Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 25, 1971.

SUR CERTAINES CLASSES D'ENSEMBLES PARFAITS LINEAIRES

par Jean-Pierre Kahane

en hommage au Professeur A. González Domínguez

Une fois pour toutes, choisissons un ensemble dénombrable dense sur l'intervalle ouvert]0 , 1[, et ordonnons le sous la forme $x_1,x_2,\dots,x_n,\dots$. A toute suite réelle $y = (y_o,y_1,\dots,y_n,\dots)$ telle que $y_n > 0$ pour $n > 0$ et $\sum_1^\infty y_n < \infty$ on fait correspondre un ensemble parfait de mesure nulle sur la droite R, que nous note - rons E_y, dont les intervalles contigus puissent s'ordonner en une suite $I_1,I_2,\dots,I_n,\dots$ de façon que 1°) la longueur de I_n soit y_n 2°) pour chaque n, $I_1,I_2,\dots,I_n$ aient même disposition que $x_1,x_2,\dots,x_n$ 3°) l'extrémité gauche de E_y soit y_o. L'ensemble E_y peut s'obtenir ainsi: soit τ_y la fonction de sauts sur [0,1] définie par

$$\tau_y = y_o + \sum_{x_n<t} y_n \qquad ;$$

alors E_y est la fermeture de $\tau_y([0,1])$. Tout ensemble parfait totalement discontinu peut s'obtenir de cette manière.

Dans le cas où la suite $x_1,x_2,\dots,x_n,\dots$ est la suite $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$,.... (c'est-à-dire $x_{2^j+n} = \frac{2n+1}{2^{j+1}}$ pour $0 \leqslant n < 2^j$), on dira que la construction de E_y est canonique.

Choisissons maintenant deux suites réelles $\ell = (\ell_o,\ell_1,\dots,\ell_n,\dots)$ et $d = (d_o,d_1,\dots,d_n,\dots)$ telles que $\ell_n > 0$ et $d_n > 0$ pour $n > 0$, $\sum_1^\infty \ell_n < \infty$ et $\sum_1^\infty d_n < \infty$, et désignons par Ω l'ensemble de toutes les suites $\omega = (\omega_o,\omega_1,\dots,\omega_n,\dots)$ telles que $0 \leqslant \omega_n \leqslant 1$ $(n \geqslant 0)$. A tout $\omega \in \Omega$ on associe l'ensemble $E_{\ell+\omega d}$. Munissons Ω de la mesure de probabilité naturelle. On s'intéressera à des propriétés presque sûres de $E_{\ell+\omega d}$ qui jouent un rôle en analyse de Fourier.

1. LEMMES PRELIMINAIRES.

Etant donné un ensemble fermé linéaire E et une function positive $h(\delta)$ $(\delta > 0)$, sous-additive et croissante, rappelons que la mesure de Hausdorff de E par rapport à h, que nous noterons $\Lambda_h(E)$, est la limite, quand $\varepsilon \to 0$, de l'expression $H_{\varepsilon,h}(E)=\inf\sum_i h(|\Delta_i|)$, où $\{\Delta_i\}$ est une famille d'intervalles de longueurs $|\Delta_i| \leqslant \varepsilon$ telle que $\cup_i \Delta_i \supset E$, et la borne inférieure est prise sur toutes les familles $\{\Delta_i\}$. On a $0 \leqslant \Lambda_h(E) \leqslant \infty$.

Quand $h(\delta) = \delta^\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, on écrira $\Lambda^\alpha(E)$ au lieu de $\Lambda_h(E)$; c'est la mesure de Hausdorff en dimension α. La borne inférieure des α tels que $\Lambda^\alpha(E) < \infty$ est la dimension de Hausdorff de E, qu'on note dim E.

Le lemme suivant est dû à Frostman (voir p. ex. [5] p. 27).

LEMME 1. *Les propositions suivantes sont équivalentes:*
a) $\Lambda_h(E) > 0$ b) E *porte une mesure positive* ρ, *de masse totale* 1, *telle que, pour tout intervalle* I, *on ait* $\rho(I) \leqslant C\, h(|I|)$, C *étant une constante indépendante de* I.

Ce qui suit est tiré ou inspiré de [1].

Posons $r_n = \sum_n^\infty y_j$, et

$$\alpha(y) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log(n/r_n)} .$$

LEMME 2. *Sous l'hypothèse*

$$\varliminf_{n\to\infty} nh\left(\frac{r_n}{n}\right) < \infty \qquad \textit{(resp. = 0)}$$

on a $\Lambda_h(E_y) < \infty$ *(resp. 0). En conséquence* $\dim E_y \leqslant \alpha(y)$.

Preuve. Les intervalles I_1, $I_2, \ldots, I_{n-1}$ divisent E_y en n portions $P_1, \ldots, P_n$ noues écrirons $|P_j|$ pour le diamètre de P_j. On a

$$|P_1| + \ldots + |P_n| = r_n \quad .$$

Si $h(\delta)$ est concave, il en résulte que

$$\frac{1}{n}\,(h(|P_1|) + \ldots + h(|P_n|)) \leqslant h(\frac{r_n}{n})\ .$$

En tous cas

$$\frac{1}{n}\,(h(|P_1|) + \ldots + h(|P_n|)) \leqslant h^*(\frac{r_n}{n}) \leqslant h(4\,\frac{r_n}{n})\ ,$$

ou $h^*(\delta)$ est la fonction, linéaire entre $2^{-(j+1)}$ et 2^{-j}, telle que $h^*(2^{-(j+1)}) = h(2^{-j})$ (j entier). D'où la conclusion.

LEMME 3. *On suppose la construction de* E_y *canonique , et* $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n \geqslant \ldots$ *Sous l'hypothèse*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\, nh(\frac{r_n}{n}) > 0 \qquad (\text{resp.} = \infty)$$

on a $\Lambda_h(E_y) > 0$ *(resp.* ∞*). On a dans ce cas* $\dim E_y = \alpha(y)$.

Preuve. Il est commode ici de désigner les n portions en lesquel les I_1, $I_2, \ldots I_{n-1}$ divisent E_y par P_n , $P_{n+1}, \ldots, P_{2n-1}$, en convenant que P_j est la portion dont le support convexe contient I_j. Ainsi (dans le cas $n = 2^j$) les portions $P_{2^j}, P_{2^j+1}, \ldots, P_{2^{j+1}-1}$

sont disposées de gauche a droite, et l'on a

$|P_{2^j}| \geqslant |P_{2^j+1}| \geqslant \dots \geqslant |P_{2^{j+1}-1}|$. On vérifie de plus

$|P_{2^{j+1}-1}| \geqslant |P_{2^{j+1}}|$; la suite $|P_n|$ est donc décroissante.

Désignons par ρ l'image de la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ par la fonction croissante τ_j. Alors $\rho(P_{2^j+n}) = \frac{1}{2^j}$ pour $0 \leqslant n < 2^j$.

Il s'ensuit que, pour tout intervalle I tel que $|I| \leqslant |P_{2^{j+1}-1}|$

on a $\rho(I) \leqslant \frac{1}{2^{j-1}}$. Or $|P_{2^{j+1}-1}| \geqslant |P_{2^{j+1}}| \geqslant \frac{1}{2^{j+1}} r_{2^{j+1}}$.

L'hypothèse

$$\varliminf_{j\to\infty} 2^j h\left(\frac{1}{2^{j+1}} r_{2^{j+1}}\right) > 0$$

entraine donc $\Lambda_h(E_y) > 0$. Le reste en découle, compte tenu du lemme 2.

LEMME 4. *Si* $y'_n \geqslant y_n$ $(n = 1,2,\dots)$ *on a* $\Lambda_h(E_{y'}) \geqslant \Lambda_h(E_y)$.

Evident.

LEMME 5. *On suppose la construction de* E_y *canonique, et* $y_n \approx \frac{1}{n^{1/\alpha}}$ $(0 < \alpha < 1)$ *(le signe* $\approx$ *signifie que le rapport des deux membres est compris entre deux nombres strictement positifs). Alors* $\dim E_y = \alpha$

Preuve. lemmes 3 et 4.

LEMME 6. *Notons* $\boxplus_p E$ *l'ensemble de tous les nombres de la forme*

$$\textstyle\sum_{j=1}^{p} c_j\, x_j \qquad (c_j \textit{ rationnels, } x_j \in E).$$

Si $p\alpha(y) < 1$, *l'ensemble* $\boxplus_p E_y$ *est de mesure de Lebesgue nulle.*

Preuve. Reprenons les notations du lemme 2. Fixons $c_1,\dots,c_p$; soit $A = \{\sum_{j=1}^{p} c_j\, x_j\ ;\ x_j \in E\}$ et $b = \sup |c_j|$. Pour tout n ,

$$A \subset \cup_{1\leq\alpha_1,\dots,\alpha_p\leq n} (c_1 P_{\alpha_1}+\dots+c_p P_{\alpha_p}) \quad .$$

Chaque parenthèse est contenue dans un segment de longueur $\leqslant$ $\leqslant b(|P_{\alpha_1}|+\dots+|P_{\alpha_p}|)$, donc

$$\text{mes } A \leqslant b \sum_{1\leq\alpha_1,\dots,\alpha_p\leq n} (|P_{\alpha_1}|+\dots+|P_{\alpha_p}|) = b\, n^{p-1} r_n \quad .$$

Sous l'hypothèse

$$\lim_{n\to\infty} n^{p-1} r_n = 0$$

(plus faible que celle de l'énoncé), on a donc mes $\underset{p}{\boxplus} E_y = 0$.

LEMME 7. *Si* $\alpha(y) = 0$, *le groupe additif engendré par* E_y *est de mesure nulle.*

Preuve. Lemme 6. Remarquons que $\alpha(y) = 0$ équivaut à

$$\lim_{n\to\infty} r_n\, n^A = 0$$

pour tout $A > 0$.

Voici enfin une version forte du théorème classique d'approximation diophantienne de Kronecker.

LEMME 8. *Soit* $\tau_0,\dots,\tau_{n-1},\phi_0,\dots,\phi_{n-1}$ *des nombres réels* , $0 < \varepsilon < \frac{1}{10}$, *et* I *un intervalle réel. Posons*

$$\rho_1 = 2 \sum \Big|\sum_{j=0}^{n-1} m_j\, \tau_j\Big|^{-1} \quad .,$$

la première somme étant étendue à tous les systèmes d'entiers m_j *tels que* $-M \leqslant m_j \leqslant M$ $(j = 0,\dots,n-1)$ *et* $\sum_0^{n-1} |m_j| \neq 0$, *et*

$$\rho_2 = 2 \sum |\textstyle\sum_{j=o}^{n-1} m_j\tau_j - \tau_k|^{-1} ,$$

la première somme étant étendue à tous les systèmes $\{m_j, k\}$ *tels que* $-M \leqslant m_j \leqslant M$ $(j = 0,\dots,n-1)$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, *et* $\sum_{j\neq k}|m_j| + |m_k - 1| \neq 0$. *Si l'on a* $M \geqslant \frac{4n}{\varepsilon}$ *et* $|I| \geqslant \sup(\frac{4n\rho_1}{\varepsilon}, \frac{4\rho_2}{\varepsilon})$, *il existe* $\lambda \in I$ *tel que*

$$\sup_{0\leq j\leq n-1} |e^{\tau_j\lambda} - e^{i\phi_j}| < \varepsilon .$$

Preuve. On utilise la méthode classique des produits de Riesz, en posant

$$P(\lambda) = \textstyle\sum_{j=o}^{n-1} e^{-i(\tau_j\lambda - \phi_j)}$$

$$R(\lambda) = \textstyle\prod_{j=o}^{n-1}(1 + 2 \sum_{m=1}^{M}(1 - \frac{|m|}{M})\cos m(\tau_j\lambda - \phi_j)$$

$$R(\lambda) = 1 + S(\lambda)$$

$$P(\lambda)R(\lambda) = (1 - \frac{1}{M})n + T(\lambda)$$

et on observe que

$$|\int_I S(\lambda)d\lambda| \leqslant \rho_1$$

$$|\int_I T(\lambda)d\lambda| \leqslant \rho_2$$

d'où

$$\sup_{\lambda\in I} \operatorname{Re} P(\lambda)(1 + \frac{\rho_1}{|I|}) \geqslant \frac{1}{|I|} \operatorname{Re} \int_I P(\lambda)R(\lambda)d\lambda \geqslant (1 - \frac{1}{M})n - \frac{\rho_2}{|I|} ,$$

d'où la conclusion (pour le détail des calculs, voir [5], p. 175).

2. ENSEMBLES DE MULTIPLICITE. ENSEMBLES DE SALEM.

Pour tout $\alpha \geqslant 0$, on appelle ensemble de type M_α tout ensemble fermé sur la droite qui porte une mesure $\mu \not\equiv 0$ dont la transformée de Fourier satisfait $\hat{\mu}(u) = o(|u|^{-\alpha/2})$ $(|u| \to \infty)$. On dit aussi qu'un ensemble de type M_o est un ensemble de multiplicité au sens strict.

La borne supérieure des α tels qu'un ensemble fermé linéaire E sans point intérieur soit de type M_α est la dimension de Fourier de E; on la note F-dim E. On a toujours F-dim E $\leqslant$ dim E , le second membre désignant la dimension de Hausdorff. Si F-dim E = dim E , on dit que E est un ensemble de Salem. Sauf pour les dimensions 0 et 1, les seules méthodes connues pour la mise en évidence d'ensembles de Salem sont des méthodes aléatoires, dont le prototype est [9] (voir aussi [5] chap. 8, [4] , [3] chap. 15).

Nous allons donner des conditions simples sur d garantissant que l'ensemble $E_{\ell+\omega d}$ soit presque sûrement un ensemble de type M_o, et des conditions simples sur ℓ et d garantissant que $E_{\ell+\omega d}$ soit p.s. un ensemble de Salem. Voici d'abord le théorème principal.(1)

THEOREME 1. *Supposons que* $h(\delta)$ *soit une fonction sous-additive et croissante, par rapport à laquelle l'ensemble* E_{d^2} *ait une mesure de Hausdorff strictement possitive. Quelle que soit la suite* ℓ, *il est presque sûr que l'ensemble* $E_{\ell+\omega d}$ *porte une mesure* μ_ω *positive, de masse totale* 1, *dont la transformée de Fourier satisfait*

$$\hat{\mu}_\omega(u) = O(\sqrt{h(\tfrac{1}{u^2})\log u}) \qquad (|u| \to \infty).$$

Démonstration. Soit ρ une mesure positive de masse totale 1 , portée par E_{d^2}, telle que $\rho(I) \leqslant C\, h(|I|)$ (lemme 1). Soit

(1) Ce théorème permet d'obtenir l'énoncé principal de [2] ; l'esquisse de démonstration donnée en [2] est incorrecte, comme me l'a signalé M. Frode Poulsen.

$I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ la suite des intervalles contigus à l'ensemble E_{d^2}, numérotés suivant la convention initiale: $|I_n| = d_n^2$, et la disposition relative de $I_1, I_2, \ldots, I_n$ est celle de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pour simplifier les notations, on suppposera $\ell_o = d_o = 0$. Soit x'_n la ρ-mesure de la partie de E_{d^2} située à gauche de I_n. La suite $x'_1, \ldots, x'_n \ldots$ est dense sur $[0,1]$, et la disposition de $x'_1, \ldots, x'_n$ est celle de $x_1, \ldots, x_n$ quel que soit n. On peut donc supposer, ce que nous ferons, $x_n = x'_n$ $(n = 1,2,\ldots)$. La mesure ρ est alors l'image de la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ par la fonction croissante $\tau_{d^2}(t) = \sum_{x_n<t} d_n^2$.

On pose

$$\tau(t) = \tau_{\ell+\omega d}(t) = \sum_{x_n<t} (\ell_n+\omega_n d_n)$$

et on définit μ_ω comme l'image de la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ par la fonction croissante τ. Ainsi

$$\hat{\mu}_\omega(u) = \int_0^1 e^{iu\tau(t)}dt \quad .$$

En désignant par $\mathcal{E}$ l'intégrale sur Ω (espérance), on va étudier $\mathcal{E}(|\hat{\mu}_\omega(u)|^{2p})$ (p entier > 0). On a

$$|\hat{\mu}_\omega(u)|^{2p} = \int_0^1 \cdots \int_0^1 e^{iu(\tau(s_1)+\ldots+\tau(s_p)-\tau(s'_1)-\ldots-\tau(s'_p))} ds_1\ldots ds_p ds'_1\ldots ds'_p$$

$$= (p!)^2 \int_{0\le s_1\le\ldots\le s_p\le 1} \int_{0\le s'_1\le\ldots\le s'_p\le 1} e^{iu(\tau(s_1)-\ldots-\tau(s'_p))} ds_1\ldots ds'_p.$$

En ordonnant $s_1,\ldots,s_p,s'_1,\ldots,s'_p$ en une suite croissante $t_1,t_2,\ldots,t_{2p}$, on obtient

$$|\hat{\mu}_\omega(u)|^{2p} = (p!)^2 \sum_{\{\varepsilon_j\}} \int_{0\le t_1\le\ldots\le t_{2p}\le 1} e^{iu(\varepsilon_1\tau(t_1)+\ldots+\varepsilon_{2p}\tau(t_{2p}))} dt_1\ldots dt_{2p},$$

la somme étant prise pour tous les systèmes $\{\varepsilon_j\}$ tels que $\varepsilon_j = \pm 1$ $(j = 1,2,\ldots,2p)$ et $\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{2p} = 0$. Ainsi

$$\mathcal{E}(|\hat{\mu}_\omega(u)|^{2p}) = (p!)^2 \sum_{\{\varepsilon_j\}} \int_{0\leq t_1\leq\ldots\leq t_{2p}\leq 1} I(t_1,\ldots,t_{2p})dt_1\ldots dt_{2p}$$

avec

$$I(t_1,\ldots,t_{2p}) = \mathcal{E}(e^{iu(\varepsilon_1\tau(t_1)+\ldots+\varepsilon_{2p}\tau(t_{2p}))}) .$$

En utilisant l'indépendance des variables aléatoires ω_n , on obtient successivement (on pose $t_o = 0$ et on commence par une transformation d'Abel)

$$I(t_1,\ldots,t_{2p}) = \mathcal{E}\ \exp(iu \sum_{j=1}^{2p} (\varepsilon_j+\ldots+\varepsilon_{2p})(\tau(t_j)-\tau(t_{j-1})))$$

$$= \prod_{j=1}^{2p} \mathcal{E}\ \exp(iu(\varepsilon_j+\ldots+\varepsilon_{2p})(\tau(t_j)-\tau(t_{j-1})))$$

$$= \prod_{j=1}^{2p} \prod_{t_{j-1}\leq x_n<t_j} \int_o^1 \exp(iu(\varepsilon_j+\ldots+\varepsilon_{2p})(\ell_n+\omega_n d_n))d\omega$$

$$|I(t_1,\ldots,t_{2p})| = \prod_{j=1}^{2p} \prod_{t_{j-1}\leq x_n<t_j} \left| \frac{\sin \frac{1}{2}(\varepsilon_j+\ldots+\varepsilon_{2p})u\ d_n}{\frac{1}{2}(\varepsilon_j+\ldots+\varepsilon_{2p})u\ d_n} \right|$$

avec la convention que cette dernière fraction vaut 1 quand $\varepsilon_j+\ldots+\varepsilon_{2p} = 0$. Quand j est pair, on a $|\varepsilon_j+\ldots+\varepsilon_{2p}| \geqslant 1$; donc

$$\left| \frac{\sin \frac{1}{2}(\varepsilon_j+\ldots+\varepsilon_{2p})u\ d_n}{\frac{1}{2}(\varepsilon_j+\ldots+\varepsilon_{2p})u\ d_n} \right| \leqslant \exp(-\tfrac{1}{10}\inf(u^2d_n^2,1)) .$$

Il en résulte que

$$|I(t_1,\ldots,t_{2p})| \leqslant \exp\Big(-\frac{u^2}{10}\sum_{j=1}^{2p}\ \sum_{t_{2j-1}\leq x_n<t_{2j}} \inf(d_n^2, \frac{1}{u^2})\Big).$$

En intégrant successivement par rapport à $t_2,\ldots,t_{2p}$ puis $t_1,\ldots,t_{2p-1}$, et en observant qu'il y a $\binom{2p}{p}$ systèmes $\{\varepsilon_j\}$, on obtient

$$\mathcal{E}(|\hat{\mu}_\omega(u)|^{2p}) \leqslant \binom{2p}{p}\ p!\ X^p$$

avec

$$X = \sup_{0\leq a\leq 1}\int_o^{1-a} \exp\Big(-\frac{u^2}{10}\sum_{a\leq x_n<a+t} \inf(d_n^2, \frac{1}{u^2})\Big)dt\ .$$

Par hypothèse, on a pour tout intervalle I

$$\text{mes}\{t \mid \tau_{d^2}(t) \in I\} = \rho(I) \leqslant C\ h(|I|)$$

donc, pour tout couple (α,t) tel que $0 \leqslant \alpha < \alpha+t \leqslant 1$ et $\tau_{d^2}(\alpha+t)-\tau_{d^2}(\alpha) \leqslant \delta$, on a $t \leqslant C\ h(\delta)$. Posons

$$\omega = \sup\{t \mid \exists\ \alpha \in [0,1-t]\ \sum_{\alpha\leq x_n<\alpha+t} d_n^2 < \frac{1}{u^2}\}\quad ;$$

on a $\omega \leqslant C\ h(\frac{1}{u^2})$. Pour tout $\omega' > \omega$ et tout $\alpha \in [0,1-\omega']$, on a

$$\sum_{\alpha\leq x_n<\alpha+\omega'} \inf(d_n^2, \frac{1}{u^2}) \geqslant \frac{1}{u^2}\quad ,$$

donc, si $a \in [0,1-j\omega']$, on a

$$\sum_{a\leq x_n<a+j\omega'} \inf(d_n^2, \frac{1}{u^2}) \geqslant \frac{j}{u^2}\quad .$$

Il en résulte que

$$X \leqslant \omega'(1 + e^{-\frac{1}{10}} + e^{-\frac{2}{10}} + \ldots) \leqslant 20\omega'\quad ,$$

donc $X \leqslant 20\ C\ h(\frac{1}{u^2})$. En définitive

$$\mathcal{E}(|\hat{\mu}_\omega(u)|^{2p}) \leqslant (C'\ p\ h(\frac{1}{u^2}))^p \quad (C' = 40\ C)\ .$$

Etant donné $\varepsilon > 0$, on pose $p(\varepsilon n)$ = partie entière de $\log \varepsilon n$ (n entier $> \frac{e}{\varepsilon}$) et on obtient

$$\mathcal{E}(\sum_{n>\frac{e}{\varepsilon}} (\frac{|\hat{\mu}_\omega(\varepsilon n)|^2}{e^2 C'\ p(\varepsilon n) h(\frac{1}{\varepsilon^2 n^2})})^{p(\varepsilon n)}) < \infty$$

donc p.s.

$$|\hat{\mu}_\omega(\varepsilon n)| \leqslant e\ \sqrt{C'\ p(\varepsilon n)\ h(\frac{1}{\varepsilon^2 n^2})}$$

pour n assez grand. Comme μ est portée par l'intervalle compact

$[0,L] = [0, \sum_{n=1}^{\infty} (\ell_n + d_n)]$, il en résulte, en choisissant $\varepsilon < 2\pi L^{-1}$, que p.s.

$$|\hat{\mu}_\omega(u)| \leqslant C''\ \sqrt{h(\frac{1}{u^2}) \log u}$$

pour u assez grand, et $C'' = 20\ \sqrt{C}$.

Le résultat est un peu plus précis que ne l'indique le théorème 1 et permet, par un choix convenable des suites ℓ et d, de mettre en évidence des ensembles $E_{\ell+\omega d}$ qui ne sont jamais de type M_o, et qui cependant portent p.s. des mesures positives μ_ω de masse totale 1 telles que $\overline{\lim_{u\to\infty}}\ |\hat{\mu}_\omega(u)| < 1$. Nous n'insisterons pas sur ce point. Observons que $E_{\ell+\omega d}$ est p.s. de type M_o dès que $h(\frac{1}{u^2}) = o(\frac{1}{\log u})\ (u \to \infty)$.

Pour interpréter cette condition, faisons appel aux lemmes 3 et 4

THEOREME 2. *Supposons que la construction des* $E_{\ell+\omega d}$ *est canonique, et que* $\lim_{n\to\infty} (n^{-1}\log \frac{1}{d_n}) = 0$. *Alors* $E_{\ell+\omega d}$ *est p.s. un ensemble de type* M_o.

(Le lemme 3 s'applique quand la suite d_n est décroissante, et le lemme 4 donne le cas général).

De même, en appliquant le lemme 5, on obtient

THEOREME 3. *Supposons que la construction des* $E_{\ell+\omega d}$ *est canonique,* $d_n \approx \ell_n \approx n^{-1/\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$. *Alors* $E_{\ell+\omega d}$ *est p.s. un ensemble de dimension* α.

Si par exemple on choisit $d_n = \ell_n = 3^{-j}$ quand $2^{j-1} \leqslant n < 2^j$, on obtient pour E_ℓ l'ensemble triadique de Cantor, dont il est bien connu qu'il n'est pas de type M_o (donc a fortiori n'est pas un ensemble de Salem); mais presque tous les ensembles $E_{\ell+\omega d}$ (obtenus à partir de E_ℓ en faisant subir aux intervalles contigus des homothéties de rapports aléatoires et indépendants compris entre 1 et 2) sont des ensembles de Salem de dimension $\frac{\log 2}{\log 3}$.

3. ENSEMBLES INDEPENDANTS. ENSEMBLES DE RUDIN. PROPRIETES ARITHMETIQUES.

Rudin a mis en évidence, à partir d'une construction de Salem, des ensembles fermés rationnellement indépendants sur la droite qui sont de type M_o [7]. On appellera de tels ensembles ensembles de Rudin. Comme pour les ensembles de Salem, les seules méthodes connues pour les mettre en évidence sont des méthodes aléatoires (voir références citées).

Donnons d'abord des conditions simples pour que $E_{\ell+\omega d}$ soit p.s. un ensemble $\mathcal{Q}$-indépendant.

THEOREME 4. *Supposons* $d_o \neq 0$. *Les propositions suivantes sont équivalentes.* a) $E_{\ell+\omega d}$ *est p.s.* Q*-indépendant* b) *le groupe additif (engendré par* $E_{\ell+\omega d}$ *est p.s. de mesure de Lebesgue nulle.*

Démonstration. La partie a) $\Rightarrow$ b) découle du fait suivant bien bien connu: si K est un fermé Q-indépendant sur R, le groupe additif $G(K)$ qu'il engendre n'est pas R entier (en effect, $G(K)$ est une réunion dénombrable de fermés de la forme $\{n_1t_1+\ldots+n_rt_r \; ; \; t_1 \in K_1,\ldots,t_r \in K_r\}$ où les n_j sont des entiers rationnels non tous nuls, et les K_j des portions disjointes de K; un tel fermé est homéomorphe à $K_1 \times \ldots \times K_r$, donc non dense)

Monstrons maintenant b) $\Rightarrow$ a). Pour chaque entier k et chaque ensemble E_y défini dans l'introduction, ordonnons de gauche à droite les intervalles contigus $I_1,I_2,\ldots,I_k$: on obtient $I_{q(1)},I_{q(2)},\ldots,I_{q(k)}$. Désignons par $P_o,P_1,\ldots,P_k$ les portions de E_y qui se trouvent respectivement à gauche de $I_{q(1)}$, entre $I_{q(1)}$ et $I_{q(2)}$,..., à droite de $I_{q(k)}$. Dire que E_y est Q-dépendant, c'est dire qu'il existe un entier $k > 0$, des entiers relatifs n_o ,..., n_k non tous nuls , et des $x_j \in P_j$ $(j = 0,1,\ldots,k)$ tels que

$$n_ox_o + \sum_{j=1}^k n_j(x_j-x_{j-1}) = 0 .$$

Quand $y = \ell+\omega d$, les P_j sont des ensembles aléatoires, que nous notons $P_j(\omega)$. Il s'agit de montrer que, sous l'hypothèse b) , l'évènement

$$A : \exists\; x_j \in P_j(\omega)(j=0,1,\ldots,k) \mid n_ox_o + \sum_{j=1}^k n_j(x_j-x_{j-1}) = 0$$

est de probabilité nulle, pour tout choix de $k,n_o,n_1,\ldots,n_k$. Choisissons q tel que $n_q \neq 0$; posons $\nu = 0$ si $q = 0$ et $q = q(\nu)$ sinon. Soit Ω_ν l'espace des suites $\{\omega_j \; , \; j \neq \nu\}$. Si l'on fixe $\omega_\nu = \alpha$, la fonction $\tau_{\ell+\omega d}(t)$, l'ensemble $E_{\ell+\omega d}$ et les portions $P_j(\omega)$ deviennent des objets aléatoires sur $\Omega_\nu^{\cdot}$, que nous notons

$\tau_{\ell+\omega d}(t,\alpha)$, $E_{\ell+\omega d}(\alpha)$ et $P_j(\omega;\alpha)$. L'hypothèse b) entraine que, pour presque tout $\alpha \in [0,1]$, on a p.s. (dans Ω_ν)

$$\text{mes } G(E_{\ell+\omega d}(\alpha)) = 0 \quad .$$

Fixons α pour qu'il en soit ainsi. A tout $x \in E_{\ell+\omega d}$ associons continûment $x' \in E_{\ell+\omega d}(\alpha)$ de telle façon que, si $x = \tau_{\ell+\omega d}(t)$, on ait $x' = \tau_{\ell+\omega d}(t,\alpha)$. L'évènement A peut s'écrire

$$A : \exists \; x'_j \in P_j(\omega;\alpha)(j=0,\dots,k) \mid n_o x'_o + \textstyle\sum_{j=1}^k n_j(x'_j - x'_{j-1}) = -n_q d_\nu(\omega_\nu - \alpha)$$

Il implique donc

$$n_q d_\nu(\omega_\nu - \alpha) \in G(E_{\ell+\omega d}(\alpha)) \quad .$$

P. s. (dans Ω_ν) l'ensemble des ω_ν tels qu'il en soit ainsi est de mesure nulle. Il en résulte bien que la probabilité de A est nulle. Cela achève la démonstration du théorème 4.

Appliquons maintenant le lemme 7. On obtient:

THEOREME 5. *Supposons* $d_o = 0$, *et* $\alpha(\ell+d) = 0$ *(c'est-à-dire* $\lim_{n\to\infty} (\ell_n+d_n)n^A = 0$ *pour tout* $A > 0$*). Alors* $E_{\ell+\omega d}$ *est p.s. Q-indépendant.*

Les hypothèses du théorème 5 et du théorème 2 sont évidemment compatibles, et donnent des exemples d'ensembles $E_{\ell+\omega d}$ qui sont p.s. ensembles de Rudin.

En se référant au théorème 1, on peut aussi vérifier que, pour toute fonction positive $\psi(u)$ tendant vers 0 à l'infini moins vite que toute fonction puissance, c'est-à-dire telle que $\lim_{u\to\infty}\psi(u)u^\varepsilon = \infty$ pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble de Rudin portant une mesure positive μ, de masse 1, telle que $\hat{\mu}(u) = O(\psi(u))$ $(u \to \infty)$. On ne peut pas aller plus loin, puisqu'un ensemble de type M_α avec $\alpha > 0$ n'est jamais Q-indépendant.

Plus précisément, si E est de type M_α et $p\alpha > 1$ (p entier) , l'ensemble

$$\underset{p}{\oplus} E = E + E + \ldots + E \qquad \text{(p fois)}$$

porte une mesure $\mu * \mu * \ldots * \mu$ (p fois) dont la transformée de Fourier est $O(|u|^{-\frac{p\alpha}{2}})$, donc absolument continue. Il s'ensuit que $\underset{p}{\oplus} E$ est de mesure positive.

En application du théorème 3 et du lemme 6, on obtient:

THEOREME 6. *Supposons que la construction des ensembles* $E_{\ell+\omega d}$ *est canonique, et que* $d_n \approx \ell_n \approx n^{-\frac{1}{\alpha}}$ $(0 < \alpha < 1)$. *Pour* p *entier* $> \frac{1}{\alpha}$, *l'ensemble* $\underset{p}{\oplus} E_{\ell+\omega d}$ *est p.s. de mesure positive, et pour* p *entier* $< \frac{1}{\alpha}$, $\underset{p}{\oplus} E_{\ell+\omega d}$ *est p.s. de mesure nulle.*

4. ENSEMBLES DE KRONECKER.

Un ensemble fermé E sur la droite est appelé ensemble de Krone - cker si, pour toute fonction continue réelle ϕ définie sur E , il existe une suite réelle λ_j telle que

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{x\in E} |e^{i\phi(\tau)} - e^{i\lambda_j\tau}| = 0 . \qquad [8]$$

Un ensemble de Kronecker est toujours $\mathcal{Q}$-indépendant et n'est jamais de type M_o. On va montrer le théorème suivant.

THEOREME 7. *Supposons la suite* $d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$ *décroissante,* $d_n \neq 0$, *et*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \left(n\left(\frac{1}{d_{n-1}}\right) \textstyle\sum_{j=n}^{\infty} (\ell_j + d_j)\right)^{1/2n} = 0 .$$

Alors $E_{\ell+\omega d}$ *est p.s. un ensemble de Kronecker.*

Démonstration, Posons $x_o = 1$, $\tau_j = \tau_{\ell+\omega d}(x_j)$ et $r_n = \sum_{j=n}^{\infty}(\ell_j+d_j)$ (la suite $x_1, x_2, \ldots$ étant celle de l'introduction). Pour chaque n, $E_{\ell+\omega d}$ est recouvert par n intervalles fermés; dont les extrémités droites sont $\tau_o, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$, et dont la somme des longueurs est r_n. Quand τ varie dans l'un de ces intervalles, $e^{i\lambda\tau}$ varie de moins de $|\lambda| r_n$. Si ϕ est une fonction constante sur chacun de ces intervalles, et qu'on pose $\phi(\tau_j) = \phi_j$, on a

$$\sup_{\tau \in E_{\ell+\omega d}} |e^{i\phi(\tau)} - e^{i\lambda\tau}| \leqslant \sup_{0 \leq j \leq n-1} |e^{i\phi_j} - e^{i\lambda\tau_j}| + |\lambda| r_n .$$

Utilisons maintenant le lemme 8 et ses notations. Chacune des sommes $X = \sum_{j=o}^{n-1} m_j\tau_j$ ou $\sum_{j=o}^{n-1} m_j\tau_j - \tau_k$ est une variable aléatoire dont la densité ne dépasse pas d_{n-1}^{-1}. Si l'on a $\rho_1 > \rho$, l'une de des sommes X es inférieure à $\frac{2(2M+1)^n}{\rho}$, donc, pour tout $\rho > 0$,

$$P(\rho_1 > \rho) \leqslant \frac{4(2M+1)^{2n}}{d_{n-1}} .$$

De même, pour tout $\rho' > 0$,

$$P(\rho_2 > \rho') \leqslant \frac{4n^2(2M+1)^{2n}}{\rho' d_{n-1}} .$$

Choisissons $\varepsilon > 0$, $M \geqslant \frac{4n}{\varepsilon}$,

$$\rho = 4(2M+1)^{2n} d_{n-1}^{-1} \varepsilon^{-1} ,$$

$$\rho' = 4n^2(2M+1)^{2n} d_{n-1}^{-1} \varepsilon^{-1} .$$

Le lemme 8 donne alors

$$P(\exists\, \lambda \mid |\lambda| \leqslant \frac{4\rho'}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \sup_{0\leq j\leq n-1} |e^{\tau_j\lambda} - e^{i\phi_j}| < \varepsilon) \geqslant 1 - 2\varepsilon \ .$$

L'hypothèse du théorème entraine l'existence d'une suite $n_i \to \infty$, d'une suite ε_i tendant vers 0 plus vite que i^{-2}, et d'une suite $M_i \geqslant \frac{4n_i}{\varepsilon_i}$, telles que la suite ρ_i' correspondante vérifie

$$\lim_{i\to\infty} r_{n_i} \frac{\rho_i'}{\varepsilon_i} = 0 \ .$$

Il s'ensuit que, pour toute fonction $\phi(\tau)$ localement constante sur $E_{\ell+\omega d}$ (on entend par là que $\psi(t) = \phi(\tau(t))$ est une fonction ordinaire - non aléatoire - définie sur $[0,1]$, continue à gauche, constante par intervalles, avec discontinuités en des points x_n) il existe p.s. une suite $e^{i\lambda_j\tau}$ qui approche uniformément $e^{i\phi(\tau)}$ sur $E_{\ell+\omega d}$. Quitte à choisir un ensemble dénombrable de telles fonctions ϕ (ou ψ) permettant d'approcher uniformément toute fonction continue réelle sur $E_{\ell+\omega d}$, on obtient le résultat.

A titre d'exemple, supposons l'ensemble $E_{\ell+\omega d}$ construit canoniquement, avec $\ell = d$, et

$$d_{2^j+n} = \ell_{2^j+n} = \delta_j \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant n < 2^j \ .$$

Ainsi E_ℓ est un ensemble parfait symétrique. Sous la condition

$$\overline{\lim} \ \frac{\delta_{j+1}}{\delta_j} < \frac{1}{2}$$

on a

$$\sum_{n\geq 2^j} (\ell_n + d_n) = O(2^j \ \delta_{j+1})$$

donc $E_{\ell+\omega d}$ est p.s. un ensemble de Kronecker dès que

$$\underline{\lim}\left(2^j\left(\frac{\delta_{j+1}}{\delta_j}\right)2^{-(j+2)}\right) = 0 \quad .$$

Soit d'autre part h la plus petite fonction concave telle que

$$h(\delta_j^2) = 2^{-j} \qquad (j = 0,1,\ldots) \quad .$$

Alors $\Lambda_h(E_{d^2}) > 0$, donc le théorème 1 est applicable, et par conséquent $E_{\ell+\omega d}$ porte p.s. une mesure μ_ω positive , $\not\equiv 0$, telle que

$$|\hat{\mu}_\omega(u)| \leqslant C\ 2^{-j/2}\ \sqrt{\log u} \quad \text{pour} \quad \delta_j^{-1} \leqslant u \leqslant \delta_{j+1}^{-1}$$

(C indépendant de j et de u).

Voici quelques applications.

Soit Λ une suite d'entiers positifs très rapidement croissante , de sorte que pour tout $j \notin \Lambda$, l'intervalle $]j\ ,\ j^3 2^j]$ soit disjoint de Λ, et soit $\varepsilon > 0$ petit. On définit la suite δ_j par $\delta_o = 1$,

$$\frac{\delta_{j+1}}{\delta_j} = \frac{1}{2} - \varepsilon \qquad \text{si} \qquad j \notin \Lambda$$

$$\frac{\delta_{j+1}}{\delta_j} = \exp(-j^2 2^j) \qquad \text{si} \qquad j \in \Lambda \ .$$

En dehors des intervalles $[j\ ,\ j^3 2^j]$ $(j \in \Lambda)$ on a $\delta_{j+1} > (\frac{1}{2} - 2\varepsilon)^j$ pour j assez grand, donc

$$\hat{u}_\omega(u) = O(2^{-j/2}\ \sqrt{j}) \quad \text{pour} \quad \delta_j^{-1} \leqslant u \leqslant \delta_{j+1}^{-1}$$

et comme en tous cas $\delta_j \leqslant (\frac{1}{2} - \varepsilon)^j$ on obtient

$$\hat{\mu}_\omega(u) = O(u^{-1+\varepsilon'}) \quad (u \to \infty \ , \ u \notin F)$$

où F es la réunion des intervalles

$$[(\frac{1}{2} - 2\varepsilon)^{-j} \ , \ (\frac{1}{2} - 2\varepsilon)^{-j^3 2^j}] \qquad (j \in \Lambda) \quad ,$$

et $(1-\varepsilon')\log(\frac{1}{2} - \varepsilon) = \log 1/2$. Enoncons le résultat.

THEOREME 8. *Soit* F *une réunion d'intervalles de la forme* $[\exp y_\nu, \exp(y_\nu^3\ 2^{y_\nu})]$ *où* y_ν *est une suite positive croissante arbitraire et* $\varepsilon > 0$. *Il existe un choix des suites* ℓ *et* d *tel que* $E_{\ell+\omega d}$ *soit p.s. un ensemble de Kronecker et porte p.s. une mesure* μ_ω *positive,* $\neq 0$ *, satisfaisant*

$$\hat{\mu}_\omega(u) = O(u^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}) \quad (u \to \infty \ , \ u \notin F)$$

Si, au lieu de poser $\delta_{j+1} = \delta_j(\frac{1}{2} - \varepsilon)$ $(j \notin \Lambda)$, on pose $\delta_{j+1} = \frac{1}{j}\ \delta_j$ $(j \notin \Lambda)$, on obtient seulement pour conclusion $\hat{\mu}_\omega(u) = o(1)$, $(u \to \infty \ , \ u \notin F)$. Mais dans ce cas, on a, pour tout $A > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} (\ell_n + d_n)n^A = 0$; désignons cette condition par $C(\ell+d)$. Soit alors $F^{(1)},\ldots,F^{(K)},\ldots$ une suite d'ensembles mutuellement disjoints, définis comme l'ensemble F du théorème 8. Il correspond à $F^{(K)}$ des suites $\ell^{(K)}$ et $d^{(K)}$, satisfaisant à la condition $C(\ell^{(K)} + d^{(K)})$, et telles que p.s. $E_{\ell^{(K)}+\omega d^{(K)}}$ soit un ensemble de Kronecker et porte une mesure $\mu_\omega^{(K)}$ positive, $\neq 0$, satisfaisant $\hat{\mu}_\omega^{(K)}(u) = o(1)$ $(u \to \infty \ , \ u \notin F^{(K)})$.

Soit $\Omega' = \prod_1^\infty \Omega^{(K)}$, où $\Omega^{(K)}$ est un espace de probabilité isomorphe à Ω; on note $\omega^{(K)} \in \Omega^{(K)}$, $\omega' \in \Omega'$, et $E^{(K)} = E_{\ell^{(K)}+\omega^{(K)}d^{(K)}}$. Ainsi $E^{(K)}$ est un objet aléatoire sur $\Omega^{(K)}$, et aussi bien sur Ω' , et les $E^{(K)}$, comme objets aléatoires sur Ω' , sont indépendants. Quitte à supprimer un nombre fini de termes de chaque suite $\ell^{(K)}$ et $d^{(K)}$, l'ensemble

$$E = \cup_{K=1}^{\infty} 2^{-K}(1 + E^{(K)})$$

est un ensemble aléatoire construit sur Ω' , de la forme $E_{\ell+\omega' d}$, les suites ℓ et d satisfont a la condition $C(\ell+d)$.

Le résultat est le suivant.

THEOREME 9. *Il existe un choix des suites* ℓ *et* d *tel que p.s.*

1°) *l'ensemble* $E = E_{\ell+\omega d} = \overline{\tau(|0,1|)}$ *soit un ensemble indépendant.*

2°) *chaque portion* $E^{(K)} = \overline{\tau([2^{-K}, 2^{-K+1}[)}$ *est un ensemble de Kronecker*

3°) $E^{(K)}$ *porte une mesure* $\mu^{(K)}$ *positive, de masse totale* 1, *telle que pour chaque* K

$$\overline{\lim_{u\to\infty}} (|\hat{\mu}^{(1)}(u)| + \ldots + |\hat{\mu}^{(K)}(u)|) \leq 1 .$$

Il résulte du 3°) que E n'est pas un ensemble de Helson ([5], p. 143). On obtient ainsi une version aléatoire d'une construction de Körner, mettant en évidence des ensembles indépendants , réunions dénombrables d'ensembles de Kronecker disjoints, et non de Helson [6]. D'autres résultats de Körner peuvent s'obtenir par la même méthode.

REFERENCES

[1] BESICOVITCH A.S. et TAYLOR S.J., *On the complementary intervals of a linear closed set of zero Lebesgue measure*, J. London Math. Soc. 29 (1954) , 449-459.

[2] KAHANE J.-P., *Sur les ensembles tangents par translation*, C. R. Acad. Sc. Paris, 267 (1968), 437-439.

[3] ------------, *Some random series of functions*, Heath 1968.

[4] KAHANE J.-P. et MANDELBROT B., *Ensembles de multiplicité aléatoires*, C. R. Acad. Sc. Paris 261 (1965), 3931-3933.

[5] KAHANE J.-P. et SALEM R., *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Hermann 1963.

[6] KÖRNER T.W., *Some results on Kronecker, Dirichlet and Helson sets*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), à paraitre.

[7] RUDIN W., *Fourier-Stieltjes transforms of measures on independent sets*, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), 199-202.

[8] --------, *Fourier analysis on groups*, Interscience 1962.

[9] SALEM R., *On singular monotonic functions whose spectrum has a given H-dimension*, Arkiv för Mat. 1 (1950), 353-365.

Recibido en setiembre de 1970.