Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 24, Número 4, 1969.

SUR L'ALGEBRE DES PUISSANCES DIVISEES D'UN MODULE MONOGENE

Norbert Roby

Soit A un anneau commutatif. Nous nous proposons d'étudier en détail la structure de l'algèbre des puissances divisées de tout A - module monogène; pour cette notion, on pourra se reporter à {1}. L'étude du cas où A = Z a été faite en {2}.

Cette étude sera faite dans la seconde partie du présent article; dans la première partie, nous étudions la construction de certains idéaux de A qui seront importants par la suite.

PREMIERE PARTIE

1) LES IDEAUX $D_n(I)$.

Soit I un idéal de A. Nous lui associons une *suite* $D_n(I)$ $(n \geq 0)$ d' idéaux de A, définis de la manière suivante:

DEFINITION. *Pour tout entier* $n \geq 0$, $D_n(I)$ *est l'idéal de* A *engendré par les éléments du type:*

$$((a,n-a))i^a$$

où $1 \leq a \leq n$, $i \in I$. (On rappelle qu'on pose: $((p,q))=(p+q)!/p!q!$).

Autrement dit:

$D_n(I)$ *est l'idéal de* A *engendré par les coefficients des polynômes* $(X + i)^n - X^n$ $(i \in I)$.

Par exemple: $D_o(I) = 0$

$D_1(I) = I$

$D_n(0) = 0$

$D_n(A) = A$ pour $n \geq 1$

On a : $D_n(I) \subset I$.

PROPOSITION 1. *Soit* F *un système de générateurs de l'idéal* I. *Alors,* $D_n(I)$ *est engendré par les éléments de la forme:*

$$((a,n-a))i^a$$

où $1 \leq a \leq n$ *et* $i \in F$.

En effet, soit I_n l'idéal de A engendré par les éléments de la forme précédente. On a: $I_n \subset D_n(I)$. Pour montrer que $D_n(I) \subset I_n$, il suffit de montrer que les éléments $a \in A$ tels que $((a,n-a))a^a \in I_n$ pour $1 \leq a \leq n$ constituent un idéal de A.

Or, si $a \in A$ possède cette propriété, il est clair que ba ($b\in A$) l'a aussi. Et si a et b ont cette propriété, on a:

$$((a,n-a))(a+b)^a = \textstyle\sum_{k=0}^{a}((a,n-a))((k,a-k))a^k b^{a-k}$$

Si $k \geq 1$, on écrit:

$$((a,n-a))((k,a-k))a^k b^{a-k} = ((n-a,a-k))((k,n-k))a^k b^{a-k} \in I_n$$

(car $((k,n-k))a^k \in I_n$).

Pour $k = 0$, on a le terme: $((a,n-a))b^a \in I_n$.

Donc, $a + b$ a aussi la propriété indiquée, C.q.f.d.

2. SUR UNE AUTRE MANIERE D'ENGENDRER LES IDEAUX $D_n(I)$.

PROPOSITION 2. *Soit* F *un système de générateurs de l'idéal* I. *Pour* $n > 0$, *l'idéal* $D_n(I)$ *est engendré par les éléments de la forme:*

$$di^\delta \quad ,$$

où: $i \in F$, d *et* δ *sont des entiers* > 0 *tels que* $d\delta = n$.

La démonstration qui suit a été élaborée par A. BATBEDAT.

On suppose $n > 1$, car la proposition est triviale pour $n = 0$ et $n=1$.

Soit J_n l'idéal de A engendré par les di^δ considérés.

-: On montre que $D_n(I) \subset J_n$:

Considérons un générateur x de $D_n(I)$:

$$x = \frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-a+1)}{a!}\ i^a \qquad (a\geq 1\ ,\ i\in F)$$

Posons: $u = n \wedge a$ (p.g.c.d. de n et a),

$$n = \lambda u \quad , \quad a = \mu u \ .$$

Alors:

$$x = \frac{\lambda((a-1\ ,\ n-a))}{\mu}\ i^a$$

Comme $\lambda \wedge \mu = 1$, divise $((a-1\ ,\ n-a))$. Si l'on pose: $((a-1\ ,\ n-a))/\mu = C$, alors:

$x = C\, i^{a-u}.\lambda i^u \in J_n$ (car $\lambda u = n \Longrightarrow \lambda i^u \in J_n$).

-: On montre que $J_n \subset D_n(I)$.

Soit un générateur y de J_n : $y = di^\delta$, $i \in F$, $d\delta = n$. On peut supposer $\delta > 1$, car on sait que ni $\in D_n(I)$. Soit

$$\delta = \prod_{j=1}^{a} p_j^{r_j} \qquad (r_j > 0)$$

la décomposition de δ en facteurs premiers. Posons: $p_j^{r_j} = q_j$. On a:

$$((q_j, n-q_j)) = d(\frac{\delta}{q_j})((q_j-1, n-q_j)).$$

Au second membre, le facteur δ/q_j est premier avec p_j. Quant au coefficient binomial $((q_j-1 , n-q_j))$, il s'écrit:

$$\prod_{k=1}^{q_j-1} \left(\frac{n - q_j + k}{k}\right)$$

Soit β l'exposant de p_j dans la décomposition de k en facteurs premiers ($\beta \geq 0$) ; on a : $\beta < r_j$ Alors, p_j^β divise $p_j^{r_j}$, donc δ , donc n, et aussi k: il divise $n - q_j + k$; par contre, $p_j^{\beta+1}$ divise encore $p_j^{r_j}$, n , mais pas k: il ne divise pas $n - q_j + k$. Ainsi, β est l'exposant de p_j dans la décomposition en facteurs premiers de $n - q_j + k$. On pourra donc simplifier la fraction $(n - q_j + k)/k$ par p_j^β , en sorte que p_j ne divise plus ni le numérateur ni le dénominateur. Il en résulte que $((q_j - 1 , n - q_j))$ est premier avec p_j .

On peut donc écrire

$$((q_j , n - q_j)) = d\lambda_j \text{ , ou } \lambda_j \text{ est premier avec } p_j.$$

Le p.g.c.d. de $(\delta,\lambda_1,\ldots,\lambda_a)$ est 1, car aucun facteur premier de δ ne divise tous les λ_j. Donc, en multipliant par d: le p.g.c.d. de $(n , ((q_1 , n - q_1)), \ldots , ((q_a , n - q_a)))$ est d. Cela entraîne qu'il existe des entiers m et m_j tels que:

$$d = mn + \sum_{j=1}^{a} m_j((q_j , n - q_j)) .$$

Alors:

$$di^{\delta} = mi^{\delta-1}.ni + \sum_{j=1}^{a} m_j i^{\delta-q_j}.((q_j\ ,\ n-q_j))i^{q_j} \in D_n(I).\ \text{C.q.f.d.}$$

3. SUR LA COMPOSITION DES APPLICATIONS D_n:

On peut définir une application D_n: $I \longrightarrow D_n(I)$ de l'ensemble des idéaux des A dans lui-même.

PROPOSITION 3. *Pour deux entiers* m *et* n $\geq$ 0 *et tout idéal* I, *on a:*

$$D_m \circ D_n(I) = D_{mn}(I).$$

On peut supposer m et n $\geq$ 2.

-: On montre que $D_m \circ D_n(I) \subset D_{mn}(I)$.

D'après la proposition 2, $D_m \circ D_n(I)$ est engendré par les éléments de la forme:

$$x = d'(d''\ i^{\delta''})^{\delta'} \qquad (i \in I\ ,\ d'\delta' = m\ ,\ d''\delta'' = n).$$

Or:

$$x = d''^{\delta-1}.d'\ d''\ i^{\delta'\delta''} \in D_{mn}(I) \qquad (\text{car } d'd''\delta'\delta'' = mn).$$

-: On montre que $D_{mn}(I) \subset D_m \circ D_n(I)$.

Remarquons, en raisonnant par récurrence sur le nombre des facteurs premiers de m, qu'on peut se limiter à démontrer la proposition 3 lorsque m est un nombre premier p. Il reste donc à voir que:

$$D_{pn}(I) \subset D_p \circ D_n(I).$$

Or, $D_{pn}(I)$ est engendré par les éléments y de la forme

$$y = d\ i^{\delta} \qquad (i \in I\ ,\ d\delta = pn).$$

-ou bien p divise d, auquel cas $d = p\ d_1$ et

$$y = p\ d_1\ i^{\delta} \in D_p \circ D_n(I) \qquad (\text{car } d_1\delta = n \Longrightarrow d_1\ i^{\delta} \in D_n(I)).$$

-ou bien p ne divise pas d ; dans ce cas, on a:

$d^{p-1} \equiv 1\ (p)$, ce qui entraîne l'existence d'un entier k tel que:

$d = d^p + kpd$. En outre, p divise δ et on écrit: $\delta = p\delta_1$. Alors , $y = u + v$, avec:

$$u = d^p \, i^{\delta_1 p} \qquad \text{et} \qquad v = k\,p\,d\,i^{\delta_1 p}\,.$$

On a:

$$u = (d\,i^{\delta_1})^p \in D_p \circ D_n(I) \quad (\text{car } d\delta_1 = n \Longrightarrow d\,i^{\delta_1} \in D_n(I)).$$

$$v = k\,i^{\delta_1 p - \delta_1}.p\,di^{\delta_1} \in D_p \circ D_n(I) \qquad (\text{car } di^{\delta_1} \in D_n(I) \Longrightarrow$$

$p\,di^{\delta_1} \in D_p \circ D_n(I))$.

Finalement, dans tous les cas, on a: $y \in D_p \circ D_n(I)$, C.q.f.d.

COROLLAIRE 1. *Pour deux entiers* m *et* $n \geq 0$ *on a:*

$$D_{mn}(I) \subset D_n(I).$$

En effet:

$$D_m \circ D_n(I) \subset D_n(I).$$

Ce corollaire résulte aussi du fait suivant: le polynôme $(X + i)^{mn} - X^{mn}$ est multiple du polynôme $(X + i)^n - X^n$.

COROLLAIRE 2. *Pour deux entiers* m *et* $n \geq 0$ *on a:*

$$m\,D_n(I) \subset D_{mn}(I).$$

En effet:

$$m\,D_n(I) \subset D_m \circ D_n(I).$$

COROLLAIRE 3. *Si l'entier positif* m *est inversible dans l'anneau* A/I *(i.e. si* $mA + I = A$*) on a, pour tout* $n \geq 0$*:*

$$D_n(I) = D_{mn}(I)$$

On peut supposer $n > 0$.

Si $mA + I = A$, on a aussi $mA + D_{mn}(I) = A$; sinon, en effet , il existerait dans A un idéal maximal qui contiendrait mA et $D_{mn}(I)$, donc aussi i^{mn} pour tout $i \in I$, donc aussi i : il contiendrait $mA + I$, ce qui est absurde.

Il existe donc $i_{mn} \in D_{mn}(I)$ et $a \in A$ tels que:

$$ma + i_{mn} = 1.$$

Alors:

$$D_n(I) = (ma + i_{mn})D_n(I) \subset m\, D_n(I) + i_{mn}\, D_n(I)$$

$$\subset D_{mn}(I) + D_{mn}(I) = D_{mn}(I) \subset D_n(I) \quad , \quad \text{C.q.f.d.}$$

4. LE TREILLIS DES IDEAUX $D_n(I)$:

PROPOSITION 4. *Soient* m *et* n *deux entiers* ≥ 0 , $m \wedge n$ *leur p.g.c.d.* *(*$0 \wedge 0 = 0$*). Alors, on a:*

$$D_m(I) + D_n(I) = D_{m\wedge n}(I)$$

Posons $d = m \wedge n$.

La propriété étant triviale si m ou n = 0 , on suppose m et n ≥ 1 .
Du corollaire 1 à la propriété 3, découle:

$$D_n(I) \subset D_d(I) \quad \text{et} \quad D_m(I) \subset D_d(I) \text{ , d'où : } D_n(I) + D_m(I) \subset D_d(I).$$

Reste à montrer l'inclusion inverse.

Il existe deux entiers p et q tels que:

$$d = pn + qm \ .$$

Si $p = 0$, c'est que $q = 1$ et $d = m$; alors, m divise n et la relation $D_m(I) + D_n(I) = D_m(I)$ est vraie, car $D_n(I) \subset D_m(I)$ (corollaire 1 à la proposition 3). On peut donc supposer $p \neq 0$ et de même $q \neq 0$.

Alors, des deux entiers p et q , l'un est positif et l'autre est négatif ; supposons, par exemple, $p > 0$ et $q < 0$.

D'après la définition, $D_d(I)$ est l'idéal de A engendré par les coefficients des polynômes

$$P_i(X) = (X + i)^d - X^d \qquad (i \in I)$$

Un petit calcul montre qu'on a:

$$(X + i)^{-qm}\, P_i(X) = [(X + i)^{pn} - X^{pn}] - X^d[(X + i)^{-qm} - X^{-qm}] \ .$$

Les coefficients du polynôme $(X + i)^{pn} - X^{pn}$ appartiennent à $D_{pn}(I)$, donc à $D_n(I)$ (corollaire 1 à la proposition 3). De même, les coefficients du polynôme $X^d[(X + i)^{-qm} - X^{-qm}]$ appartiennent à $D_{-qm}(I)$, donc à $D_m(I)$. Il en résulte que les coefficients du polynôme

$$(X + i)^{-qm}\, P_i(X) \quad \text{sont dans} \quad D_m(I) + D_n(I) \ .$$

Si l'on peut déduire de là que $P_i(X)$ a aussi ses coefficients dans $D_m(I) + D_n(I)$, on aura montré que $D_d(I) \subset D_m(I) + D_n(I)$, C.q.f.d.

Il suffit donc de démontrer le lemme suivant:

LEMME. Soient $P \in A[X]$, $a \in A$, J un idéal de A , h un entier ≥ 1. Si le polynôme $(X + a)^h P$ a ses coefficients dans J, alors P a aussi ses coefficients dans J.

Par récurrence sur h, on se ramène au cas $h = 1$; alors la démonstration du lemme est immédiate.

COROLLAIRE 1. *Si* $n_1 , \dots , n_p$ *sont des entiers* ≥ 0 *, on a:*

$$D_{n_1}(I) + \dots + D_{n_p}(I) = D_{n_1 \wedge \dots \wedge n_p}(I).$$

COROLLAIRE 2. *Si* $n_1 , \dots , n_p$ *sont des entiers* ≥ 0 *premiers dans leur ensemble, on a:*

$$D_{n_1}(I) + \dots + D_{n_p}(I) = I .$$

PROPOSITION 5. *Soient* m *et* n *des entiers* ≥ 0 *,* $m \vee n$ *leur p.p.c.m. Alors, on a:*

$$D_m(I) \cap D_n(I) = D_{m \vee n}(I).$$

Posons $m \vee n = M$.

Du corollaire 1 à la proposition 3 résulte:

$$D_M(I) \subset D_m(I) \quad \text{et} \quad D_M(I) \subset D_n(I).$$

D'où:

$$D_M(I) \subset D_m(I) \cap D_n(I).$$

Reste à prouver l'inclusion inverse.

Posons: $M = \lambda m = \mu n$.

Si $x \in D_m(I)$, on a : $\lambda x \in \lambda D_m(I) \subset D_M(I)$ (corollaire 2 à la proposition 3).

Si $x \in D_n(I)$, on a de même, $\mu x \in D_M(I)$.

Comme λ et μ sont premiers entre eux, il existe deux entiers p et q tels que : $p\lambda + q\mu = 1$. Alors, si $x \in D_m(I) \cap D_n(I)$ on a :
$x = p.\lambda x + \mu q.x \in D_M(I)$, c.q.f.d.

COROLLAIRE. *Si* $n_1, \ldots, n_p$ *sont des entiers* ≥ 0, *on a:*

$$D_{n_1}(I) \cap \ldots \cap D_{n_p}(I) = D_{n_1 \vee \ldots \vee n_p}(I).$$

REMARQUE. L'ensemble des propriétés exprimées par le corollaire 1 à la proposition 3, les propriétés 4 et la propriéte 5 est résumée dans l'énoncé suivant:

Pour tout idéal I *de* A, *l'application définie par:*

$$nZ \longrightarrow D_n(I) \qquad k \ (n \geq 0)$$

est un homomorphisme du treillis des idéaux de Z *dans le treillis des idéaux de* A.

5) AUTRES PROPRIETES DES $D_n(I)$.

Soit $(I_k)(k \in K)$ une famille d'idéaux de A. Comme l'idéal $\sum_{k\in K} I_k$ est engendré par $\bigcup_{i\in K} I_k$, il résulte de la proposition 1:

PROPOSITION 6. *Pour toute famille* $(I_k)(k \in K)$ *d'idéaux de* A *et tout entier* $n \geq 0$, *on a:*

$$D_n(\sum_{k\in K} I_k) = \sum_{k\in K} D_n(I_k).$$

On a aussi:

PROPOSITION 7. *Soit* $(I_k)(k = 1,\ldots,p)$ *une famille finie d'idéaux étrangers dans leur ensemble*

$$(i.e.: \textstyle\sum_{k=1}^{p} I_k = A).$$

Alors, pour tout système $(n_k)(k = 1,\ldots,p)$ *d'entiers* > 0, *les idéaux* $D_{n_k}(I_k)$ *sont aussi étrangers dans leur ensemble.*

Cela vient de ce que tout élément de I_k a une puissance dans $D_{n_k}(I_k)$; ou encore:

Posons $n = n_1 \ldots n_p$. Le corollaire 1 à la proposition 3 entraîne: $D_{n_k}(I_k) \supset D_n(I_k)$. Alors:

$$\sum_{k=1}^{p} D_{n_k}(I_k) \supset \sum_{k=1}^{p} D_n(I_k) = D_n(\sum_{k=1}^{p} I_k) \text{ (prop. 6)} = D_n(A) = A.$$

DEUXIEME PARTIE.

Soit M un A-module monogène, engendré par un élément e. En notant I l'annulateur de e dans A, on peut identifier les A-modules M et A/I, en identifiant e à la classe de 1 modulo I. On notera q la surjection canonique $A \longrightarrow M$ définie par $1 \longrightarrow e$.

On sait que la composante homogène du degré n de $\Gamma(M)$ (algèbre des puissances divisées du module M), notée $\Gamma_n(M)$, est un module monogène de générateur $e^{[n]}$. La structure de module de $\Gamma(M)$ sera entièrement explicitée quand on connaîtra l'annulater I_n de $e^{[n]}$; on aura, en effet:

$$\Gamma_n(M) \simeq A/I_n.$$

La structure multiplicative de $\Gamma(M)$ sera ensuite explicitée par les relations: $e^{[n]}\, e^{[m]} = ((m,m))\, e^{[n+m]}$.

6. DETERMINATION DES MODULES $\Gamma_n(M)$.

L'application linéaire surjective $q\colon A \longrightarrow M$ se prolonge en une application linéaire surjective $\Gamma(q)\colon \Gamma(A) \longrightarrow \Gamma(M)$ qui, en degré n, donne une surjection

$$\Gamma_n(q)\colon \Gamma_n(A) \longrightarrow \Gamma_n(M) \quad ,$$

avec:

$$\Gamma_n(q)(1^{[n]}) = e^{[n]} \ .$$

On sait que $\Gamma_n(A)$ est un module libre ayant pour base $1^{[n]}$; donc $\Gamma_n(A) \simeq A$. Si, pour le moment, on identifie $\Gamma_n(A)$ à A, $1^{[n]}$ à 1, on a donc: $I_n = \operatorname{Ker} \Gamma_n(q)$.

Or, $\operatorname{Ker} \Gamma(q)$ est l'idéal de $\Gamma(A)$ engendré par les éléments i^{α}, $i \in I$ et $\alpha \geq 1$ ({1}, prop. IV-8, p. 284). Comme $\Gamma(A)$ est engendré linéairement par les $1^{[p]}$ $(p \geq 0)$, alors $\operatorname{Ker} \Gamma(q)$ est engendré linéairement par les éléments

$$i^{[\alpha]}\, 1^{[p]} = i^{\alpha}\, 1^{[\alpha]}\, 1^{[p]} = ((\alpha,p))i^{\alpha}\, 1^{[\alpha+p]} \quad (i \in I,\ \alpha \geq 1,\ p \geq 0).$$

Enfin, comme $\operatorname{Ker} \Gamma_n(q) = \operatorname{Ker} \Gamma(q) \cap \Gamma_n(A)$, on voit que $\operatorname{Ker} \Gamma_n(q)$ est engendré linéairement par les éléments $((\alpha,n-\alpha))\ i^{\alpha}\ 1^{[n]}$ $(\alpha \geq 1\ ,\ i \in I)$.

Il en résulte que I_n est l'idéal de A engendré par les éléments

$((a\ ,\ n-a))\ i^{a}\quad (a \geq 1\ ,\ i \in I)$. Ainsi:

$$I_n = D_n(I).$$

PROPOSITION 8. *Il existe un isomorphisme de modules:*

$$\Gamma_n(M) \simeq A/D_n(I)$$

qui permet d'identifier $e^{[n]}$ *à la classe de* 1 *modulo* $D_n(I)$.

Il résulte de cette proposition que les propriétés des idéaux $D_n(I)$, établies dans la première partie, vont entraîner des propriétés correspondantes concernant les modules $\Gamma_n(M)$.

Parmi ces propriétés, certaines se retrouvent simplement par des méthodes directes; d'autres constituent des résultats essentiellement nouveaux.

7. INTERPRETATION DES RESULTATS DE LA PREMIERE PARTIE.

a) Nous commençons par interpréter la relation $D_{mn}(I) \subset D_n(I)$ (corollaire 1 à la proposition 3). Elle signifie:

PROPOSITION 9. *Pour tout couple d'entiers* $m \geq 0$ *et* $n \geq 0$ *, il existe une application linéaire*

$$\phi_{mn,n} : \Gamma_{mn}(M) \longrightarrow \Gamma_n(M)$$

telle que: $e^{[mn]} \longrightarrow e^{[n]}$.

Cela signifie aussi qu'il existe, sur le couple $(M\ ,\ \Gamma_n(M))$, une loi polynôme f homogène de degré mn, dont la restriction à M vérifie :

$$f(e) = e^{[n]}\ .$$

On retrouve ce résultat comme suit. Soit μ la loi identique du module M. Comme M est isomorphe à A/I, on peut le munir d'une structure de A-algèbre dans laquelle e est l'élément unité. Alors, ({3}, § 4),les lois polynômes sur le couple (M(M)) constituent aussi une A-algèbre , et l'on peut donc considérer la loi polynôme μ^m, homogène de degré m.

La restriction de μ^m à M est définie par: $\mu^m(x) = x^m$, et en particulier $\mu^m(e) = e$.

Si e_n^M désigne la loi polynôme universelle de degré n sur le couple $(M\ ,\ \Gamma_n(M))$ (|3| , §5) , alors la loi polynome $f = e_n^M \circ \mu^m$ est définie sur le couple $(M , \Gamma_n(M))$, elle est homogène de degré mn , et sa restriction à M vérifie:

$$f(e) = e^{[n]}$$

b) Nous allons maintenant interpréter la proposition 3.

Notons qu'on a les isomorphismes:

$$A/D_m \circ D_n(I) \simeq \Gamma_m(A/D_n(I)) \simeq \Gamma_m \circ \Gamma_n(I).$$

Si l'on note par le signe $\{\ \}$ les puissances divisées des éléments $\Gamma_n(M)$, l'isomorphisme $A/D_m \circ D_n(I) \simeq \Gamma_m \circ \Gamma_n(I)$ permet d'identifier la classe de 1 modulo $D_n \circ D_n(I)$ à l'élément $(e^{|n|})^{\{m\}}$. La proposition 3 donne donc le résultat suivant:

PROPOSITION 10. *Pour tout couple d'entiers* $m \geq 0$, $n \geq 0$, *il existe un isomorphisme*

$$\Gamma_m \circ \Gamma_n(M) \simeq \Gamma_{mn}(M)$$

qui associe les éléments $(e^{[n]})^{\{m\}}$ *et* $e^{[mn]}$.

L'existence d'une application linéaire: $\Gamma_{mn}(M) \longrightarrow \Gamma_m \circ \Gamma_n(M)$ telle que: $e^{[mn]} \longrightarrow (e^{[n]})^{\{m\}}$ était claire à priori; elle résulte de la loi polynôme $e_m^{\Gamma_n(M)} \circ e_n^M$, homogène de degré mn sur le couple $(M ,$ $\Gamma_m \circ \Gamma_n(I))$.

Par contre, dans l'autre sens, l'application linéaire $\Gamma_m \circ \Gamma_n(I) \longrightarrow \Gamma_{mn}(I)$ avec $(e^{[n]})^{\{m\}} \longrightarrow e^{[mn]}$ fournit le résultat moins trivial suivant:

PROPOSITION 11. *Pour tout couple d'entiers* $m \geq 0$, $n \geq 0$, *il existe une application polynôme de degré* m:

$$g_{m,n} : \Gamma_n(M) \longrightarrow \Gamma_{mn}(M)$$

telle que: $a\, e^{[n]} \longrightarrow a^m e^{[mn]} \qquad (a \in A)$.

Ce résultat est plus fin que ce que nous pouvions obtenir dans le cas d'un module quelconque. Dans le sens $\Gamma_n(M) \longrightarrow \Gamma_{mn}(M)$, nous étions seulement capable, pour $n \geq 1$, d'appliquer la loi γ_m de $m^{\text{ième}}$ puissance divisée (cf. {4}, §10, Théorème 1), de telle sorte que

$$\gamma_m(a\, e^{[n]}) = C_{m,n}\, a^m\, e^{[mn]}, \text{ où } C_{m,n} = (m\,n)!/(n!)^m m! \ .$$

Lorsque M est un module monogène, il est donc possible de s'affranchir en outre, du facteur numérique $C_{m,n}$.

c) Le corollaire 2 à la proposition 3 fournit le résultat suivant:

PROPOSITION 12. *Pour tout couple d'entiers* $m \geq 0$, $n \geq 0$, *il existe une application linéaire*

$$\Gamma_n(M) \longrightarrow \Gamma_{mn}(M)$$

telle que:

$$e^{[n]} \longrightarrow m\, e^{[mn]} .$$

COROLLAIRE. *Pour tout couple d'entiers* $m \geq 0$, $n \geq 0$, *il existe une application polynôme de degré* n:

$$M \longrightarrow \Gamma_{mn}(M)$$

telle que:

$$a\, e \longrightarrow m\, a^n\, e^{[mn]} \qquad (a \in A).$$

d) Passons à la proposition 4. Notons les isomorphismes:

$$A/D_m(I) + D_n(I) \cong A/D_m(I) \otimes A/D_n(I) \cong \Gamma_m(M) \otimes \Gamma_n(M)$$

qui permettent d'identifier la classe de 1 modulo $D_m(I) + D_n(I)$ à l'élément $e^{[m]} \otimes e^{[n]}$. La proposition 4 s'énonce alors:

PROPOSITION 13. *Soient* m *et* n *des entiers* ≥ 0 , $m \wedge n$ *leur p.g.c.d.* $(0 \wedge 0 = 0)$. *Alors, il existe un isomorphisme*

$$\Gamma_m(M) \otimes \Gamma_n(M) \cong \Gamma_{m \wedge n}(M)$$

qui associe les éléments $e^{[m]} \otimes e^{[n]}$ *et* $e^{[m \wedge n]}$

e) En ce qui concerne la proposition 5, ou plutôt la forme plus générale donnée dans son corollaire, on se convainc aisément qu'elle équivaut à l'énoncé suivant:

PROPOSITION 14. *Soient des entiers* ≥ 0 : $n_1, \ldots, n_p$. *Soit* $n_1 \vee \ldots \vee n_p$ *leur p.p.c.m. Alors, il existe un homomorphisme injectif de modules*

$$\Gamma_{n_1 \vee \ldots \vee n_p}(M) \longrightarrow \Gamma_{n_1}(M) \times \ldots \times \Gamma_{n_p}(M)$$

tel que:

$$e^{[n_1 \vee \ldots \vee n_p]} \longrightarrow (e^{[n_1]}, \ldots, e^{[n_p]}).$$

On sait que, pour deux idéaux I et J d'un anneau A, il existe une suite exacte de A-modules:

$$0 \longrightarrow A/I \cap J \xrightarrow{u} A/I \times A/J \xrightarrow{v} A/I + J \longrightarrow 0 \qquad ;$$

si 1_I désigne la classe de 1 modulo I, u est défini par:
$1_{I\cap J} \longrightarrow (1_I, 1_J)$; v est défini par:
$(1_I, 0) \longrightarrow 1_{I+J}$ et $(0, 1_J) \longrightarrow -1_{I+J}$.

En appliquant ce résultat aux idéaux $D_n(I)$ et $D_m(I)$ on a, en vertu des proposition 4 et 5:

PROPOSITION 15. *Soient* m *et* n *des entiers* ≥ 0, $m \wedge n$ *leur p.g.c.d.*, $m \vee n$ *leur p.p.c.m. Alors, il existe une suite exacte de modules:*

$$0 \longrightarrow \Gamma_{m \vee n}(M) \xrightarrow{u} \Gamma_m(M) \times \Gamma_n(M) \xrightarrow{v} \Gamma_{m \wedge n}(M) \longrightarrow 0$$

où u *est défini par:* $e^{[m \vee n]} \longrightarrow (e^{[m]}, e^{[n]})$ *et où* v *est défini par:*

$$(a\, e^{[m]}, b\, e^{[n]}) \longrightarrow (a - b)\, e^{[m \wedge n]} \qquad (a\, ,\, b \in A).$$

f) Nous donnons enfin la traduction du corollaire 3 à la prop. 3.

PROPOSITION 16. *Si l'entier* $m > 0$ *est tel qu'il existe un élément* $x \in M$ *vérifiant* $mx = e$, *alors, pour tout entier* $n \geq 0$, *il existe un isomorphisme*

$$\Gamma_n(M) \simeq \Gamma_{mn}(M)$$

tel que $e^{[n]}$ *corresponde à* $e^{[mn]}$.

(Notons que l'hypothèse faite sur m signifie que m est inversible dans l'anneau A/I).

8) AUTRES RESULTATS DIVERS.

a) Soit M un module monogène. Pour deux entiers $n > 0$ et $p > 0$, soit à déterminer $\Gamma_n(M^p)$.

On a:

$$\Gamma_n(M^p) \simeq \bigoplus_{k_1+\dots+k_p=n} \Gamma_{k_1}(M) \otimes \dots \otimes \Gamma_{k_p}(M) \simeq \bigoplus_{k_1+\dots+k_p=n} \Gamma_{k_1 \wedge \dots \wedge k_p}(M).$$

Ainsi:

$\Gamma_n(M^p)$ est une somme directe finie de modules du type $\Gamma_d(M)$, où d est un diviseur de n.

b) Soient M et M' deux modules monogènes, de générateurs e et e'. Soit I (resp. I') l'annulateur de e (resp. e') dans A. On sait que (proposition 6):

$$D_n(I + I') = D_n(I) + D_n(I') \qquad (n \geq 0).$$

Comme $A/D_n(I + I') \simeq \Gamma_n(A/I + I') \simeq \Gamma_n(M \otimes M')$ et que $A/D_n(I) + D_n(I') \simeq A/D_n(I) \otimes A/D_n(I') \simeq \Gamma_n(M) \otimes \Gamma_n(M')$, on voit que:

PROPOSITION 17. *Si* M *et* M' *sont des modules monogènes de générateurs* e *et* e' *on a, pour tout* $n \geq 0$*, un isomorphisme*

$$\Gamma_n(M \otimes M') \simeq \Gamma_n(M) \otimes \Gamma_n(M')$$

qui associe $(e \otimes e')^{[n]}$ à $e^{[n]} \otimes e'^{[n]}$.

c) Soient M et M' deux modules monogènes, de générateurs e et e' dont les annulateurs sont I et I'. On suppose $M \otimes M' = 0$, ce qui signifie que $I + I' = A$.

Pour un entier $n \geq 1$ on a:

$$\Gamma_n(M \times M') \simeq \bigoplus_{p+q=n} \Gamma_n(M) \otimes \Gamma_q(M') \quad .$$

Or, l'annulateur de $\Gamma_p(M) \otimes \Gamma_q(M')$ est l'idéal $D_p(I) + D_q(I')$.

Si p et q sont > 0 , il résulte de la proposition 7 que $D_p(I) + D_q(I') = A$ et donc : $\Gamma_p(M) \otimes \Gamma_q(M') = 0$. Dans la décomposition de $\Gamma_n(M \times M')$ il ne reste donc que les deux termes $\Gamma_n(M) \otimes A \simeq \Gamma_n(M)$ et $A \otimes \Gamma_n(M') \simeq \Gamma_n(M')$. En outre, comme dans l'isomorphisme précédent, l'élément $e^{[p]} \otimes e'^{[q]}$ de $\Gamma_p(M) \otimes \Gamma_q(M')$ correspond au générateur $(e,0)^{[p]}\,(0,e')^{[q]}$ de $\Gamma_n(M \times M')$, on peut énoncer:

PROPOSITION 18. *Soient* M *et* M' *deux modules monogènes de générateurs* e *et* e'. *Si* $M \otimes M' = 0$, *alors il existe pour* $n \geq 1$ *un isomorphisme*

$$\Gamma_n(M \times M') \simeq \Gamma_n(M) \times \Gamma_n(M')$$

qui associe $(e,0)^{[n]}$ *à* $(e^{[n]},0)$ *et* $(0,e')^{[n]}$ *à* $(0,e'^{[n]})$.
On a: $\Gamma_p(M) \otimes \Gamma_q(M)$ *si* $p > 0$ *et* $q > 0$, *et aussi* $(e,0)^{[p]}(0,e')^{[q]} = 0$.

Pour une fois, c'est de cette propriété des modules de puissances divisées qu'on va déduire une propriété des idéaux $D_n(I)$.

En gardant nos notations, on sait que le module $M \times M'$ est isomorphe à $A/I \cap I'$, en sorte que l'annulateur de $\Gamma_n(M \times M')$ est l'idéal

$D_n(I \cap I')$. Comme l'annulateur de $\Gamma_n(M) \times \Gamma_n(M')$ est l'idéal $D_n(I) \cap D_n(I')$, on peut dire (même pour $n = 0$) :

PROPOSITION 19. *Pour deux idéaux étrangers* I *et* I' *de* A *et tout entier* $n \geq 0$ *, on a* :

$$D_n(I \cap I') = D_n(I) \cap D_n(I')$$

Cette relation se généralise au cas d'une famille finie d'idéaux *deux à deux étrangers :*

$$D_n(I_1 \cap \ldots \cap I_k) = D_n(I_1) \cap \ldots \cap D_n(I_k) \ .$$

REFERENCES

{1} ROBY Norbert. Lois polynômes et lois formelles en théorie des modules, Ann. Scient. Norm. Sup., Série 3, t. 80, 1963, p. 213-348.

{2} ROBY Norbert. L'anneau des puissances divisées d'un groupe monogène, Bol. Soc. Matem. São Paulo, t. 18, 1963-1966, p. 39-47.

{3} ROBY Norbert. Sur les lois complètes et les algèbres de puissances divisées. Bol. Soc. Matem. São Paulo, t. 18 , 1963-1966, p. 59-80.

{4} ROBY Norbert. Les algèbres à puissances divisées, Bull. Soc. Math., Série 2, t. 89, 1965, p. 75-91.

Faculté des Sciences
Université de Montpellier
34 Montpellier
France