Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 25, 1971.

UN TEOREMA DE PERTURBACION PARA GENERADORES DE FUNCIONES COSENO

por H.O. Fattorini*

Al Dr. Alberto González Domínguez, con afecto y reconocimiento

ABSTRACT. Let A be the infinitesimal generator of a cosine function $C(\cdot)$ in the Banach space E, P a closed operator in E whose domain D(P) contains the domain of A. Assume that $\int_0^t C(s)u\,ds \in D(P)$ for all $u \in E$ and t near zero and that $\lim_{t\to 0} P\int_0^t C(s)u\,ds = 0$. Then A + P generates a cosine function as well. Several variants and related results are discussed.

1. INTRODUCCION.

Una *función coseno*, o *función coseno abstracta* ([6]) o *función coseno operacional* ([7]) en el espacio de Banach E es una función $t \to C(t)$ (usaremos también en lo que sigue la notación $C(\cdot)$) definida en $]-\infty,\infty[$, a valores operadores acotados en E, tal que $C(0) = I$ y tal que la "ecuación funcional del coseno"

$$C(s+t) + C(s-t) = 2C(s)C(t) \tag{1.1}$$

vale para todo s,t. Supondremos también sin mencionarlo explícitamente cada vez que $C(\cdot)$ es *fuertemente continua* (es decir, que $t \to C(t)u$ es una función continua en E para todo $u \in E$). Tales funciones aparecen de manera natural en el estudio del problema de Cauchy abstracto de segundo orden; véase a este respecto [2] y [3]

Escribimos a continuación algunas definiciones y resultados sobre funciones coseno. Estos últimos se deducen de manera más o menos directa de la ecuación (1.1); los detalles pueden encontrarse en los lugares indicados de [2] o en [7]. Suponemos de ahora en adelante que E es un espacio de Banach *complejo*; $\mathcal{L}(E)$ es el espacio

* This research was supported in part by the National Science Foundation, U.S.A., under contract GP-9658.

de todos los operadores lineales continuos en E munido de su estructura usual de álgebra de Banach. La norma de E y la de $\mathcal{L}(E)$ serán escritas indistintamente $|\cdot|$.

PROPOSICION 1.1. $C(t) = C(-t)$, $C(s)C(t) = C(t)C(s)$ *para todo* s,t.

PROPOSICION 1.2. ([2]), Lemma 5.5). *Existen constantes* $K > 0$, $\omega \geqslant 0$ *tales que*

$$|C(t)| \leqslant Ke^{\omega|t|} \quad , \quad -\infty < t < \infty \tag{1.2}$$

El *generador infinitesimal* de $C(\cdot)$ es el operador lineal A definido por

$$Au = (d/dt)^2 C(t)u|_{t=0}$$

y cuyo dominio D(A) consiste en todos los $u \in E$ para los cuales $t \to C(t)u$ es dos veces continuamente diferenciable en $]-\infty,\infty[$. En general, ni D(A) coincide con todo E ni A es acotado; sin embargo, D(A) es denso y A es cerrado en todos los casos ([2], Lemma 5.4). Además $C(t)D(A) \subseteq D(A)$ y se tiene

$$AC(t)u = C(t)Au \quad , \quad u \in D(A) \tag{1.3}$$

PROPOSICION 1.3. ([2], Lemma 5.6). *Si* λ *es un número complejo,* $\mathrm{Re}\lambda > \omega$(1) *entonces* $R(\lambda^2;A) = (\lambda^2 I-A)^{-1}$ *existe, es acotado y puede escribirse*

$$\lambda R(\lambda^2;A)u = \int_0^\infty e^{-\lambda t}C(t)u\,dt \quad , \quad u \in E \tag{1.4}$$

Vale también la siguiente "recíproca" de la Proposición 1.3:

PROPOSICION 1.4. *Sea* $\tilde{C}(\cdot)$ *una función definida en* $[0,\infty[$, *a valores en* $\mathcal{L}(E)$, *fuertemente continua y tal que* (1.2) *valga. Sea* A *un operador cerrado con dominio* D(A) *denso en* E *tal que* $R(\lambda^2;A)$ *existe para* $\lambda > \omega$. *Supongamos, finalmente, que la igualdad* (1.4) *vale*

(1) Aquí y en lo que sigue ω es la constante en Proposición 1.2.

para $\lambda > \omega$. *Entonces* $t \to \tilde{C}(|t|)$ *es una función coseno,* A *es su generador infinitesimal.*

Para la demostración, véase [2], Lemma 5.8.

Un problema de interés en la teoría de las funciones coseno es el de encontrar condiciones necesarias y/o suficientes sobre un operador dado A para que A genere una función coseno. Una tal condición, similar al teorema de Hille-Yosida para generación de semigrupos puede verse en [7], p. 27 o en [6], p. 358 (referimos al lector también a [3], Theorem 3.1 para una demostración diferente, válida en ciertos espacios vectoriales topológicos). Lamentablemente esta condición es difícil de verificar directamente (obsérvese de paso que lo mismo es cierto del teorema de Hille-Yosida, excepto en el caso de semigrupos de contracciones o en casos que se reducen a éste). Por este motivo es recomendable disponer de resultados de perturbación para generadores de funciones coseno, es decir de resultados del tipo "si A genera una función coseno y P pertenece a una cierta clase $\mathcal{P}(A)$ entonces A+P genera también una función coseno". El objeto de esta nota es presentar un resultado de esta forma (Teorema 2.1), análogo a uno clásico de la teoría de semigrupos (véase [5], Corollary 1, p. 398 o bien [1], Theorem VII.1.19). Varias consecuencias y hechos relacionados se discuten luego.

2. EL RESULTADO PRINCIPAL.

TEOREMA 2.1. *Sea* P *un operador cerrado tal que* $D(P) \supseteq D(A)$. *Supongamos que:* a)

$$\int_0^t C(s)u\,ds \in D(P) \tag{2.1}$$

para todo $u \in E$ *y* t *suficientemente pequeño;* b)

$$\lim_{t\to 0} P\int_0^t C(s)u\,ds = 0 \tag{2.2}$$

para todo $u \in E$. *Entonces* A+P *(con dominio* $D(A+P) = D(A)$*) genera una función coseno.*

Para simplificar la notación definimos

(2.3) $$T(t)u = \int_o^t C(s)uds \quad , \quad -\infty < t < \infty .$$

Es claro que T es una función continua a valores en $\mathcal{L}(E)$ y que

(2.4) $$T(-t) = - T(t)$$

Haremos uso en lo que sigue del siguiente:

LEMA AUXILIAR 2.2. $T(t)E \subseteq D(P)$ *para todo* t, $t \to PT(t)$ *es fuertemente continua y*

(2.5) $$\limsup_{t\to\infty} t^{-1}\log|PT(t)| \leqslant \omega$$

Demostración. Integrando la igualdad (1.1) con respecto a t en el intervalo $(0,t')$, $t' > 0$ y cambiando t' por t en el resultado obtenemos

(2.6) $$T(s+t) - T(s-t) = 2C(s)T(t) = 2T(t)C(s)$$

para todo s,t (la "ecuación funcional de seno").

Escribamos la ecuación (2.6) para $s = t_o/2+h$ y $t = t_o/2$ y luego para $s = t = t_o/2$. Substrayendo la segunda igualdad así obtenida de la primera vemos que

(2.7)

$$T(t_o+h) - T(t_o) = 2T(t_o/2) [C(t_o/2 + h) - C(t_o/2)]u + T(h)u \quad , \quad u\in E$$

Echando mano de la hipótesis (2.1) y aplicando P a ambos lados de (2.7) obtenemos por medio de un sencillo argumento inductivo que $T(t)E \subseteq D(P)$ para todo t. El operador $PT(t)$ - evidentemente cerrado - está entonces definido en todo E; luego es acotado, por el teorema del gráfico cerrado. Mas aún, usando nuevamente (2.7) pero ahora en combinación con (2.2) vemos que la función $t \to PT(t)$ es fuertemente contina en $]-\infty,\infty[$. Finalmente, escribamos nuevamente (2.6) pero ahora para ambas variables iguales a t/2. Obtenemos

$$T(t) = 2T(t/2)C(t/2)$$

Iterando n veces,

$$T(t) = 2^n T(t/2^n) C(t/2^n) C(t/2^{n-1}) \ldots C(t/2)$$

Usando esta última igualdad en combinación con (1.2), vemos que

$$|PT(t)| \leqslant (2K)^n e^{\omega t} |PT(t/2^n)| \tag{2.8}$$

para $t > 0$. Por el teorema de Banach-Steinhaus y la continuidad fuerte de $PT(\cdot)$, existe una constante L tal que

$$|PT(t)| \leqslant L \quad , \; 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{2.9}$$ (2)

Sea ahora t cualquier número positivo, n el menor entero tal que $t/2^n \leqslant 1$. Entonces,

$$n < (\log t/\log 2) + 1 \tag{2.10}$$

Pero, combinando (2.8) y (2.9)

$$\log|PT(t)| \leqslant n \log(2K) + \omega t + \log L$$

lo cual, en vista de (2.10) implica (2.5).

Demostración del Teorema 2.1. La llevaremos a cabo modificando ligeramente la del Teorema VIII.1.19 en [1] por lo cual omitimos muchos de los detalles técnicos. Comenzamos por definir dos funciones medibles $\chi, \psi \geqslant 0$ por las fórmulas

$$\chi(t) = |C(t)| \; , \; \psi(t) = |PT(t)| \; , \quad t \geqslant 0 \tag{2.11}$$ (3)

De acuerdo a la Proposición 1.2 y al Lema auxiliar 2.2 si $\omega' > \omega$ existe una constante $K > 0$ tal que

(2) Para cada $u \in E$ la función $t \to PT(t)u$ es continua, luego acotada; entonces $\{PT(t);\; 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ es acotada en $\mathcal{L}(E)$.

(3) La función $\chi(\cdot)$ es el supremo de la familia de funciones continuas $\{C(\cdot)u\}$, u en la esfera unitaria de E. En consecuencia χ es semicontinua inferiormente, luego medible. La misma observación vale para ψ.

(2.12) $\chi(t) \leqslant Ke^{\omega' t}$, $\psi(t) \leqslant Ke^{\omega' t}$, $t \geqslant 0$

Una condición adicional sobre ω' será impuesta más adelante.

Acto seguido, definimos una sucesión $C_n(\cdot)$ de funciones en $[0,\infty[$ a valores en $\mathcal{L}(E)$ por la fórmula inductiva

$$C_o(t) = C(t) \quad , \quad C_n(t)u = (C_{n-1} * PT)(t)u$$

(2.13)

$$= \int_o^t C_{n-1}(t-s)PT(s)u \quad , \quad u \in E \ , \ t \geqslant 0$$

Puede demostrarse fácilmente que las funciones $C_o, C_1, \ldots$ definidas por (2.13) son fuertemente continuas en $t \geqslant 0$ para todo $n = 0,1,2,\ldots$ y que se tienen las acotaciones

(2.14) $|C_n(t)| \leqslant (\chi * \psi^{*n})(t)$, $t \geqslant 0$, $n = 0,1,\ldots$

donde el exponente $*n$ indica la potencia enésima con respecto al producto de convolución. Supongamos ahora - si es necesario aumentándolo - que el exponente ω' en (2.12) satisface

(2.15) $\displaystyle\int_o^\infty e^{-\omega' t}\ \psi(t)dt = \gamma < 1$

Entonces no es difícil demostrar, haciendo uso de la desigualdad de Young que

$$(\chi * \psi^{*n})(t) \leqslant Ke^{\omega' t}\ \gamma^n \quad , \quad n \geqslant 1$$

lo que muestra, por comparación, que la serie $\Sigma\, C_n(\cdot)$ converge absoluta y uniformemente en compactos de $[0,\infty]$ a una función $\tilde{C}(\cdot)$ a valores en $\mathcal{L}(E)$, fuertemente continua y tal que $\tilde{C}(0) = I$. Más aún,

$$|\tilde{C}(t)| \leqslant K(1-\gamma)^{-1}e^{\omega' t}$$

Como la misma acotación vale para las sumas parciales de la serie es claro que podemos transformarla Laplace término a término para $Re\lambda > \omega'$. Haciendo uso de ésto y del hecho de que la integral de Laplace transforma convolución en producto ordinario obtenemos mediante (1.4) y la igualdad

$$(2.16) \qquad R(\lambda^2;A)u = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)u\,dt \quad , \quad \mathrm{Re}\lambda > \omega' \ , \ u \in E$$

(la cual se obtiene de (1.4) mediante una integración por partes) que

$$(2.17) \qquad \int^\infty e^{-\lambda t}\tilde{C}(t)u\,dt = \lambda R(\lambda)u \quad , \quad \mathrm{Re}\lambda > \omega' \ , \ u \in E$$

donde

$$(2.18) \qquad R(\lambda) = \sum_{n=0}^\infty R(\lambda^2;A)[PR(\lambda^2;A)]^n$$

y la serie en el lado derecho converge en $\mathcal{L}(E)$, ya que en virtud de (2.15) y (2.16),

$$|PR(\lambda^2;A)| \leqslant \gamma < 1$$

Observemos ahora que

$$(\lambda^2 I-A-P)R(\lambda) = \sum_{n=0}^\infty [PR(\lambda^2;A)]^n - \sum_{n=1}^\infty [PR(\lambda^2;A)]^n = I \quad ;$$

por otra parte, si $u \in D(A+P) = D(A)$, un cálculo similar muestra que

$$R(\lambda)(\lambda^2 I-A-P)u = u$$

En consecuencia, $R(\lambda) = R(\lambda^2;A+P)$. Combinando este resultado con (2.17) y (2.18) y aplicando la Proposición 1.4 obtenemos que $\tilde{C}(\cdot)$, extendida simétricamente a $]-\infty,\infty[$ es una función coseno cuyo generador infinitesimal es $A+P$, precisamente lo que se quería demostrar.

OBSERVACION 2.3. Es interesante notar que la hipótesis (2.2) en el Teorema 2.1 - la cual, en virtud de (2.7) equivale a postular la continuidad fuerte de $t \to PT(t)$ en $]-\infty,\infty[$ - puede ser substancialmente relajada, aunque sólo en apariencia. En efecto, basta suponer que $t \to PT(t)$ sea *fuertemente medible* (con respecto a la medida de Lebesgue μ). Observemos primero que, bajo esta hipótesis, $|PT(\cdot)|$ debe ser acotada en subconjuntos compactos de $[0,\infty[$.

Por el teorema de Banach-Steinhaus, basta demostrar que $|PT(\cdot)u|$ es acotada en compactos para todo $u \in E$. Supongamos que ésto sea falso y sea $u \in E$, $\{t_n\}$ una sucesión de reales tal que $|t_n| \leqslant a < \infty$,

(2.19) $$|PT(t_n)u| \to \infty \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

Ya que $t \to |PT(t)u|$ es una función medible existe una constante $M < \infty$ y un conjunto $e \subset [-a,a]$ de medida $\mu(e) > 0$ tal que

$$|PT(t)u| \leqslant M \quad , \quad t \in e$$

Sea, finalmente $e_n = \{s;\ s = \frac{1}{2}(t_n - t) \ ,\ t \in e\} \quad , \quad n \geqslant 1$,

$$\tilde{e} = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} e_n$$

Entonces $\mu(\tilde{e}) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(\cup_{k=n}^{\infty} e_n) \geqslant \frac{1}{2}\mu(e) > 0$. Pero si $t \in \tilde{e}$, obtenemos de la ecuación (2.6) premultiplicada por P que, para una constante K conveniente

$$K\,|PT(t)|\,|u| + M \geqslant$$

$$\geqslant |2PT(t)C(t_n - t)u| + |PT(t_n - 2t)u| \geqslant$$

$$\geqslant |PT(t_n)u|$$

para un número infinito de subíndices n, lo cual sólo sería posible si fuese $|PT(t)| = \infty$, absurdo. Una vez que la acotación de $|PT(\cdot)|$ en compactos ha sido establecida continuidad fuerte de $PT(\cdot)$ se demuestra como sigue. Dados t_o y h escribimos la ecuación (2.6) para $s = t_o + h - t$ y para $s = t_o - t$. Combinando las dos desigualdades así obtenidas, y aplicando P a ambos lados vemos que, para cualquier $u \in E$

$$[PT(t_o + h) - PT(t_o)]u =$$

$$= 2PT(t)[C(t_o + h - t) - C(t_o - t)]u +$$

$$+ [PT(t_o + h - 2t) - PT(t_o - 2t)]u$$

Integrando - en el sentido de Bochner - la igualdad precedente en un intervalo cualquiera (α,β) , $\alpha < \beta$ obtenemos

$$(\beta-\alpha)\,|[PT(t_o+h) - PT(t_o)]u| \leqslant$$

$$K\cdot\sup\{\,|[C(t+h)-C(t)]u| \;\; ; \;\; t_o-\beta \leqslant t \leqslant t_o-\alpha\} \; +$$

$$+ \int_{t_o-2\beta}^{t_o-2\alpha} |[PT(t+h)-PT(t)]u|\,dt$$

lo que demuestra la continuidad fuerte de $PT(\cdot)$. Obsérvese que la demostración precedente es una sencilla adaptación de un resultado similar sobre semigrupos ([5], Lemma 10.2.1, Theorem 10.2.3); véase también [2], Lemma 5.2.

OBSERVACION 2.4. Se P un operador cerrado tal que $D(P) \supseteq D(A)$ y tal que para todo t el operador $T(t)P$ (con dominio $D(P)$) admite una extensión acotada $\overline{T(t)P}$ a todo el espacio E.(4) Entonces A+P genera una función coseno. La demostración puede hacerse modificando ligeramente la del Teorema 2.1. Observemos en primer lugar que, ya que para cada $u \in E$ y para todo t,

$$\overline{T(t)P}u = \lim_{n\to\infty} T(t)Pu_n \quad ,$$

($\{u_n\}$ cualquier sucesión en $D(P)$ tal que $u_n \to u$) donde las funciones en el lado derecho de (2.20) son continuas, $\overline{T(\cdot)P}$ es fuertemente medible. Mediante manipulaciones en un todo similares a las descriptas en la Observación 2.3 es posible demostrar que esto implica continuidad fuerte de $t \to \overline{T(t)P}$ en $t \geqslant 0$; más aún, tenemos

$$\limsup_{t\to\infty} t^{-1} \log |\overline{T(t)P}| \leqslant \omega$$

La función $\tilde{C}(\cdot)$ se define ahora mediante la serie $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(\cdot)$, donde $C_o(t) = C(t)$, $C_{n-1}(t) = (\overline{TP}*C_{n-1})(t)$. Convergencia de esta serie, que $\tilde{C}$ es una función coseno y que A+P es su generador infinitesimal se demuestran exactamente como en el caso del Teorema 2.1.

(4) Por supuesto, esto ocurre si y sólo si $T(t)P$ es acotado como operador de $D(P)$ en E.

OBSERVACION 2.5. El Teorema 2.1 se reduce para ciertos espacios (al menos en un caso particular) a un teorema bien conocido sobre perturbación de grupos. Sea en efecto $E = L^p(X,\Sigma,\mu)$, $1 < p < \infty$ donde (X,Σ,μ) es un espacio de medida ([1]). Entonces - como ha sido demostrado en [3], Teorema 2.3 - si $b \geqslant \omega$ la raíz cuadrada del operador $A-b^2I$ obtenida mediante la teoría de potencias fraccionarias de Balakrishnan genera un grupo fuertemente continuo. Ya que la traslación de A por un múltiplo del operador identidad no afecta su propiedad de ser el generador infinitesimal de una función coseno ([2], Lemma 6.1) supondremos para simplificar que el mismo A tiene una raíz $B = A^{1/2}$ que genera un grupo fuertemente continuo $t \to U(t)$. Podemos también suponer que B tiene una inversa acotada B^{-1} ([2], Lemma 6.2). Sea entonces P tal que $D(P) \supseteq D(A)$ y que las condiciones (2.1) y (2.2) - también invariantes por traslación - se verifiquen para $C(\cdot)$. Ya que

$$(2.20) \qquad C(t) = \frac{1}{2}(U(t) + U(-t))$$

(verificación inmediata) y

$$\int_0^t [U(s) + U(-s)]u\,ds = B^{-1}[U(t) - U(-t)]u \quad , \quad u \in E$$

estas condiciones se reducen a

$$B^{-1}[U(t) - U(-t)]E \subseteq D(P)$$

para todo t y

$$t \to PB^{-1}[U(t) - U(-t)]u$$

es una función continua en E para cada $u \in E$. Entonces, ambas condiciones se verifican si PB^{-1} es un operador definido en todo E y acotado lo cual, por el teorema del gráfico cerrado equivale a

$$(2.21) \qquad D(P) \supseteq D(B)$$

Es posible que - al menos en la clase de espacios considerada en esta Observación - la condición (2.21) sea *necesaria* para el cumplimiento de las hipótesis del Teorema 2.1, aunque no disponemos de una demostración. Supongamos pues que (2.21) vale, y sea C el producto cartesiano de E por sí mismo munido de su estructura algebraica usual y de cualquiera de las normas que definen la topología producto (por ejemplo, $|u| = |(u_1,u_2)| = |u_1| + |u_2|$). Entonces

$$\mathcal{U}(t) = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} U(t)+U(-t) & U(t)-U(-t) \\ U(t)-U(-t) & U(t)+U(-t) \end{Vmatrix}$$

(la notación matricial se explica por sí sola) es un grupo fuertemente continuo en $\mathcal{C}$, como un cálculo directo demuestra. Su generador infinitesimal es

$$\mathcal{B} = \begin{Vmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{Vmatrix}$$

$(D(\mathcal{B}) = D(B) \times D(B))$. De acuerdo a un resultado bien conocido en teoría de grupos, $\mathcal{B}+\mathcal{P}$, donde $\mathcal{P}$ es un operador acotado es también el generador infinitesimal de un grupo $\tilde{\mathcal{U}}(\cdot)$. Tomemos entonces

$$\mathcal{P} = \begin{Vmatrix} 0 & PB^{-1} \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

y sea

$$\tilde{\mathcal{U}}(t) = \begin{Vmatrix} U_{11}(t) & U_{12}(t) \\ U_{21}(t) & U_{22}(t) \end{Vmatrix}$$

La resolvente $R(\lambda;\mathcal{B}+\mathcal{P})$ existe para λ suficientemente grande; sea pues

$$R(\lambda;\mathcal{B}+\mathcal{P}) = \begin{Vmatrix} R_{11}(\lambda) & R_{12}(\lambda) \\ R_{21}(\lambda) & R_{22}(\lambda) \end{Vmatrix}$$

Observando la primera columna de la ecuación "matricial"

$$(\lambda \mathcal{J} - \mathcal{B} - \mathcal{P})R(\lambda ; \mathcal{B} + \mathcal{P}) = \mathcal{J}$$

$\mathcal{J}$ el operador identidad en $\mathcal{C}$, obtenemos

$$\lambda R_{11}(\lambda) - (B+PB^{-1})R_{21}(\lambda) = I ,$$

$$- BR_{11}(\lambda) + \lambda R_{21}(\lambda) = 0 ;$$

combinando estas igualdades,

$$(\lambda^2 I - B^2 - P)R_{11}(\lambda) = \lambda I$$

Trabajando de la misma manera con la ecuación

$$R(\lambda ;\mathcal{B}+\mathcal{P})(\lambda \mathcal{J}-\mathcal{B}-\mathcal{P})u = u$$

para $\quad u \in D(\mathcal{B}+\mathcal{P}) = D(\mathcal{B})$ obtenemos

$$R_{11}(\lambda)(\lambda^2 I-B^2-P)u = \lambda u$$

para $\quad u \in D(B^2+P) = D(B^2)$. Pero entonces,

$$R_{11}(\lambda) = R(\lambda^2;A+P)$$

Por último, observando el elemento en la primera fila y primera columna de la ecuación

$$R(\lambda ;\mathcal{B}+\mathcal{P})u = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\tilde{\mathcal{U}}(t)u\,dt \quad , \quad u \in \mathcal{C}$$

obtenemos

$$\lambda R(\lambda^2;A+P)u = \int_0^\infty e^{-\lambda t}U_{11}(t)u\,dt$$

para λ suficientemente grande, lo que demuestra,- haciendo uso de la Proposición 1.3 - que U_{11} es una función coseno y A+P su generador infinitesimal tal como se quería demostrar. Un argumento similar demuestra que A+P genera una función coseno si $B^{-1}P$ admite una extensión acotada $\overline{B^{-1}P}$; basta reemplazar la perturbación

P por

$$P' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ \overline{\phantom{B^{-1}P}} & \\ B^{-1}P & 0 \end{Vmatrix}$$

Este teorema ha sido demostrado de una manera ligeramente diferente por Goldstein (véase [4], especialmente Teoremas 2.1 y 4.1).

REFERENCIAS

[1] N. DUNFORD, J.I. SCHWARTZ, *Linear operators*, Interscience, New York, 1958.

[2] H.O. FATTORINI, *Ordinary differential equations in linear topological spaces*, I, J. Diff. Equations 5(1969) 72-105.

[3] --------------, *Ordinary differential equations in linear topological spaces*, II, J. Diff. Equations 6(1969) 50-70.

[4] J. GOLDSTEIN, *Semigroups and second-order differential equations*, J. Functional Analysis 4(1969) 50-70.

[5] E.HILLE, R.S. PHILLIPS, *Functional analysis and semi-groups*, Amer. Math. Soc., Providence 1957.

[6] G. Da PRATO, *Una caratterizzazione dei funzioni coseno astratte*, Bull. Unione Mat. Italiana 22(1967) 357-362.

[7] M. SOVA, *Cosine operator functions*, Rozprawy Mat. XLIX(1966) 3-46.

University of California.
Los Angeles.

Recibido en junio de 1970.