Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 25, 1971.

INTERPOLACION A LA MARCINKIEWICZ

Nestor M. Riviere*

Dedicado al profesor Alberto González Domínguez

En este trabajo se estudiará la interpolación para operadores en el estilo iniciado por J.J. Marcinkiewicz [6]. La técnica de interpolación usada que difiere de la de A. Zygmund [16], E. Stein y G. Weiss [15], J. Peetre y J.L. Lions [10], o R. Hunt [4], pero que en cambio tiene cierta similitud con la de A.P. Calderón [1]; se basa en el uso de una fórmula de representación (por mayoración) del operador una vez conocido el comportamiento de la función de distribución de éste al actuar sobra las funciones características de conjuntos medibles, véase el Teorema 1.1. Tal representación permite, por ejemplo, una demostración muy sencilla de la forma del Teorema de Marcinkiewicz considerada por R. Hunt [4], véase el Teorema 1.2.

El trabajo está dividido en dos secciones, en la primera se demuestra el Teorema de Representación y su aplicación inmediata, el Teorema de Marcinkiewicz. En la segunda sección se definen los espacios $E_o(U_t)$, de oscilación media acotada para una familia regular de Vitali, véase [11], y una ulterior aplicación del Teorema de Representación para extender el Teorema de Interpolación (Teorema 1.2) cuando L^∞ es reemplazado por $E_o(U_t)$, véase el Teorema 2.1. Este resultado se aplica a la teoría de integrales singulares y a la teoría del potencial.

Quiero agradecer al Prof. G. Stampacchia quien sugirió el problema estudiado en la segunda parte de este trabajo.

* Este trabajo fue realizado en parte con el subsidio de la National Science Foundation GP. 15832.

PRELIMINARES.

Sea (M,μ) un espacio de medida. $F(M,\mu)$ y $S_o(M,\mu)$ (*) denotarán respectivamente los espacios de funciones medibles y de funciones simples.

Un operador T, definido de $S_o(M,\mu)$ en $F(N,\nu)$ se dirá sublineal si:

(i) $|T(\lambda f)(x)| \leqslant |\lambda| |T(f)(x)|$

(ii) $|T(f+g)(x)| \leqslant |T(f)(x)| + |T(g)(x)|$

en casi todo punto con respecto a la medida ν.

Sea f una función de $F(M,\mu)$; $\lambda_{f,\mu}$ denotará su función de distribución, en otras palabras

$$\lambda_{f,\mu}(t) = \mu(\{x \ , \ |f(x)| \geqslant t\})$$

f^* denotará la función reordenada de la función f, o sea la "inversa" de la función no-creciente de distribución $\lambda_{f,\mu}$. Más explicitamente f^* queda definida por las desigualdades $f^*(\lambda_{f,\mu}(t)) \geqslant t$; $\lambda_{f,\mu}(f^*(t)) \geqslant t$. Finalmente la función doble reordenada de f; f^{**}, se define por la identidad

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_o^t f^*(S)\, dS \ .$$

Obsérvese que

$$tf^{**}(t) = \sup_{\mu(E)\leq t} \int_E |f(x)|\, d\mu \qquad (*)$$

y por lo tanto

(*) Por simplicidad consideraremos medidas no atómicas.

(i) $(\alpha f)^{**}(t) = |\alpha| f^{**}(t)$

(ii) $(f+g)^{**}(t) \leqslant f^{**}(t) + g^{**}(t)$.

Para $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, definiremos los espacios $L^{p,q} = L^{p,q}(M,\mu)$ como los subespacios de $F(M,\mu)$ tales que

$$\|f^*\|_{L^{p,q}} = \left(\int_0^\infty (f^*(t)\ t^{1/p})^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty$$

Cuando $q = \infty$ entiéndase

$$\|f^*\|_{L^{p,\infty}} = \sup_t f^*(t)\ t^{1/p}$$

Cuando $p = \infty$ sólo se considerará $q = \infty$.

Para los valores de p tales que $1 < p \leqslant \infty$, los espacios $L^{p,q}$ son normables, usando la función f^{**}.

En ese caso se define

$$|||f|||_{L^{p,q}} = \|f^{**}\|_{L^{p,q}} = \left(\int_0^\infty (f^{**}(t)\ t^{1/p})^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

Como $f^*(t) \leqslant f^{**}(t)$ es inmediato que $\|f^*\|_{L^{p,q}} \leqslant \|f^{**}\|_{L^{p,q}}$.

Por otra parte un simple argumento de integración por partes muestra que

$$\|f^{**}\|_{L^{p,q}} \leqslant p' \ \|f^*\|_{L^{p,q}} \quad , \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1 \quad .$$

De las observaciones anteriores se concluye que, para $1 < p \leqslant \infty$, $|||\cdot|||_{L^{p,q}}$ es una norma. Es fácil ver que con dicha norma el espacio es completo.

Otra propiedad interesante de la que gozan los espacios $L^{p,q}$ es el estar telescópicamente ordenados con respecto al segundo subín dice. De otro modo si $q_1 \leqslant q_2$ entonces $L^{p,q_1} \subset L^{p,q_2}$. Además cuando $p = q$, $L^{p,p} = L^p(M,\mu)$, L^p denota los clásicos espacios de funciones p-integrables. Basta observar que

$$\int_0^\infty f^*(t)^p \, dt = \int_M |f(x)|^p \, d\mu \quad .$$

Para el estudio de los espacios $L^{p,q}$ véase [1] y [4] , [8]. El lector encontrará referencias más completas en dichos trabajos.

§1. UN TEOREMA DE REPRESENTACION.

χ_E denotará la función característica del conjunto E.

$\psi(s,t)$ denotará una función no creciente y continua a izquierda en la variable t. $\psi^{-1}(s,t)$ denotará su "inversa" para valores fijos de s, en otras palabras

$$\psi^{-1}(s,\psi(s,t)) \geqslant t \quad , \quad \psi(s,\psi^{-1}(s,t)) \geqslant t \quad .$$

Para el siguiente teorema consideraremos una tal función ψ que además satisfaga, $(\frac{\partial}{\partial s}\psi) \in L^1_{loc}(R^2)$, $\psi(0,t) = 0$ para $t > 0$.

TEOREMA 1.1. *Sea* T *un operador sublineal definido sobre funciones simples,* ψ *como se describe más arriba. Supongamos que para cualquier conjunto medible* E

$$\lambda_{T(\chi_E),\nu}(t) \leqslant \psi^{-1}(\mu(E),t)$$

Entonces, si $K(s,t) = 1/t \int_0^t (\frac{\partial\psi}{\partial s})(s,u)du$, *para toda* $f \in S_o(M,\mu)$

$$(Tf)^{**}(t) \leqslant \int_0^\infty K(s,t) \, f^*(s)ds \quad .$$

Demostración. Como $\lambda_{T(\chi_E),\nu}(t) \leq \psi^{-1}(\mu(E),t)$ entonces

$$(T(\chi_E))^*(t) \leq \psi(\mu(E),t) = \int_o^{\mu(E)} \frac{\partial\psi}{\partial s}(s,t)ds =$$

$= \int_o^\infty (\frac{\partial\psi}{\partial s})(s,t)\ (\chi_E)^*(s)ds.$ Por lo tanto

$$(T(\chi_E))^{**}(t) \leq \int_o^\infty K(s,t)(\chi_E)^*(s)ds .$$

Para completar la demostración, dada una función simple f la escribiremos de modo tal que $f = \sum_i c_i \chi_{E_i}$ y $f^* = \sum_i |c_i|\ (\chi_{E_i})^*$.

El teorema es entonces una consecuencia inmediata de la subaditividad y homogeneidad de los operadores T y $(\cdot)^{**}$.

El teorema 1.1 da una representación bastante fiel del operador T. Para mostrar su grado de precisión sacaremos como consecuencia fácil de él la siguiente forma del Teorema de Marcinkiewicz considerada por E. Stein y G. Weiss [15] y R. Hunt [4] .

TEOREMA 1.2. *Sea* T *un operador sublineal tal que*

$$\lambda_{T(\chi_E),\nu}(t) \leq C \min\{(\frac{\mu(E)}{t}^{1/p_1})^{q_1},\ (\frac{\mu(E)}{t}^{1/p_2})^{q_2}\}$$

$1 \leq p_i$, $q_i \leq \infty$, $q_2 \neq 1$. *Entonces si* $1/p = s(1/p_1)+(1-s)(1/p_2)$ $1/q = s(1/q_1)+(1-s)(1/q_2)$, $0 < s < 1$; *se tiene que para toda función simple* $f \in S_o(M,\mu)$

$\|(T(f))^{**}\|_{L^{q,r}} \leq C_{p,q}\|f^*\|_{L^{p,r}}$, *o equivalentemente*

$|||T(f)|||_{L^{q,r}} \leq C'_{p,q}\ |||f|||_{L^{p,r}}$, *para todo* r *tal que* $1 \leq r \leq \infty$.

Demostración. Supongamos primero que $q_i > 1$, $i = 1,2$.
Elijamos

$$\psi^{-1}(s,t) = \min\{(\frac{s^{1/p_1}}{t})^{q_1},\ (\frac{s^{1/p_2}}{t})^{q_2}\}$$

Entonces $K(s,t) = \frac{1}{s} H(s,t)$, donde

$$H(s,t) = \min \left\{ \frac{q_1'}{p_1} \frac{s^{1/p_1}}{t^{1/q_1}} , \frac{q_2'}{p_2} \frac{s^{1/p_2}}{t^{1/q_2}} \right\} , \quad \frac{1}{q_i'} + \frac{1}{q_i} = 1 .$$

Por lo tanto es consecuencia del Teorema 1.1 que

$(Tf)^{**}(t) \leq C \int_0^\infty H(s,t) f^*(s) \frac{ds}{s}$. Por otra parte obsérvese que

si $\epsilon = \dfrac{1/q_1 - 1/q_2}{1/p_1 - 1/p_2}$ y $\alpha = \epsilon/p_1 - 1/q_1 = \epsilon/p_2 - 1/q_2$,

entonces $H(\lambda^\epsilon s, \lambda t) = \lambda^\alpha H(s,t)$, o sea $H(s,t) = t^\alpha H(t^{-\epsilon} s, 1)$ o sea que la representación mayorada del operador T está dada por una convolución sobre el grupo multiplicativo R_+. Esto facilita considerablemente el cálculo. Escribimos primero

$(Tf)^{**}(t) \leq C \int_0^\infty t^\alpha H(s,1)\, f^*(t^\epsilon s) \frac{ds}{s}$. Usando luego las hipótesis del teorema en p y q $(\alpha = \epsilon/p - 1/q)$ y la desigualdad de Minkowski

$$\| (Tf)^{**} \|_{L^{q,r}} \leq C \int_0^\infty H(s,1) \; \| t^\alpha \; f^*(t^\epsilon s) \|_{L^{q,r}} \frac{ds}{s} .$$

Pero $\| t^\alpha \; f^*(t^\epsilon s) \|^r_{L^{q,r}} = \int_0^\infty (t^{\alpha+1/q} \; f^*(t^\epsilon s))^r \frac{dt}{t} =$

$= \int_0^\infty (t^{\epsilon/p} \; f^*(t^\epsilon s))^r \frac{dt}{t}$. Cambiando variables

$(u = t^\epsilon s)$ $\quad \| t^\alpha \; f^*(t^\epsilon s) \|_{L^{q,r}} = s^{-1/p} \| f^* \|_{L^{p,r}}$. Finalmente

$$\| (Tf)^{**} \|_{L^{q,r}} \leq C \int_0^\infty H(s,1) \; s^{-1/p} \| f^* \|_{L^{p,r}} \frac{ds}{s} \leq C_{p,q} \; \| f^* \|_{L^{p,r}} .$$

Para completar la demostración en el caso en que $q_1 = 1$ $(q_2 \neq 1)$, obsérvese que si $(1/p,1/q)$ es interior al segmento $[(1/p_1 \, , \, 1/q_1) \; ; \; (1/p_2 \, , \, 1/q_2)]$ entonces

$$\min\left\{ \left(\frac{s}{t}\right)^{1/p_1 \; q_1} , \left(\frac{s}{t}\right)^{1/p_2 \; q_2} \right\} \leqslant \min\left\{ \left(\frac{s}{t}\right)^{1/p \; q} , \left(\frac{s}{t}\right)^{1/p_2 \; q_2} \right\}.$$

En otras palabras el caso extremo se puede obviar trabajando con puntos interiores al segmento de interpolación.

La misma observación es válida cuando p_i ó $q_i = \infty$.

La única razón para reducir el problema al caso $q_i > 1$, $i = 1,2$, es el permitir el uso de funciones homogéneas (evitando factores logarítmicos) y de ese modo presentar una demostración simple. A la ventaja de este argumento se contrapone el empobrecimiento de la constante $C_{p,q}$.

NOTA. La condición impuesta en el Teorema 1.2 sobre la función de distribución de $T(X_E)$ es más débil que la condición clásica de tipo débil (p_i,q_i).

Cuando $1 < q_i < \infty$ la condición es equivalente a que el operador T sea acotado de $L^{p_i,1}$ en $L^{q_i,\infty}$.

Una consecuencia del Teorema 1.2 interesante de citar es el siguiente corolario. Véase también [1] , [4].

COROLARIO. *Sea* $f \in L^p(R^n)$, $1 < p \leqslant 2$, *si* $F(f)$ *denota la Transformada de Fourier de* f,

$$F(f)(x) = \int_{R^n} f(y) \exp(2\pi i \langle x,y \rangle)dy \; ;$$ *entonces* F *es un operador acotado de* $L^p(R^n) = L^{p,p}$ *en* $L^{p,p'}$. *O sea*

$$\|F(f)\|_{L^{p,p'}} \leqslant C_p \|f\|_{L^{p,p}}.$$

La demostración es consecuencia inmediata de las siguientes desigualdades:

(a) $\| F(f)\|_{L^1(R^n)} \leq \| f \|_{L^\infty(R^n)}$; (b) $\| F(f)\|_{L^2(R^n)} = \| f \|_{L^2(R^n)}$

§2. CLASES DE OSCILACION MEDIA ACOTADA.

G. Stampacchia [13] ha observado que las clases de oscilación media acotada, en muchos casos, reemplazan con éxito al espacio L^∞ como rango del operador en el caso extremo del Teorema 1.2. En esta sección mostraremos cómo se comporta la función de distribución de $T(\chi_E)$ en ese caso, véase el Teorema 2.3, de modo tal que el Teorema de Representación (Teorema 1.1) nos permitirá extender los resultados previos (véase [13], [3]) al caso sublineal y al caso extremo $q_1 = 1$.

Haremos previamente una somera revisión de definiciones.

DEFINICION 2.1. Una familia $\{(U_t,\phi) \ ; \ t \in R_+\}$ se dirá Regular de Vitali cuando:

(i) Los conjuntos U_t son abiertos acotados de R^n; están telescópicamente ordenados, o sea $U_{t_1} \subset U_{t_2}$ cuando $t_1 \leq t_2$; $\cap_t U_t = \{0\}$; y, si m (·) denota la medida de Lebesgue de R^n, $m(U_t) \nearrow m(U_{t_o})$ cuando $t \nearrow t_o$.

(ii) ϕ es una función suryectiva de R_+ en R_+ tal que:

(a) $U_t - U_t = \{z \ , \ z=x-y \ ; \ x,y \in U_t\} \subset U_{\phi(t)}$.

(b) $m(U_{\phi(t)}) \leq A\, m(U_t)$, donde A es una constante dependiente de la familia solamente.

Obsérvese que $\phi(t) > t$ y que la función ϕ puede reelegirse de modo tal que sea siempre no decreciente.

Ejemplos de tales familias es

$$U_t = \{ x \;,\; |x| < t \},\; \phi(t) = 2t \qquad (A = 2^n) \;.$$

Otros ejemplos de tales familias pueden encontrarse en [11] .

F. John y L. Nirenberg [6] definen la clase de oscilación media a cotada usando la familia de Vitali de nuestro ejemplo anterior . Tal definición se puede extender a cualquier familia regular de Vitali. Las nuevas clases gozarán del mismo tipo de propiedades que la clásica clase de oscilación media acotada.

Sea 0 un abierto de R^n. $E_o(U_t,0)$ denotará la clase de funciones localmente integrables tales que

$$\int_{x+U_t} |f(y) - c_f|\,dy \leq M\, m(U_t) \;;\; \text{cuando } x+U_t \subset 0 \;,\; \text{y}$$

$$c_f = \frac{1}{m(U_t)} \int_{x+U_t} f(y)\,dy \;.$$

Definiremos $\|f\|_{E_o}$ como el ínfimo de los valores M que satisface la desigualdad anterior para todo x,t $(x+U_t \subset 0)$. Obsérvese que $\|f\|_{E_o} = 0$ si y sólo si f es constante en casi todo punto de 0 . Por lo tanto $\|\cdot\|_E$ es una semi-norma, para transformar el espacio en un espacio de Banach es necesario hacer el cociente por el sub espacio de las constantes (R^1).

La propiedad fundamental de las funciones de las clases $E_o(U_t,0)$ es el decaimiento exponencial local de sus funciones de distribución. Este decaimiento caracteriza dichas clases.

TEOREMA 2.1. $f \in E_o(U_t,0)$ *si y sólo si para todo* $x+U_t \subset 0$,

$$m(\{x \;,\; |f(y)-c_f| > s\} \cap (x+U_t)) \leq c_1 \exp(-c_2\, s\|f\|_{E_o}^{-1})\, m(U_t) \;.$$

c_1 *y* c_2 *son constantes absolutas que dependen sólo de la familia regular de Vitali.*

La demostración de este teorema es idéntica a la de F. John y

L. Nirenberg [6], si en lugar de la forma de A.P. Calderón y A. Zygmund [2] del lema de F. Riesz se utiliza [11], Teorema 3.1 capítulo I.

El siguiente teorema es una extensión del Teorema 1.2 cuando el espacio L^{∞} es reemplazado por $E_o(U_t, O)$.

TEOREMA 2.2. *Sea* T *un operador sublineal de* $S_o(M,\mu)$ *en* $F(O,m)$ *tal que para cada conjunto medible* E*:*

$$(1) \quad \lambda_{T(\chi_E)}(t) \leqslant C\left(\frac{\mu(E)^{1/p_1}}{t}\right)^{q_1}$$

$$(2) \quad \| T(\chi_E) \|_{E_o} \leqslant C\, \mu(E)^{1/p_2}$$

Donde, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $i = 1,2$, $1 \leqslant q_1 \leqslant \infty$.

Entonces, si $\frac{1}{q} = s\frac{1}{q_1}$, $\frac{1}{q} = s\frac{1}{p_1} + (1-s)\frac{1}{p_2}$, $0 < s < 1$,

$f \in S_o(M,\mu)$, *se concluye que*

$$|||T(f)|||_{L^{q,r}} \leqslant C_{p,q} |||f|||_{L^{p,r}} .$$

$C_{p,q}$ *depende de* p*,* q*, las constantes de* (1) *y* (2) *y la familia de Vitali, pero es independiente de* O.

Para demostrar el Teorema 2.2 haremos uso del teorema de representación pero para ello necesitamos estudiar previamente la función de distribución de $T(\chi_E)$.

TEOREMA 2.3. *Si* T *es un operador sublineal que satisface las condiciones* (1) *y* (2) *del Teorema 2.2, entonces*

$$\lambda_{T(\chi_E)}(t) \leqslant \psi^{-1}(m(E),t) \text{ , donde}$$

$$\psi^{-1}(s,t) \leqslant c_1 \left(\frac{s^{1/p_1}}{t}\right)^{q_1} \exp\left(-c_2\, t\, s^{-1/p_2}\right)$$

c_1 *y* c_2 *son constantes que no dependen de* 0.

Demostración del Teorema 2.2. Aceptando el enunciado del Teorema 2.3 basta observar que cuando $\frac{1}{p} = s\frac{1}{p_1} + (1-s)\frac{1}{p_2}$, $\frac{1}{q} = s\frac{1}{q_1}$, $0 < s < 1$, entonces

$$\psi^{-1}(s,t) \leqslant c \min \{ (\frac{s^{1/p_1}}{t})^{q_1} , (\frac{s^{1/p}}{t})^{q} \},$$

y aplicar el Teorema 1.2.

Demostración del Teorema 2.3. Sea r , $0 < r < 1$, $f = \chi_E$. Aplicando el Teorema 3.1, Capítulo I de [11], a la función $|T(f)|^r$ obtenemos una sucesión de conjuntos disjuntos, $\{x_k + U_{\alpha_k}\}$, tales que:

(i) $|T(f)(x)| \leqslant t$, en casi todo punto del complemento de $\cup_{k=o}^{\infty} (x_k + U_{\phi(\alpha_k)})$

(ii) $$m(U_{\phi(\alpha_k)})^{-1} \int_{x_k+U_{\phi(\alpha_k)}} |T(f)(y)|^r dy < t^r \leqslant$$

$$\leqslant m(U_{\alpha_k})^{-1} \int_{x_k+U_{\alpha_k}} |T(f)(y)|^r \, dy$$

Obsérvese que si $a_k = m(U_{\phi(\alpha_k)})^{-1} \int_{x_k+U_{\phi(\alpha_k)}} T(f)(y)dy$, entonces $|a_k| < t$. Por lo tanto

$$m(\{x , |T(f)(x)| > 2t\}) =$$

$$= m(\{x , |T(f)(x)| > 2t\} \cap (\cup_k(x_k + U_{\phi(\alpha_k)}))) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k m(\{x , |T(f)(x)| > 2t\} \cap (x_k + U_{\phi(\alpha_k)})) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k m(\{x\ ,\ |T(f)(x)-a_k| > t\} \cap (x_k + U_{\phi(\alpha_k)})) \leqslant$$

$$\leqslant \text{(usando el Teorema 2.1)} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \exp(-c_2\ t\ \|T(f)\|_{E_o}^{-1}) \sum_k m(U_{\phi(\alpha_k)}) \leqslant$$

$$\leqslant A\ c_1 \exp(-c_2\ t\ \|T(f)\|_{E_o}^{-1}) \sum_k m(U_{\alpha_k}) \leqslant$$

$$\leqslant \text{(usando la hipótesis (2) y (ii))} \leqslant$$

$$\leqslant A\ c_1 \exp(-c_2\ t\ m(E)^{-1/p_2})\ t^{-r} \int_{\cup_k (x_k+U_{\alpha_k})} |T(f)(y)|^r dy$$

Por otra parte usando la hipótesis (i)

$$t^{-r} \int_{\cup_k (x_k+U_{\alpha_k})} |T(f)(y)|^r dy \leqslant t^{-r} \int_{\{y,|T(f)(y)|\geq t\}} |T(f)(y)|^r dy$$

$$\leqslant\ r\ t^{-r} \int_t^{\infty} s^{r-1} \left(\frac{\mu(E)}{s^{q_1}}\right)^{q_1/p_1} ds \leqslant c\left(\frac{\mu(E)^{1/p_1}}{t}\right)^{q_1}$$

desigualdad que demuestra el teorema.

El teorema 2.2 extiende trabajos previos de G. Stampacchia [13], J. Peetre [9], S. Campanato [3] y S. Spanne [12]. Permite que el operador sea sublineal, es válido para $q_1 = 1$ e impone una condición más débil en los extremos del intervalo de interpolación.

El caso $p_1 = q_1 = 1$, $p_2 = \infty$ tiene una interesante aplicación a la teoría de Integrales Singulares.

Sea k un núcleo singular para la familia regular de Vitali $\{U_t,\phi\}$; ver [11], Definición 4.1, Capítulo I. Para $f \in S_o(R^n,m)$ definiremos

$$K(f)(x) = \lim_{\substack{s\to 0\\ t\to\infty}} \int_{U_s' \cap U_t} k(y) f(x-y) dy$$

Tal límite existe en casi todo punto; ver [11], Teorema 6.2, Capítulo I.

TEOREMA 2.4. *Si* k *es un núcleo singular para la familia* $\{U_t,\phi\}$ *y además*

$$\int_{U'_{\phi(t)}} |k(x-y)-k(x)|\,dx \leq c \text{ , } \textit{cuando } y \in U_t .$$

Entonces

$$(1) \quad \lambda_{K(f)}(t) \leq c \frac{\|f\|_{L^{1,1}}}{t} = c \frac{\|f\|_{L^1(R^n)}}{t}$$

$$(2) \quad \|K(f)\|_{E_o} \leq c \|f\|_{L^\infty(R^n)} \text{ ; } E_o = E_o\ (U_t, R^n) .$$

Demostración. La primera parte del teorema puede leerse en [11], Teorema 4.1, Capítulo I. La segunda parte se demuestra con el siguiente argumento que imita al de E. Stein [14] dado para el caso elíptico.

Sea entonces $Q = x + U_{\phi(t)}$, $f \in S_o(R_n)$. Escribiremos $f = h + g$

donde $h = f\chi_Q$. Obsérvese que la acotación del operador K en $L^2(R^n)$ (ver [11], Teorema 4.1, Capítulo I) se concluye

$$\int_{x+U_t} |K(h)(y)|^2 dy \leq c \int_{R^n} |h(y)|^2\, dy =$$

$$= c \int_{x+U_{\phi(t)}} |f(y)|^2\, dy \leq c' \|f\|^2_{L^\infty}\, m(U_t) .$$

Por otra parte como la misma estimación vale para el promedio de K(h), dominando la norma L^1 con la norma L^2, se tiene que

$$\int_{x+U_t} |K(h)(y) - c_{K(h)}|\, dy \leq c' \|f\|_{L^\infty}\, m(U_t)$$

Basta entonces demostrar una desigualdad similar para K(g).

$$\int_{x+U_t} |K(g)(y) - c_{K(g)}| dy =$$

$$= \int_{x+U_t} \left| \left(\int_{(x+U_{\phi(t)})'} K(y-z)f(z)dz \right) - \frac{1}{m(U_t)} \left(\int_{x+U_t} dx_1 \int_{(x+U_{\phi(t)})'} K(x_1-z)f(z)dz \right) \right| dy$$

$$= \int_{x+U_t} \left| \frac{1}{m(U_t)} \int_{x+U_t} dx_1 \left(\int_{(x+U_{\phi(t)})'} [K(y-z)-K(x_1-z)]f(z)dz \right) \right| dy \leqslant (\text{u}$$

sando la hipótesis hecha sobre K) $\leqslant c\ m(U_t) \|f\|_{L^\infty}$, y el teorema queda demostrado.

Por lo tanto, como consecuencia del Teorema 2.2 se obtiene la siguiente cota para la función de distribución de $K(\chi_E)$

$$\lambda_{K(\chi_E)}(t) \leqslant c_1\ m(E)\ t^{-1} \exp(-c_2\ t)\ .$$

La cota es inmejorable, salvo constantes. E. Stein y G. Weiss [15] demostraron una identidad de este tipo para la transformada de Hilbert.

REFERENCIAS

[1] A.P. CALDERON, *Spaces between* L^1 *and* L^∞ *and the theorem of Marcinkiewicz*, Studia Math., T XXVI (1966), p. 273-299.

[2] A.P. CALDERON y A. ZYGMUND, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math., 88 (1952), p. 85-139.

[3] S. CAMPANATO, *Su un teorema di G. Stampacchia*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Vol. XX (1966), p. 87-100.

[4] R.A. HUNT, *An extension of the Marcinkiewicz interpolation theorem to Lorentz spaces*, Bull. Am. Math. Soc., 70 (1964), p. 803-807.

[5] R.A. HUNT, *On* L(p,q) *Spaces*, Enseignement Math. (2) , 12 (1966), p. 249-276.

[6] F. JOHN y L. NIRENBERG, *On functions of bounded mean oscillations*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 14 (1961),p. 415-426.

[7] J. MARCINKIEWICZ, *Sur l'interpolation d'operations*, C. S. Acad. Sci. Paris, 208 (1939), p. 1272-1273. Tambiĕn Collected papers, Varsovia, (1964), p. 539-540.

[8] R. O'Neil, *Convolution Operators and* L(p,q) *spaces*, Duke Math. J., 30 (1963), p. 129-142.

[9] J. PEETRE, *Espaces d'interpolation et théorème de Soboleff*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 16 (1966), p. 279-317.

[10] J. PEETRE y J.L. LIONS, *Sur une classe d'espaces de interpolation*, Inst. Hautes. Et. Sci., Publ. Math., 19 (1964), p. 5-68.

[11] N.M. RIVIERE, *Singular integrals and Multiplier operators*, Ark. fur Math., 1971.

[12] S. SPANNE, *Sur l'interpolation entre les espaces* $L_k^{p,\phi}$, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Vol. 20, (1966), p. 625-648.

[13] G. STAMPACCHIA, *The Spaces* $L^{(p,\lambda)}$, $N^{(p,\lambda)}$ *and interpolation* , Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Vol. 19, (1965), p. 443-462.

[14] E.M. STEIN, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Univ. Press, 1970.

[15] E.M. STEIN y G.WEISS, *An extension of a theorem of Marcinkiewicz and some of its applications*, J. of Math. and Mech., 8 (1959), p. 263-284.

[16] A. ZYGMUND, *Trigonometric Series*, 2a. ed., Vol 2, Cambridge (1959).

Universidad de Paris
Universidad de Buenos Aires

Recibido en abril de 1971.