Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 25, 1971.

SOBRE LAS DISTRIBUCIONES HOMOGENEAS EN LA CIRCUNFERENCIA UNIDAD

R. Scarfiello

Dedicado al profesor Alberto González Domínguez

Es sabido que las distribuciones homogéneas de orden λ en la recta real satisfacen la ecuación de Euler de las funciones homogéneas ordinarias, a saber

$$xf'(x) = \lambda f(x) \quad , \tag{1}$$

obtenida de la relación fundamental que verifican dichas funciones

$$f(ax) = a^{\lambda} f(x) \quad . \tag{2}$$

La solución general de (1) para el caso $\lambda \neq -n$, $n = 1,2,3,\ldots$ resulta

$$f(x) = C_1 |x|^{\lambda} + C_2 |x|^{\lambda} \mathrm{sg}\ x$$

donde $|x|^{\lambda}$ y $|x|^{\lambda}\mathrm{sg}\ x$ son las distribuciones utilizadas por Gelfand-Schilov [1].

En el caso $\lambda = -n$ se obtiene

$$f(x) = C_1\ x^{-n} + C_2\ \delta^{n-1}(x)$$

donde x^{-n} es la distribución correspondiente a las anteriores para n par o impar respectivamente y $\delta^{n-1}(x)$ es la derivada de orden n-1 de la delta de Dirac [1].

En esta nota hemos tratado de obtener los resultados análogos a los anteriores para el caso en que se considere la circunferencia unidad en lugar de la recta real.

Para ello podemos considerar las soluciones de (1) como las autofunciones del operador $x\frac{d}{dx}$ del cual hallaremos la correspondiente expresión en la circunferencia unidad mediante la transformación conforme que representa los semiplanos superior e inferior de la variable compleja $z = x+iy$ en el interior y exterior del círculo unidad, transformación que hemos utilizado ya en otro trabajo [2],

$$w = -\frac{z-2i}{z+2i}$$

la cual transforma el semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ en el círculo $|w| < 1$ y el semiplano $\operatorname{Im} z < 0$ en la región $|w| > 1$. En particular la recta real $\operatorname{Re} z = x$ se transforma en la circunferencia $w = e^{i\theta}$ con $|w| = 1$. Se tiene así que la transformación de la recta en la circunferencia está dada por la expresión

$$e^{i\theta} = -\frac{x-2i}{x+2i}$$

de la cual se obtiene

$$x = 2i\,\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}} = 2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \quad . \tag{3}$$

Hallemos el transformado del operador $x\frac{d}{dx}$ mediante (3). Teniendo en cuenta que de esta última se obtiene

$$\frac{dx}{d\theta} = \sec^2\frac{\theta}{2}$$

y que se puede poner

$$x\frac{d}{dx} = 2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,\frac{d}{dx}\,\frac{d}{d\theta} = 2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,\frac{1}{\frac{dx}{d\theta}}\,\frac{d}{d\theta}$$

resulta

$$x\frac{d}{dx} = 2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,\frac{1}{\sec^2\frac{\theta}{2}}\,\frac{d}{d\theta} = 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,\frac{d}{d\theta} = \operatorname{sen}\theta\,\frac{d}{d\theta} \tag{4}$$

Nuestro probema es entonces resolver la ecuación diferencial

(5) $$\operatorname{sen}\theta \, \frac{df(\theta)}{d\theta} = \lambda f(\theta)$$

PRIMER CASO. $\lambda \neq -n$

Supongamos $\theta \neq 0$. Separando variables se tiene

$$\int \frac{df(\theta)}{f(\theta)} = \lambda \int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}\theta} \quad ,$$

o bien

$$\lg|f(\theta)| = \lambda \lg \left|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right|$$

de donde se obtiene

$$|f(\theta)| = \left|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right|^{\lambda} \quad .$$

Esta relación nos da dos soluciones posibles, una par y otra impar, a saber

$$f(\theta) = \left|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right|^{\lambda} \quad y \quad f(\theta) = \left|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right|^{\lambda} \operatorname{sg}\theta \quad .$$

Tratemos de obtener la solución general para toda la circunferencia, incluído $\theta = 0$ (cfr. [1], pg. 310).

Consideremos la distribución

(6) $$f_o(\theta) = f(\theta) - C_1\left|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right|^{\lambda} - C_2\left|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right|^{\lambda} \operatorname{sg}\theta \quad ,$$

donde $f(\theta)$ es la solución de (5) en toda la circunferencia.

Por consiguiente $f_o(\theta)$ es solución de (5), puesto que los términos restados en (6) también lo son. Resulta entonces que $f_o(\theta)=0$ para $\theta \neq 0$ y por lo tanto $f_o(\theta)$ tiene soporte en $\theta = 0$. Pero es sabido que si una distribución tiene soporte puntual ella es una combinación lineal de la delta de Dirac y sus derivadas en dicho punto. Es decir, será:

$$f_o(\theta) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \, \delta^{k}(\theta) \quad , \quad \text{para algún } m.$$

Encontremos los coeficientes α_k. Puesto que $f_o(\theta)$ satisface la e̲ cuación (5) tendremos:

$$\operatorname{sen}\theta \frac{d}{d\theta} \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \; \delta^{k}(\theta) = \lambda \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \; \delta^{k}(\theta) \quad ,$$

o bien

$$\operatorname{sen}\theta \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \delta^{k+1}(\theta) = \lambda \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \; \delta^{k}(\theta) \quad ,$$

o en otra forma

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k \; \operatorname{sen}\theta \; \delta^{k+1}(\theta) = \lambda \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \; \delta^{k}(\theta) \quad . \tag{7}$$

En el primer miembro de esta igualdad aparecen productos de la δ y sus derivadas multiplicadas por la función indefinidamente diferenciable sen θ.

Aplicaremos la siguiente fórmula del producto multiplicativo de u̲ na derivada de la δ por una función indefinidamente diferenciable

$$\varphi(x) \; \delta^{k}(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j+k} \; C_k^j \; D^{k-j}\varphi(0) \; \delta^{j}(x)$$

donde C_k^j son los números combinatorios y D el símbolo de derivada de una función (cfr. [3], pg. 119).

Para nuestro caso se tiene:

$$\operatorname{sen}\theta \; \delta^{k+1}(\theta) = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^{k+j-1} \; C_{k-1}^{j} \; \operatorname{sen}(k-j+1) \; \frac{\pi}{2} \; \delta^{j}(\theta) \quad .$$

Reemplazando en (7) obtenemos:

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^{k+j-1} \; C_{k+1}^{j} \; \operatorname{sen}(k-j+1) \; \frac{\pi}{2} \; \delta^{j}(\theta) = \lambda \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \; \delta^{k}(\theta)$$

o bien,

$$\sum_{j=0}^{m+1} \delta^{j}(\theta) \sum_{k=j-1}^{m} (-1)^{k+j-1} \; \alpha_k \; C_{k+1}^{j} \; \operatorname{sen}(k-j+1) \; \frac{\pi}{2} = \lambda \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \delta^{j}(\theta)$$

pues en el primer miembro se debe tomar k = 0 en lugar de k = -1 para j = 0; y para j = m+1 el correspondiente término de la sumatoria se anula; en el segundo miembro se ha cambiado el nombre del índice

Igualando los coeficientes de ambos miembros se obtiene

$$\sum_{k=j-1}^{m} (-1)^{k+j-1} \alpha_k C_{k+1}^{j} \operatorname{sen}(k-j+1) \frac{\pi}{2} = \lambda \alpha_j$$

de donde, haciendo sucesivamente

$$j = m+1 , m , m-1 , \ldots , 1 , 0$$

y observando que para j = m+1 resulta, como ya se dijo

$$\sum_{k=m}^{m} (-1)^{k+j-1} \alpha_k C_{k+1}^{j} \operatorname{sen}(k-j+1) \frac{\pi}{2} =$$

$$= (-1)^{m+m+1-1} \alpha_m C_{m+1}^{m+1} \operatorname{sen}(m+1-m-1) \frac{\pi}{2} = \alpha_m . 0 = 0 ,$$

se obtiene ordenadamente:

$$\begin{array}{lll} -\alpha_m (m+1) = \lambda \alpha_m & \text{o bien} & \alpha_m (\lambda + m+1) = 0 \\ -\alpha_{m-1} . m = \lambda \alpha_{m-1} & '' & \alpha_{m-1} (\lambda + m) = 0 \\ -\alpha_{m-2} (m-1) = \lambda \alpha_{m-2} & '' & \alpha_{m-2} (\lambda + m-1) = 0 \end{array}$$

y en general

(8) $$\alpha_j (\lambda + j+1) = 0 ,$$

con $j = m+1 , m , m-1 , \ldots , 1 , 0$.

Puesto que debe ser $\lambda \neq -j-1$ resulta $\alpha_j = 0$ para cada j, y por consiguiente se tiene

$$f_o(\theta) = 0 .$$

Llevando este resultado a (6), se obtiene:

$$f(\theta) = C_1 \ |tg \frac{\theta}{2}|^{\lambda} + C_2 \ |tg \frac{\theta}{2}|^{\lambda} \ sg \ \theta$$

como solución general de nuestro problema en el caso $\lambda \neq -n$, con $n = 1,2,3,\ldots$

SEGUNDO CASO. $\lambda = -n$

En virtud de la ecuación (2) puede verse que $f(\theta)$ es par para n par e impar para n impar. En efecto, haciendo $a = -1$ se obtiene:

$$f(-\theta) = (-1)^{-n} f(\theta) = \pm f(\theta) \quad ,$$

según que n sea par o impar.

La solución de la ecuación diferencial (1) para $\theta \neq 0$ resulta ser entonces, en este caso,

$$C_1 \ tg^{-n} \frac{\theta}{2} \quad .$$

La diferencia

$$f_o(\theta) = f(\theta) - C_1 \ tg^{-n} \frac{\theta}{2}$$

tiene, como en el primer caso, su soporte en el origen y por consiguiente puede repetirse el mismo argumento. De la ecuación (8) resulta entonces:

$$\alpha_j = 0 \quad \text{para} \quad j \neq n-1$$

$$\alpha_{n-1} = C_2 \quad , \quad C_2 \ \text{arbitrario} \ .$$

La solución general de la (1), en este caso, tiene entonces la forma

(9) $$f(\theta) = C_1 \ tg^{-n} \frac{\theta}{2} + C_2 \ \delta^{n-1}(\theta) \quad .$$

CASO PARTICULAR. $n = 1$, $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = 0$

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} \quad ,$$

que se utiliza en las series de Fourier para obtener la serie conjugada.

BIBLIOGRAFIA

[1] GELFAND-SCHILOV, *Funciones generalizadas*, I.

[2] R. SCARFIELLO, *Sobre la serie de Fourier de la distribución* $vp \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \theta$, U.M.A., XX, 1960, pág. 146-154.

[3] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, I.

Universidad Nacional de Buenos Aires
Argentina

Recibido en marzo de 1971.