Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 25, 1970.

PROBABILIDADES SOBRE CUERPOS CONVEXOS Y CILINDROS

por L.A.Santaló

Dedicado al Profesor Alberto González Domínguez

SUMMARY. H. GIGER and H. HADWIGER [2] and R.E. MILES [3] have recently considered different questions related to lattices of figures (convex bodies, r-flats or convex cylinders) in E_n. These lattices are assumed generated by N independent figures which intersect a fixed sphere S of radius R as R and N tends to ∞ in such a way that N/R tends to a positive constant, called the density of the lattice. In this paper we prove:

a) The result does not change if instead of the sphere S we consider a convex body of arbitrary shape, which expands to the whole space E_n; this is a consequence of our Lemma 2.

b) This result is applied to Theorem 1 (distribution function (3.4) of the number of cylinders of a lattice which are intersected by a convex body K_0 placed at random in space), which is essentially due to MILES [3] with different proof.

c) Theorem 2 refers to lattices of convex cylinders in E_3 crossed by an arbitrary convex cylinder and we find the distribution function (4.6) of the number of intersected cylinders.

1. INTRODUCCION Y FORMULAS FUNDAMENTALES.

Todo cuerpo convexo K_n del espacio euclideano n-dimensional E_n tiene asignadas sus *proyecciones medias* $W_i(K_n)$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$. Estos invariantes fueron introducidos por Minkowski y reciben distintos nombres: en alemán se llaman *Quermassintegrale*, en francés *travers exterieurs*, en inglés, a veces *mean cross sectional measures* y también *Quermassintegrals*. Un estudio de los mismos puede verse en la clásica obra de BONNESEN-FENCHEL [1] .

Los valores extremos de las proyecciones medias son

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} W_0(K_n) &= V = \text{volumen de } K_n\ , \\ nW_1(K_n) &= F = \text{área de } K_n\ , \\ nW_{n-1}(K_n) &= B = \text{norma o anchura media de } K_n \end{aligned}$$

$W_n(K_n) = \kappa_n$ = volumen de la esfera unidad de E_n, o sea,

$$\kappa_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}$$

donde Γ es la función "gamma" que tiene la propiedad de recurrencia $\Gamma(h+1) = h\Gamma(h)$.

Para una esfera de radio R de E_n, las proyecciones medias valen

(1.2) $$W_i(\text{esfera}) = \kappa_n R^{n-i}$$

Para n = 3, es

(1.3) $$W_0 = V \quad , \quad W_1 = F/3 \quad , \quad W_2 = M/3 \quad , \quad W_3 = (4/3)\pi$$

donde M es la anchura media de K_3, que si ∂K_3 es de clase C^2 coincide con la integral de curvatura media de K_3.

Para el plano, n = 2, es

(1.4) $$W_0 = f \quad , \quad W_1 = u/2 \quad , \quad W_2 = \pi$$

donde f es el área de la figura convexa plana y u su perímetro.

Sea L_{n-p} un subespacio lineal de dimensión n-p de E_n y sea K_{n-p} un cuerpo convexo contenido en L_{n-p}. Supondremos siempre que se trata de cuerpos convexos acotados, de manera que los invariantes W_i son todos finitos.

DEFINICION 1. Llamaremos *cilindro* Z_p de sección recta K_{n-p} al conjunto de los subespacios lineales L_p que son ortogonales a L_{n-p} en los puntos de K_{n-p}.

El número p = 1,2,...,n-1 se llama el rango del cilindro Z_p y es igual a la dimensión de sus generatrices.

DEFINICION 2. Llamaremos *proyecciones medias* $W_i'(Z_p)$ de Z_p a las proyecciones medias W_i de la sección recta K_{n-p} considerada como cuerpo convexo de L_{n-p}.

El acento indica, precisamente, que K_{n-p} debe considerarse como un cuerpo convexo de L_{n-p}, no como un cuerpo convexo aplastado de E_n. Por tanto, para $W'_i(Z_p)$ sólo hay las posibilidades $i = 1,2,\ldots,n-p$, siendo $W'_0(Z_p)$ el volumen de la sección recta de Z_p y $W'_{n-p}(Z_p) = \kappa_{n-p}$.

Supongamos ahora un conjunto de cilindros congruentes con Z_p. La densidad para medir conjuntos de cilindros congruentes, invariante con respecto al grupo de los movimientos de E_n, es

$$(1.5) \qquad dZ_p = d\vec{L}_p \wedge dK_{n-p\,[0]}$$

donde dL_p es la densidad para subespacios lineales de dimensión p, referente a un subespacio generatriz de Z_p y $dK_{n-p\,[0]}$ es la densidad cinemática en el espacio ortogonal L_{n-p} alrededor del punto O en que se cortan L_{n-p} y L_p. La flecha sobre L_p indica que este subespacio debe considerarse orientado. Esta densidad se encuentra en [4] para $n = 3$, $p = 1$ y la generalización a E_n no ofrece dificultades (ver también MILES [3]).

Con la densidad (1.5) la llamada fórmula fundamental para cilindros, que da la medida del conjunto de cilindros Z_p que tienen punto común con un cuerpo convexo fijo K se escribe (ver [4] para $n = 3$)

$$(1.6) \qquad m(Z_p; Z_p \cap K \neq \phi) = n(n-1)\ldots(p+1)\kappa_{n-1}\ldots\kappa_{p+1} \sum_{i=p-1}^{n-1} \binom{n-p}{i-p+1} W_{i+1}(K)\, W'_{n-1-i}(Z_p)$$

Como ejemplos de esta fórmula, consideremos los casos posibles de E_3.

1. $n = 3$, $p = 1$. Resulta

$$(1.7) \qquad m(Z_2; Z_2 \cap K \neq \phi) = 2\pi(\pi F + uM + 4\pi f)$$

2. $n = 3$, $p = 1$

$$(1.8) \qquad m(Z_1; Z_1 \cap K \neq \phi) = 2M + 4\pi a.$$

En este último caso, Z_1 es una banda de planos paralelos a distancia <u>a</u>.

2. DOS LEMAS. En los trabajos referentes a conjuntos de cuerpos convexos o de subespacios lineales o de cilindros distribuídos al al azar, con ley uniforme, en E_n, lo que se hace siempre es:

a) Considerar un conjunto de N cuerpos convexos o espacios lineales o cilindros que cortan a un cuerpo convexo fijo dado K;

b) Suponer luego que K crece de tamaño hasta cubrir todo E_n, al mismo tiempo que también N crece, de manera que entre N y una característica de K (el volumen, el área o cualquiera de las $W_i(K)$) exista una relación constante $\neq 0, \infty$ que se llama la *densidad* en E_n de las figuras geométricas consideradas.

En general, por simplicidad, se toma que K sea una esfera, pero cabe la duda de si, partiendo de otra familia de cuerpos convexos, se hubiera llegado o no al mismo resultado. Es decir, queda la duda de saber si se puede hablar de una "red de figuras" (cuerpos convexos, r-espacios o cilindros) o si debe especificarse la manera como esta red fué generada a partir de un cuerpo convexo K que crece a todo el espacio.

En los casos considerados por GIGER-HADWIGER [2] y MILES [3] el resultado es independiente de K y por tanto está justificado que esos autores tomen una n-esfera cuyo radio crece hasta infinito. Pero falta la demostración, que vamos a dar aquí. Para ello necesitamos dos lemas.

LEMA 1. *Sea* R *el radio de la esfera máxima contenida en un cuerpo convexo* K *de* E_n. *Vale entonces la desigualdad*

$$W_0(K) \geqslant R\, W_1(K) \tag{2.1}$$

Demostracion. Puesto que $W_0(K)$ es el volumen de K, llamando h a la función de apoyo respecto del centro de la esfera máxima contenida en K y $d\sigma$ el elemento de área en el punto de contacto, es

$$W_0(K) = \frac{1}{n}\int_{\partial K} h\, d\sigma . \tag{2.2}$$

Pero en cualquier dirección es $R \leqslant h$, de donde, teniendo en cuenta que $W_1(K) = F/n$, resulta (2.1).

LEMA 2. *Sea* $K(t)$ *una familia de cuerpos convexos de* E_n $(0 \leq t \leq \infty)$ *tales que:*

i) *Para* $t_1 < t_2$ *es* $K(t_1) \subset K(t_2)$;

ii) *Para cualquier punto* P *de* E_n, *existe un* t_P *tal que, para todo* $t > t_P$ *es* $P \in K(t)$.

La última condición indica que $K(t)$ *tiende a llenar todo el espacio para* $t \to \infty$. *Con estas condiciones es*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W_{i+1}(K(t))}{W_i(K(t))} = 0 \tag{2.3}$$

para $i = 0,1,\ldots,n-1$, *cualquiera que sea* $K(t)$.

Demostración: Pongamos $W_i^{(n)}$ en vez de $W_i(K)$ para poner de manifiesto la dimensión n del espacio que contiene K. Supongamos que proyectamos ortogonalmente K sobre un hiperplano L_{n-1} y sea dO_{n-1} el elemento de área de la esfera unidad de E_n correspondiente a la dirección de proyección. Obtenemos así el cuerpo convexo proyectado K_{n-1} cuyas proyecciones medias representamos por $W_i^{(n-1)}$. Dentro de L_{n-1} proyectamos K_{n-1} ortogonalmente sobre un L_{n-2} según la dirección definida por dO_{n-2}, obteniendo un nuevo cuerpo convexo cuyas proyecciones medias representamos por $W_i^{(n-2)}$. Procediendo sucesivamente, para cada r, q $(r \geq q)$ vale la siguiente fórmula (generalización de una clásica fórmula de KUBOTA) (ver [5]),

$$W_r^{(n)} = \frac{n-q}{nO_{n-2}\cdots O_{n-q-1}} \int W_{r-q}^{(n-q)}\, dO_{n-1} \wedge \ldots \wedge dO_{n-q} \tag{2.4}$$

donde O_i indica el área de la esfera i dimensional, o sea está relacionada con los κ_i por la igualdad $O_{i-1} = i\,\kappa_i$.

Apliquemos (2.4) a $r = r$, $q = r$ y a $r = r+1$, $q = r$. Resulta

$$W_r^{(n)} = \frac{n-r}{nO_{n-2}\cdots O_{n-r-1}} \int W_0^{(n-r)}\, dO_{n-1} \wedge \ldots \wedge dO_{n-r} \tag{2.5}$$

$$W_{r+1}^{(n)} = \frac{n-r}{nO_{n-2}\cdots O_{n-r-1}} \int W_1^{(n-r)}\, dO_{n-1} \wedge \ldots \wedge dO_{n-r} \tag{2.6}$$

La desigualdad (2.1) da

$$W_0^{(n-r)} \geqslant R\, W_1^{(n-r)} \tag{2.7}$$

donde R es el radio de la esfera máxima, de dimensión n-r, contenida en K_{n-r}.

Si R_n es el radio de la máxima esfera n-dimensional contenida en K, es $R_n \leqslant R$ y por tanto vale también

$$W_0^{(n-r)} \geqslant R_n W_1^{(n-r)}$$

De aquí y de (2.5), (2.6) resulta

$$W_r^{(n)} \geqslant R_n\, W_{r+1}^{(n)}$$

y puesto que $R_n \to \infty$ cuando K(t) crece hasta llenar todo el espacio (o sea, cuando $t \to \infty$), resulta (2.3).

El caso n = 3. Consideremos en particular el caso del espacio ordinario de 3 dimensiones. Las relaciones (2.3) se escriben

$$\frac{M}{V} \to 0 \quad , \quad \frac{M}{F} \to 0 \quad , \quad \frac{4\pi}{3M} \to 0 \tag{2.8}$$

siendo la última trivial.

Cabe considerar qué sucede con los cocientes $F^{3/2}/V$, FM/V , M^3/V, para $t \to \infty$ Las clásicas desigualdades isoperimétricas dan

$$\frac{F^{3/2}}{V} \geqslant 6\sqrt{\pi} \quad , \quad \frac{M\,F}{V} \geqslant 12\,\pi \quad , \quad \frac{M^3}{V} \geqslant 48\,\pi^2. \tag{2.9}$$

En cambio *no existe una acotación superior*. Consideremos por ejemplo un paralelepípedo recto cuya base sea un cuadrado de lado a y la altura sea b. Es

$$V = a^2 b \quad , \quad F = 2\,a^2 + 4\,a\,b \quad , M = 2\pi a + \pi b\,.$$

Supongamos que $a \to \infty$ y $b = \lambda\, a$ (λ = constante). Resulta

$$\frac{F^{3/2}}{V} = \frac{(2+4\lambda)^{3/2}}{\lambda} \quad , \quad \frac{M\ F}{V} = \frac{(2+4\lambda)(2+\lambda)\pi}{\lambda} \quad , \quad \frac{M^3}{V} = \frac{(2\pi+\lambda\pi)^3}{\lambda}$$

y estos valores pueden ser tan grandes como se quiera tomando λ suficientemente pequeño.

3. CUERPOS CONVEXOS EN UNA RED DE CILINDROS.

Sea $K = K(t)$ un cuerpo convexo de E_n y supongamos que contiene en su interior otro cuerpo convexo K_0. Se dan N cilindros Z_p al azar (vale decir, con la densidad (1.5)), independientes, que cortan a $K(t)$. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente r de ellos corten a K_0?.

La solución es inmediata, a saber,

$$P_r = \binom{N}{r} p^r (1-p)^{N-r} \tag{3.1}$$

siendo

$$p = \frac{m(Z_p ; Z_p \cap K_0 \neq \phi)}{m(Z_p ; Z_p \cap K \neq \phi)} \tag{3.2}$$

donde el numerador y el denominador están dados por la fórmula (1.6).

Supongamos ahora que $K(t)$ sea una familia de cuerpos convexos en las condiciones del Lema 2 y hagamos $t \to \infty$, al mismo tiempo que $N \to \infty$, de manera tal que

$$\frac{N\ W_0'(Z_p)}{W_p(K)} \to D \tag{3.3}$$

siendo D una constante positiva, que llamaremos la *densidad* de los cilindros Z_p en E_n.

Sustituyendo la expresión (1.6) en (3.2), haciendo $t \to \infty$ y teniendo en cuenta (2.3) y también que $W_{n-p}'(Z_p) = \kappa_{n-p}$, resulta, en el límite

$$(3.4) \qquad P_r^* = \frac{1}{r!} \left(\frac{D\,\Sigma}{\kappa_{n-p}\; W_0'(Z_p)} \right) \exp \left(- \frac{D\,\Sigma}{\kappa_{n-p}\; W_0'(Z_p)} \right)$$

donde

$$(3.5) \qquad \Sigma = \sum_{i=p-1}^{n-1} \binom{N-p}{i-p+1} W_{i+1}(K_0)\; W_{n-1-i}'(Z_p)$$

Por consiguiente:

TEOREMA 1. *Dada en* E_n *una red de cilindros convexos* Z_p *colocados al azar e independientemente unos de otros con densidad* D, *el número de cilindros cortados por un cuerpo convexo de prueba* K_0 *colocado al azar en el espacio, sigue una distribución de Poisson de parámetro*

$$\lambda = \frac{D\,\Sigma}{\kappa_{n-p}\; W_0'(Z_p)}$$

En consecuencia, el número medio de cilindros que son cortados por K_0 es

$$E(r) = \lambda$$

4. REDES DE CILINDROS EN E_3 .

Queremos considerar ahora el caso en que, en vez de K_0, tenemos otro cilindro Z_q, es decir, queremos buscar la distribución del número de intersecciones de un cilindro de prueba Z_q con los cilindros de una red que cubre el espacio con densidad D. Los resultados son un poco complicados para el caso general de E_n por lo cual nos vamos a limitar al caso de E_3 y de cilindros convexos propiamente dichos.

Sea K un cuerpo convexo fijo de área F y curvatura media (o proyección media) M. Sea Z_0 un cilindro que corta a K y sea f_0 el área y u_0 el perímetro de la sección recta de Z_0. Exceptuando posiciones del contorno que no van a influir en el límite, podemos suponer que la intersección $Z_0 \cap K$ es un cilindro limitado, de área $2f_0+au_0+\varepsilon$ y proyección media (o curvatura media) $\pi a+(\pi/2)u_0+\varepsilon$, siendo a la longitud de un segmento de generatriz contenido en K e indicando con ε cantidades (diferentes) tales que $\varepsilon/a \to 0$ para $a \to \infty$.

La medida de los cilindros Z_1 (cuya sección recta tenga por área f_1 y perímetro u_1) que cortan a $Z_0 \cap K$, según (1.7) vale

$$(4.1) \quad m(Z_1;Z_1 \cap Z_0 \cap K \neq \phi) = 8\pi^2 f_1+2\pi^2(2f_0+au_0)+2\pi u_1(a\pi+(\pi/2)u_0)+\varepsilon.$$

La medida de los Z_1 que cortan a K es

$$(4.2) \qquad m(Z_1;Z_1 \cap K\neq\phi) = 8\pi^2 f_1 + 2\pi^2 F + 2\pi u_1 M$$

y por tanto: *la probabilidad de que Z_1, supuesto dado al azar con la densidad uniforme dZ_1, corte a $Z_0 \cap K$ sabiendo que corta a K vale*

$$(4.3) \qquad p = \frac{4\pi^2 f_1 + \pi^2(2f_0 + a\,u_0) + \pi\, u_1(\pi a + (\pi/2)u_0) + \varepsilon}{4\pi^2 f_1 + \pi^2 F + \pi\, u_1 M}$$

Si suponemos N cilindros congruentes con Z_1, independientes, que cortan a K, la probabilidad de que r de ellos corten a $Z_0 \cap K$ está dada por

$$P_r = \binom{N}{r} p^r (1 - p)^{N-r}$$

Supongamos ahora que K es una esfera de centro un punto fijo O, cuyo radio R crece hacia infinito, al mismo tiempo que el número N de cilindros que cortan a K también crece de manera tal que

$$(4.4) \qquad \frac{N}{4\pi R} \to D$$

siendo D una constante positiva. Diremos entonces que se tiene en E_3 una red de cilindros Z_1 de densidad D. Recordemos que para una esfera de radio R es $F = 4\pi R^2$, $M = 4\pi R$.

Si h es la distancia de O al cilindro Z_0 , es $(a/2)^2 = R^2 - h^2 +$ y por tanto

(4.5) $$a = R\,(1-(h/R)^2)^{1/2} + \varepsilon$$

es decir, se cumple $a/R \to 1$, cualquiera que sea la posición fija de O (o sea, cualquiera que sea h). Sustituyendo (4.4) y (4.5) en la expresión de P_r y haciendo $N \to \infty$ resulta, en el límite

(4.6) $$P_r^* = \frac{(u_0+u_1)^r\, D^r}{r!} \exp(-(u_0+u_1)D)$$

Es decir:

TEOREMA 2. *Supuesta en el espacio* E_3 *una red de cilindros convexos* Z_1 *distribuídos al azar con densidad* D, *el número de cilindros que son intersecados por un cilindro convexo* Z_0, *sigue una distribución de Poisson de parámetro*

$$\lambda = (u_0 + u_1)\, D\ .$$

Se observa que solamente intervienen los perímetros de las secciones rectas de los cilindros, no las áreas.

BIBILIOGRAFIA

[1] BONNESEN, T. - FENCHEL, W., *Theorie der konvexen Korper*, Ergebnisse der Mathematik, Berlín, 1934.

[2] GIGER, H. and HADWIGER, H., *Ueber Treffzahlwahrscheinlichkeiten im Eirkorperfeld*, Zeits. fur Wahrscheinlichkeitstheorie 10, 1968, 329-334.

[3] MILES, R.E., *Poisson flats in Euclidean Spaces, Part II: Homogeneous Poisson flats and the complementary theorem*, (en prensa).

[4] SANTALÓ, L.A., *Integralgeometrie 5, Ueber das kinematische Mass im Raum*, Hermann, París, 1936.

[5] SANTALÓ, L.A., *Sur la mesure des espaces linéaires qui coupent un corps convexe et problèmes qui s'y rattachent*, Colloque sur les questions de réalité en Géométrie, Liège, 1955, 177-190.

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.
Buenos Aires.

Recibido en setiembre de 1970.