Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 24, Número 1, 1968.

VALORES LIMITES DE INTEGRALES MULTIPLICATIVAS DE STIELTJES

por Domingo A. Herrero

En los trabajos de V.P. Potapov y de I.P.Guinsburg ([1],[2]) sobre espacios H^p y N de matrices finitas, juegan un rol preponderante las integrales multiplicativas de Stieltjes del siguiente tipo:

$$F(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} \exp.\ \{S(r,\theta-\psi)dE(\psi)\} =$$

$$= \lim_{\Delta\psi_j \to 0} \prod_{j=1}^{m} \exp.\ \{S(r,\theta-\psi_j)\Delta E(\psi_j)\} \qquad (1)$$

donde $E(\psi)$ es-para cada ψ-una matriz hermitiana de nxn, de variación acotada en el siguiente sentido

$$\text{Var.}\ \{E(\psi);0\text{-}2\pi\} = \sup \sum_{j=1}^{m} \|E(\psi_j)-E(\psi_{j-1})\| = R < \infty \qquad (2)$$

$0 = \psi_0 < \psi_1 < \ldots < \psi_m = 2\pi$; $S(r,\theta-\psi)$ es el núcleo de Schwarz, y el signo "π" debe entenderse "orientado", es decir que los factores están ordenados de acuerdo a los subíndices j. (Algunos autores indican la integral multiplicativa con un pequeño arco sobre el signo de integración).

En ([1]) Potapov probó la existencia de límite en la expresión (1) para el caso en que E es una matriz de nxn y S es cualquier función uniformemente continua de ψ. No obstante, su demostración sigue siendo válida en el caso en que E es una matriz infinita, que define un operador en el espacio de Hilbert ℓ^2 de las sucesiones complejas de cuadrado sumable. Este último caso es el que aquí interesa. El siguiente teorema extiende un resultado debido a L.A. Sajnovich ([3]), sobre integrales multiplicativas de Lebesgue:

TEOREMA: *Sea* $E(\psi) = (E_{ik}(\psi))_{i=1,2,\ldots}$ *una matriz hermitiana infinita que, como operador en* ℓ^2 *satisface la condición* (2). *Si*

$$F(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} \exp.\{S(r,\theta-\psi)dE(\psi)\} \quad ; \ 0 \leq r < 1 \ ,$$

entonces F *define un operador en* ℓ^2, *holomorfo en el disco unitario cuyos valores límites no-tangenciales existen para casi todo* $\theta \in (0,2\pi)$, *cuando* $z = re^{ia}$ *tiende a* $e^{i\theta}$; *la matriz de este operador límite admite la expresión:*

$$F(e^{i\theta}) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\{\int_0^{\theta-\varepsilon} \exp\left\{\frac{i}{2\pi}\cot\frac{1}{2}(\psi-\theta)dE(\psi)\right\} . \exp\{A(\theta)\} . \int_{\theta+\varepsilon}^{2\pi}\{\exp\frac{i}{2\pi}\cot\frac{1}{2}(\psi-\theta)dE(\psi)\}\right\}$$

siendo $A(\theta) = (d/d\psi)E(\psi)|_{\psi=\theta}$; $\|A(\theta)\| = M < \infty$.

Demostración: Por definición, tomando $\Delta\psi = (2\pi/m)$,

$$F(re^{i\theta}) = \lim_{\Delta\psi\to 0}\prod_{j=1}^{m}\left\{\exp.\ \{S(r,\theta-\psi_j)\Delta E(\psi_j)\}\right\} .$$

Dados u,v, dos elementos de ℓ^2, las funciones holomorfas

$$\left\langle (\prod_{j=1}^{m}\exp\ \{S(r,\theta-\psi_j)\Delta E(\psi_j)\}\ )(u),v\right\rangle$$

convergen uniformemente sobre compactos interiores al disco unitario; por tanto el límite de los productos determina la matriz de un operador continuo (y lineal) sobre ℓ^2, para cada z fijo, $|z|<1$. Más aún, este operador será holomorfo respecto a z.

Dado $\delta > 0$ existe un $m_o(\delta)$ tal que si $m_o \leq m$, entonces

$$\|F(re^{\theta})\| \leq \prod_{j=1}^{m}\exp\{\ S(r,\theta-\psi_j)\Delta E(\psi_j)\} + \delta \quad ,\text{ y también}$$

$$\sum_{j=1}^{m}P(r,\theta-\psi_j)\ \|\Delta E(\psi_j)\| \leq \int_0^{2\pi} P(r,\theta-\psi)\ \|dE(\psi)\| + \delta \ , \text{ donde}$$

$$P(r,\theta-\psi) = \frac{1}{2\pi}\ \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\psi)} = \operatorname{Re} S(r,\theta-\psi)$$ es el núcleo de Poisson. Utilizando estas desigualdades y el hecho de que $E(\psi)$ es hermitiana obtenemos

$$\begin{aligned}\|F(re^{i\theta})\| &\leq \|\prod_{j=1}^{m}\exp\{P(r,\theta-\psi_j)\Delta E(\psi_j)\}\| + \delta \leq\\ &\leq \exp\ \{\ \textstyle\sum_{j=1}^{m}\ P(r,\theta-\psi_j)\|\Delta E(\psi_j)\|\} + \delta \leq\\ &\leq \exp\{\int_0^{2\pi} P(r,\theta-\psi)\|dE(\psi)\| + \delta\} + \delta\end{aligned}$$

Ahora bien, dado que $\delta > 0$ es arbitrario, se sigue de aquí

$$\|F(re^{i\theta})\| \leq \exp\int_0^{2\pi} P(r,\theta-\psi)\ \|dE(\psi)\|$$

Por lo tanto, para $r < 1$ e (i,k) fijos se tiene:

$$\int_0^{2\pi}\log^+|F_{ik}(re^{i\theta})|d\theta \leq \int_0^{2\pi}\log^+\|F(re^{i\theta})\|d\theta \leq$$

$$\leq \iint_0^{2\pi} P(r,\theta-\psi)\ \|dE(\psi)\|\ d\theta = \int_0^{2\pi} \|dE(\psi)\| = R < \infty.$$

Por lo tanto, $F_{ik}(z)$ pertenece a la clase de Nevanlinna N del dis̲co, y los valores límites no tangenciales de $F_{ik}(z)$ existen para ca̲si todo punto de la circunferencia.Luego,$F(e^{i\theta})$ existe ctp $\theta\varepsilon(0,2\pi)$ y determina un operador lineal y acotado sobre ℓ^2;en efecto,para ctp θ:

$$\lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} P(r,\theta-\psi)\ \|dE(\psi)\| = \|(d/d\psi)E(\psi)\|_{\psi=\theta} = \|A(\theta)\| = M < \infty.$$

de donde se deduce que $\|F(re^{i\theta})\| \leq e^{M+1} = K < \infty$

para $r_1 < r < 1$, y por tanto $\|F(e^{i\theta})\| \leq K$

Sea $E(\psi) = E_a(\psi) + E_s(\psi)$ la descomposición de $E(\psi)$ en sus partes absolutamente continua y singular, resp.. Si θ es un punto de Lebesgue

i) $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} \|A(\psi) - A(\theta)\| d\psi = 0$, donde $A(\psi) = (d/d\psi)E_a(\psi) = (d/d\psi)E(\psi)$

ii) $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} dE_s(\psi) = 0$

Por lo tanto, si indicamos $\beta(\psi) = \int_\theta^{\theta+\psi} \|dE(\psi) - A(\theta)d\psi\|$

$$\gamma(\varepsilon) = \varepsilon^2 + [\varepsilon(\beta(\varepsilon) - \beta(-\varepsilon))]^{1/2}$$

tendremos

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \gamma(\varepsilon)/\varepsilon = 0 \ ; \ \lim_{\varepsilon\to 0^+} (\beta(\varepsilon) - \beta(-\varepsilon))/\gamma(\varepsilon) = 0$$

El teorema quedará probado si demostramos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|F((1-\gamma(\varepsilon))e^{i\theta}) - \int_0^{\theta-\varepsilon} \exp\{\tfrac{i}{2\pi}\cot\tfrac{1}{2}(\psi-\theta)dE(\psi)\} . e^{A(\theta)} . \int_{\theta+\varepsilon}^{2\pi} \exp\{\tfrac{i}{2\pi}\cot\tfrac{1}{2}(\psi-\theta)dE(\psi)\}\| = 0$$

Pero, como es fácil observar, la expresión anterior es menor o igual a

$$\left\|\int_0^{\theta-\varepsilon} \exp\{S(1-\gamma,\theta-\psi)dE(\psi)\} - \int_0^{\theta-\varepsilon} \exp\{\tfrac{i}{2\pi}\cot\tfrac{1}{2}(\psi-\theta)dE(\psi)\}\right\|$$

$$\left\|\int_{\theta+\varepsilon}^{2\pi} \exp\{S(1-\gamma,\theta-\psi)dE(\psi)\right\| +$$

$$+\left\| \int_0^{\theta-\varepsilon} \exp\{ \tfrac{i}{2\pi} \cot \tfrac{1}{2}(\psi-\theta) dE(\psi)\} \right\| \cdot \left\| \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} \exp\{ S(1-\gamma,\theta-\psi) dE(\psi)\} \right\| \cdot$$

$$\cdot \left\| \int_{\theta+\varepsilon}^{2\pi} \exp\{ S(1-\gamma,\theta-\psi) dE(\psi)\} - \int_{\theta+\varepsilon}^{2\pi} \exp\{ \tfrac{i}{2\pi} \cot \tfrac{1}{2}(\psi-\theta) dE(\psi)\} \right\| +$$

$$+\left\| \int_0^{\theta-\varepsilon} \exp\{ \tfrac{i}{2\pi} \cot \tfrac{1}{2}(\psi-\theta) dE(\psi)\} \right\| \cdot \left\| \int_{\theta+\varepsilon}^{2\pi} \exp\{ \tfrac{i}{2\pi} \cot \tfrac{1}{2}(\psi-\theta) dE(\psi)\} \right\| \cdot$$

$$\left[\left\| \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} \exp\{ S(1-\gamma,\theta-\psi) dE(\psi)\} - \exp\{ A(\theta) \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} S(1-\gamma,\theta-\psi) d\psi\} \right\| + \right.$$

$$\left. + \left\| \exp\{ A(\theta) \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} S(1-\gamma,\theta-\psi) d\psi\} - e^{A(\theta)} \right\| \right] \leq K \{ I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \}$$

para $r_1 < r < 1$, siendo $I_1, \ldots, I_4$ las cuatro diferencias en el segundo miembro de la desigualdad.

Dados $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, existe $m_o(\delta)$, tal que si $m \geq m_o$ y $\delta = (\theta-\varepsilon)/m$ entonces vale (siempre para r en el dominio indicado):

$$\sum_{j=1}^{m} \left| S(1-\gamma,\theta-\psi_j) - \tfrac{i}{2\pi} \cot \tfrac{1}{2}(\psi_j-\theta) \right| \| \Delta E(\psi_j) \| \leq$$

$$\leq \int_0^{\theta-\varepsilon} \left| S(1-\gamma,\theta-\psi) - \tfrac{i}{2\pi} \cot \tfrac{1}{2}(\psi-\theta) \right| \| dE(\psi) \| + \delta$$

$$I_1 \leq \left\| \prod_{j=1}^{m} \exp\{ S(1-\gamma,\theta-\psi_j) \Delta E(\psi_j)\} - \right.$$

$$\left. - \prod_{j=1}^{m} \exp\{ \tfrac{i}{2\pi} \cot \tfrac{1}{2}(\psi_j-\theta) \Delta E(\psi_j)\} \right\| + \delta \leq$$

$$\leq 2K \sum_{j=1}^{m} \left\| \exp\{ S(1-\gamma,\theta-\psi_j) - \tfrac{i}{2\pi} \cot \tfrac{1}{2} (\psi_j-\theta) \Delta E(\psi_j)\} - I \right\| + \delta \leq$$

$$\leq 2K \sum_{j=1}^{m} \left| S(1-\gamma,\theta-\psi_j) - \tfrac{i}{2\pi} \cot \tfrac{1}{2}(\psi_j-\theta) \right| . \| \Delta E(\psi_j) \| \; .$$

$$. \exp\{ \left| S(1-\gamma,\theta-\psi_j) - \tfrac{i}{2\pi} \cot \tfrac{1}{2}(\psi_j-\theta) \right| . \| \Delta E(\psi_j) \| \} + \delta \; .$$

Usando la primera desigualdad y el hecho de que $\delta > 0$ es arbitrario, para demostrar que I_1 tiende a cero con $\varepsilon \to 0^+$, es suficiente ver que

$$\int_0^{\theta-\varepsilon} \left| S(1-\gamma,\theta-\psi) - \tfrac{i}{2\pi} \cot \tfrac{1}{2}(\psi-\theta) \right| \| dE(\psi) \| \to 0, \text{ cuando } \varepsilon \to 0^+.$$

Ahora bien, si $|\theta-\psi| \geq \varepsilon$:

$$\left| S(1-\gamma,\theta-\psi) - \tfrac{i}{2\pi} \cot \tfrac{1}{2}(\psi-\theta) \right| \leq \tfrac{1}{2}\pi \{ \gamma(\varepsilon)/(\theta-\varepsilon)^2 \}$$

por lo tanto:

$$\int_0^{\theta-\varepsilon} \left| S(1-\gamma,\theta-\psi) - \tfrac{i}{2\pi} \cot \tfrac{1}{2}(\psi-\theta) \right| \| dE(\psi) \| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\pi\gamma(\varepsilon)\int_0^{\theta-\varepsilon}(\theta-\varepsilon)^{-2}\;\|dE(\psi)\|\leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\pi\gamma(\varepsilon)\int_0^{\theta-\varepsilon}(\theta-\psi)^{-2}\;(d\beta(\psi-\theta)+Md\psi)=$$

$$=\frac{1}{2}\pi\gamma(\varepsilon)\;\{\;M/(\theta-\psi)|_0^{\theta-\varepsilon}+(\theta-\psi)^{-2}\beta(\psi-\theta)|_0^{\theta-\varepsilon}+2\int_0^{\theta-\varepsilon}(\theta-\psi)^{-3}\beta(\psi-\theta)d\psi\}\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\pi\gamma(\varepsilon)\;\{\;-\beta(-\theta)/\theta^2+2\sup_{0\leq\psi\leq\theta-\varepsilon}|\beta(\psi-\theta)/(\psi-\theta)|\cdot\int_0^{\theta-\varepsilon}d\psi/(\theta-\psi)^2+M/\varepsilon\}\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\pi\gamma(\varepsilon)\;\{\;M/\varepsilon-\beta(-\theta)/\theta^2+2/\varepsilon\sup|\;\beta(\psi-\theta)/(\psi-\theta)|\}\longrightarrow 0,\text{ si }\varepsilon\to 0^+.$$

En la misma forma se demuestra que $I_2\to 0$, cuando $\varepsilon\to 0^+$.

Pasemos ahora a I_3. Para $\varepsilon>0$, $\delta>0$ cualesquiera existe $m_\circ(\delta)$ tal que si $m\geq m_\circ$ y $\Delta\psi=(2\varepsilon)/m$ entonces:

$$\sum_{j=1}^m\|\Delta E(\psi_j)-A(\theta)\Delta\psi\|\leq\int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon}\|dE(\psi)-A(\theta)d\psi\|+\delta=\beta(\varepsilon)-\beta(-\varepsilon)+\delta.$$

$$I_3\leq\|\prod_{j=1}^m\exp\{\;S(1-\gamma,\theta-\psi_j)\Delta\;E(\psi_j)\}-\prod_{j=1}^m\exp\{S(1-\gamma,\theta-\psi_j)A(\theta)\Delta\psi\}\|+\delta\leq$$

$$\leq 2K^2\sum_{j=1}^m\|\exp\{\;S(1-\gamma,\theta-\psi_j)\Delta E(\psi_j)\}-\exp\{\;S(1-\gamma,\theta-\psi_j)A(\theta)\Delta\psi\}\|+\delta\leq$$

$$\leq 2K^2\sum_{j=1}^m\sum_{h=1}^\infty|S(1-\gamma,\theta-\psi_j)|^h(h!)^{-1}\|\Delta E(\psi_j)^h-A(\theta)^h(\Delta\psi)^h\|+\delta$$

Dado que $|S(1-\gamma,\theta-\psi)|\leq 2/\gamma(\varepsilon)$, se deduce que

$$I_3\leq 2K^2(2/\gamma(\varepsilon))\sum_{j=1}^m\|\Delta E(\psi_j)-A(-\theta)\|+$$

$$+\;2K^2\sum_{j=1}^m\sum_{h=2}^\infty(2/\gamma(\varepsilon))^h(h!)^{-1}\{\;\|\Delta E(\psi_j)\|^h+M^h(\Delta\psi)^h\}+\delta\leq$$

$$\leq 4K^2/\gamma(\varepsilon)[\beta(\varepsilon)-\beta(-\varepsilon)+\delta]+$$

$$+\;8K^2\sum_{j=1}^m(\gamma(\varepsilon))^{-2}\Big[\|\Delta E(\psi_j)-A(\theta)\Delta\psi\|+M(\Delta\psi)^2+M^2(\Delta\psi)^2\Big].$$

$$\exp\{\sum_{j=1}^m\;2/\gamma(\varepsilon)\Big[\|\Delta E(\psi_j)-A(\theta)\Delta\psi\|+2M\Delta\psi\Big]\}+\delta$$

Dado que para m suficientemente grande podemos conseguir que $M\Delta\psi<\delta$, y dado que $\delta>0$ es arbitrario, concluímos que:

$$I_3\leq 4K^2(\beta(\varepsilon)-\beta(-\varepsilon))/\gamma(\varepsilon)+$$

$$+\;8K^2\Big[(\beta(\varepsilon)-\beta(-\varepsilon))^2/\gamma^2(\varepsilon)\Big].\;\exp\;\{(2(\beta(\varepsilon)-\beta(-\varepsilon))/\gamma(\varepsilon)\}\longrightarrow 0,\text{ si}$$

$$\varepsilon\to 0^+.$$

Finalmente, notemos que $\gamma(\varepsilon)/\varepsilon \longrightarrow 0$, para $\varepsilon \to 0^+$ implica que

$$\int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} S(1-\gamma,\theta-\psi)d\psi \longrightarrow 1, \text{ para } \varepsilon \to 0^+,$$

de la desigualdad

$$I_4 \leq \sum_{h=1}^{\infty}(M^h/h!) \left|\left[\int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} S(1-\gamma,\theta-\psi)d\psi\right]^h - 1\right|$$

se deduce partiendo la sumatoria en una parte finita formada por los primeros términos, más un resto acotando convenientemente, que

$$I_4 \longrightarrow 0 \text{ , cuando } \varepsilon \to 0^+. \qquad \text{qed.}$$

BIBLIOGRAFIA

(1) Potapov, V.P. La estructura multiplicativa de las matrices J-contractivas de funciones, TRUDI MOSK. MAT. OBSCHESTVA 4(1955), 125-236 (en ruso).

(2) Guinsburg, I.P. Sobre la factorización de matrices de funciones analíticas, DOKLADI AKAD. NAUK SSSR, Vol. 159, N° 3, 1964 (en ruso).

(3) Sajnovich, L.A. Sobre valores límites de integrales multiplicativas, USPEJI MAT. NAUK. VOL. XII, ed. 3(75)(1957), 212-218 (en ruso).

(4) González Domínguez, A. Propiedades en el contorno de funciones analíticas, Fasc. 4, Publicaciones del Dep. de Mat. de la F.C.E.y N, U.N.B.A., 1959.

(5) Gantmacher, F.R. The theory of matrices, Vol. 2, Chelsea Publishing Co New York, N.Y., 1960, 113-171.