,\; xq.$

Es el grupo

$$x' = ax + m \quad , \quad y' = bx + cy + h \tag{6.2}$$

que tiene como subgrupo el nº 4 de 4 parámetros (para $m = 0$). Como este último grupo no admite densidad invariante para puntos ni para rectas, tampoco las admitirá el grupo actual.

3. $p \;,\; q \;,\; yp \;,\; xq \;,\; xp - yq.$

Es el grupo de las afinidades unimodulares

$$x' = ax + by + c, \quad , \quad y' = mx + gy + h \quad (ag - bm = 1) . \tag{6.3}$$

Es bien sabido que para este grupo existe densidad invariante para puntos ($dP = dx \wedge dy$) pero no existe densidad invariante para rectas (ver [6]).

7. Grupos proyectivos dependientes de 6 parámetros. Son los siguientes:

1. p , q , xp , yq , xq , $x(xp + yq)$.

Es el grupo

$$(7.1) \qquad x' = \frac{ax + by + c}{ny + r} \;, \quad y' = \frac{my + h}{ny + r} \,.$$

Para hallar las formas de Maurer-Cartan y las ecuaciones de estructura, vamos a seguir el segundo método indicado en el nº 2. La matriz A que allí aparece es ahora

$$(7.2) \qquad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & m & h \\ 0 & n & r \end{pmatrix}$$

con la condición det. $A = 1$. Los puntos A_0, A_1 A_2 son los puntos A_0 (a, b, c), $A_1(0, m, h)$, $A_2(0, n, r)$ (en coordenadas homogéneas). Según las fórmulas (2.8) y análogas, las formas de Maurer-Cartan no nulas resultan ser

$$\omega_{00} = (mr - nh)\, da, \omega_{01} = -(br - nc)\, da + ar\, db - an\, dc,$$

$$(7.3) \quad \omega_{02} = (bh - mc)\, da - ah\, db + am\, dc, \omega_{11} = ar\, dm - an\, dh,$$

$$\omega_{12} = - ah\, dm + am\, dh, \omega_{21} = ar\, dn - an\, dr, \omega_{22} = - ah\, dn + am\, dr$$

observándose la relación $\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} = 0$ que se obtiene diferenciando el determinante $| A_0\, A_1\, A_2 | = 1$.

Las ecuaciones de estructura son

$$d\, \omega_{ik} = \sum_s \omega_{is} \wedge \omega_{sk} \,.$$

Para que el punto A_0 se mantenga fijo de la relación $dA_0 = \omega_{00}\, A_0 + \omega_{01}\, A_1 + \omega_{02}\, A_2$ se deduce que debe ser $\omega_{01} = 0$, $\omega_{02} = 0$. Estas son las ecuaciones que definen los puntos. Aplicando las ecuaciones de estructura resulta $d(\omega_{01} \wedge \omega_{02}) = \pm 3\, \omega_{00} \wedge \omega_{01} \wedge \omega_{02} \neq 0$, lo cual prueba que no existe densidad invariante para conjuntos de puntos.

Para conjuntos de rectas, se observa que para mantener fija la recta $A_0\ A_1$ debe ser $\omega_{02} = 0$, $\omega_{12} = 0$. Aplicando las ecuaciones de estructura, teniendo en cuenta que las ω_{ij} que no figuran en (7.3) son nulas, resulta $d(\omega_{02} \wedge \omega_{12}) = 3\, \omega_{02} \wedge \omega_{22} \wedge \omega_{12} \neq 0$. Por consiguiente: no existe densidad invariante para conjuntos de rectas.

2. $p \quad , \quad q \quad , \quad xp \quad , \quad xq \quad , \quad yp \quad , \quad yq$.

Es el grupo afin general

$$x' = ax + by + c \quad , \quad y' = mx + ny + r \tag{7.4}$$

con $an - bm \neq 0$, para el cual se sabe que no existe densidad invariante ni para conjuntos de puntos ni para conjuntos de rectas [6].

Queda finalmente el grupo proyectivo general

$$p,\ q,\ xp,\ xq,\ yp,\ yq,\ x(xp + yq),\ y(xp + yq)$$

cuyas ecuaciones son

$$x' = \frac{ax + by + c}{mx + ny + r} \quad , \quad y' = \frac{ex + gy + h}{mx + ny + r} \tag{7.5}$$

Este grupo ha sido bien estudiado (Varga [12]) y también en [5], [6] y se sabe que no admite densidad invariante ni para conjuntos de puntos ni para conjuntos de rectas.

8. Resumen de resultado. De todo lo anterior resulta:

1. Los grupos proyectivos del plano dependientes de 2 parámetros para los cuales existe medida invariante para conjuntos de puntos y para conjuntos de rectas son los siguientes:

$$xp,\ yq; \quad xp,\ q; \quad p + xq,\ q; \quad q,\ \gamma xp + yq;$$

$$q,\ p + yq; \quad q,\ xp + (x + y)q; \quad q - 2yp,\ 2xp + yq.$$

2. Los grupos proyectivos del plano dependientes de 3 parámetros para los cuales existe medida invariante para conjuntos de puntos y para conjuntos de rectas del plano son los siguientes:

$$p,\ 2xp + yq,\ x(xp + yq); \quad p,\ q,\ xq; \quad q,\ xq,\ 2xp + yq;$$

$$p,\ q,\ xp - yq; \quad p + y(xp + yq),\ q + x(xp + yq),\ xp - yq.$$

De estos cuatro grupos, el último corresponde al grupo de Cayley y ha sido bien estudiado [6]; el cuarto es isomorfo al grupo de los movimientos del plano y su geometría integral es también bien conocida. Los otros tres grupos, en cambio, es probable merezcan un estudio más detallado desde el punto de vista de la geometría integral.

3. No existen grupos proyectivos del plano dependientes de más de 3 parámetros que admitan medida invariante para los conjuntos de puntos y para los conjuntos de rectas. En este caso, cabe sin embargo estudiar qué pasa con los conjuntos de pares de elementos (dos puntos, dos rectas, punto y recta). Hay grupos para los cuales estos conjuntos de pares admiten medida invariante y otros no. Algunos casos particulares son conocidos (ver [7], [8], y varios trabajos de Stoka [9], [10], [11] y Luccioni [13]), pero un estudio sistemático que agote y ordene todos los casos posibles no ha sido hecho, aunque no parece que ofrezca mayores dificultades. (Ver [14]).

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires.

BIBLIOGRAFIA

[1] Blaschke, W., *Integralgeometrie*, Actualités Scient. et Industrielles, 252, Hermann, Paris, 1935.

[2] Chern, S. S., *On integral geometry in Klein spaces*, Annals of Mathematics, 43, 1942, 178-189.

[3] Kowalewski, G., *Einführung in die Theorie der Kontinuerlichen Gruppen*, Leipzig, 1931.

[4] Santaló, L. A., *Un invariante afin para los cuerpos convexos del espacio de* n *dimensiones*, Portugaliae Mathematica, 8, 1949, 155-161.

[5] — — *Integral geometry in projective and affine spaces*, Annals of Mathematics, 51, 1950, 739-755.

[6] — —*Introduction to Integral Geometry*, Actualités Scientifiques et Industrielles, Hermann, Paris, 1953.

[7] — — *Two applications of the integral geometry in affine and projective spaces*, Publicationes Mathem. Debrecen, 7, 1960, 226-237.

[8] — — *On the measure of sets of parallel linear subspaces in affine space*, Canadian J. of Mathematics, 14, 1962, 313-319.

[9] Stoka, M. I., *Geometria Integrale in uno spazio euclideo E_n*, Bull. Unione Mat. Italiana, XIII, 1958, 470-485.

[10] — — *Géometrie intégrale dans un space E_n*, Revue de Mathématiques Pures et Appliquées, Acad. R. P. Roumaine, IV, 1959, 123-156.

[11] — — *Géometrie intégrale dans un espace E_n*, Revista de Matemáticas y Física Teórica, Univ. N. de Tucumán, XIV, 1962, 25-59.

[12] VARGA, O., *Ueber Masse von Paaren linearer Mannigfaltigkeiten in Projektiven Raum*, Re. Mat. Hispano-Americana, 10, 1935, 241-264.

[13] LUCCIONI, Raúl E., *Geometría Integral en espacios proyectivos*, Revista de Matemática y Física Teórica, Universidad N. de Tucumán, vol. XV, 1964, 53 - 80.

[14] SANTALÓ, L. A., *Integral geometry of the projective groups of the plane depending on more than three parameters*, Annales Scientifiques Univ. Iasi, vol. XI, 1965, 307-335.

BIBLIOGRAFIA

YU TAKEUCHI: *Espacio de Hilbert*, 109 páginas. Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional. Bogotá, Colombia, 1967.

Este pequeño fascículo expone el contenido de un curso que el autor dictó en la Universidad Nacional de Bogotá.

Está escrito en un castellano relativamente correcto, y resulta sumamente claro, a pesar de que la terminología usada se aparta frecuentemente de la habitual: "completez", "recorrido" en lugar de rango, "subespacio determinado" en lugar de "subespacio generado", 'en casi toda parte" como traducción de "almost everywhere", etc.

Contiene dos capítulos: el primero, Espacio de Hilbert, trata sucesivamente: 1, Espacio vectorial de dimensión finita; 2, Espacio de Hilbert; 3, Convergencia débil; 4, Sistemas ortonormales; 5, Espacios funcionales; 6, Polinomios de Hermite y polinomios de Laguerre; 7, Espacio dual del espacio de Hilbert; 8, Operadores lineales; 9, Matrices infinitas; 10, Transformación de Fourier.

En cuanto al capítulo 2, Análisis espectral, trata: 11, Nociones sobre el problema de los valores propios de un operador; 12, Proyección; 13, La representación integral de un operador autoadjunto. Cierra el volúmen una sucinta bibliografía, que incluye algunos títulos de autores japoneses.

G. Hansen