Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 25, 1971.

LA SEMI-SIMPLICITE DES ALGEBRES DE BOOLE TOPOLOGIQUES ET LES SYSTEMES DEDUCTIFS

par Antonio Monteiro

Dedicado al profesor Alberto González Domínguez

1. LES ALGEBRES DE BOOLE TOPOLOGIQUES.

C. I. LEWIS et C. H. LANGFORD ((1932)(*) , pag 501) dans leurs études sur la théorie de *l'implication stricte* ont eté conduits à considérer le *calcul propositionnel modal S 4*.

TANG TSAO-CHEN (1938) a été le premier auteur qui a établi un rapprochement entre ce calcul et la théorie des espaces topologiques en montrant qu'à chaque *thèse* du calcul S4 correspond une égalité valable dans tous les espaces topologiques. Cette découverte a joué un rôle très important par la suite. La réciproque a eté établie par J. C. C. McKINSEY (1941) .

Pour étudier le calcul S4 au point de vue de l'algèbre cet auteur a été conduit à utiliser la notion suivante:

1.1- *DEFINITION: Un système* $A = (A,C)$ *formé par une algèbre de Boole* A ~~*et une application*~~ C *de* A *dans* A, *telle que*

$C_1)$ $\quad Co = o$

$C_2)$ $\quad a \vee Ca = Ca$

$C_3)$ $\quad C(a \vee b) = Ca \vee Cb$

(*) Voir la liste bibliographique à la fin de cette note.

$$C_4) \quad CCa = Ca$$

sera dit une algèbre de Boole topologique (closure algebra; en anglais). L'élément Ca *sera dit la fermeture de* a. *Un élément* a *est fermé si* Ca = a. *L'élément* Ia = -C-a *sera dit l'intérieur de* a *et* a *est ouvert si* Ia = a.

Dans le calcul S4 si p désigne une proposition alors Cp et Ip désignent respectivement les propositions "p *est possible*" et "p *est necéssaire*". Cette notion (*) avait été introduite par H. TERASAKA (1937), (1940) comme une généralisation naturelle de la notion d'espace topologique, au sens de C. KURATOWSKI (1922). En effet si $A = 2^E$ est l'algèbre de Boole de toutes les parties d'un ensemble E alors C1) - C4) sont les axiomes que KURATOWSKI a introduit pour définir un espace topologique, et ils sont équivalents aux axiomes duaux:

$$I1) \quad I\,1 = 1$$

$$I2) \quad Ia = a \wedge Ia$$

$$I3) \quad I\,(a \wedge b) = I(a) \wedge I(b)$$

$$I4) \quad I\,I\,a = Ia$$

Nous pouvons donc définir une algèbre de Boole topologique comme un système (A,I) ou I vérifie I1) - I4).

Le rôle que joue cette notion dans l'étude du calcul propositionnel S4 a été mis en évidence dans les travaux de J. C. C. MCKINSEY (1941) et J.C.C. MCKINSEY et a. TARSKI (1944, 1946), dont les racines se trouvent, il me semble, dans A. TARSKI (1938).

Un cas très particulier du calcul S4 c'est le calcul S5, dont l'étude, au point de vue de l'algèbre, conduit à la définition suivante:

1.2- *DEFINITION. Une algèbre* S4 *est une algèbre* S5 *si* I-Ia = Ia. (Voir C. DAVIES, (1951))

(*) Nous adoptons ici la terminologie de R. SIKORSKI (1949),(1954).

Rappellons que l'égalité précèdente est équivalente, d'après HALMOS (1955) à

$$I(a \vee Ib) = Ia \vee Ib$$

Cet auteur a donné aux algèbres S5 le nom d'algèbres de Boole monadiques. Dans le cas particulier des espaces topologiques cela revient à dire que tous les ensembles ouverts sont des ensembles fermés.

P. Halmos a montré dans ses importants travaux (1954, 1955) que la notion d'algèbre de Boole monadique peut être considérée comme une *version algébrique de la notion de quantification monadique (*I *correspond au quantificateur universel et* C *au quantificateur existentiel)*. Il a montré, en particulier que:

Les algèbres de Boole monadiques sont semi-simples. P. HALMOS, (1955, pag. 229).

Il remarque a ce propôs:

"The semi-simplicity of the closure algebra of a topological space appears to depend on which separation axioms the space satisfies" en posant donc ainsi le problème de déterminer les algèbres S4 qui sont semi-simples.

Nous nous proposons de montrer dans cette note que: *les algèbres* S4 *semi-simples sont précisement les algèbres de Boole monadiques.* En particulier pour que l'algèbre de Boole topologique $(2^E, I)$, d'un espace topologique E(*) soit semi-simple il faut et il suffit que tout ensembre ouvert soit un ensemble fermé. Cette condition peut d'ailleurs avoir lieu sans que l'axiome de séparation To soit vérifié.

Au §2 nous indiquons une démonstration de ce résultat en utilisant, comme il est naturel, la théorie des homomorphismes.

(*) Dans la définition d'un espace topologique E, on suppose, en géneral, que $E \neq \phi$, donc $A = 2^E$ a plus d'un élément.

Pour connaître les images homomorphes d'une algèbre de Boole topologique donnée A il suffit de connaître les filtres ouverts de A, c.a.d. les filtres H de A tels que si $a \in H$ alors $Ia \in H$. Par une construction intrinsèque, effectué sur A, on obtient alors l'algèbre quotient A/H, qui est une image homomorphe de A.

Au §3 nous indiquons certains résultats sur la théorie des systèmes deductifs qui auront un rôle à jouer par la suite. Nous insistons sur l'étude de la notion de *semi-simplicité deductive* qui est caractérisé par la loi de Peirce.

Au §4 nous étudions plusieurs opérations d'implication qu'on peut considérer dans la théorie des algèbres de Boole topologiques: *l'implication stricte de Lewis, l'implication contraposable, l'implication faible et l'implication intuitioniste*. Nous montrerons alors que par rapport aux deux dernières implications la semi-simplicité deductive de A coïncide avec la notion de semi-simplicité considéré au §2. Ces résultats sont susceptibles d'intéreser un logicien.

Pour simplifier une démonstration que nous indiquerons plus loin il est convenable d'établir le résultat suivant: où $a \supset b = -a \vee b$

1.3. LEMME. *Pour qu'un système* (A,I) *formé par une algèbre de Boole* A *et une application* I *de* A *dans* A *soit une algèbre de Boole topologique il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées:*

B1) $I1 = 1$

B2) $Ia \supset a = 1$

B3) $I(Ia \supset b) \supset (Ia \supset Ib) = 1$

Dém. Les conditions sont nécessaires. Rappelons que dans une algèbre de Boole nous pouvons afirmer que:

E1) $a \leqslant b$ *est équivalent à:* $a \supset b = 1$

E2) $a \wedge c \leqslant b$ *est équivalent à:* $c \leqslant a \supset b$

Cela étant, soit (A,I) une algèbre de Boole topologique. Les conditions B1) et B2) sont vérifiées. Pour démontrer B3) remarquons que:

$Ia \wedge I(a \supset b) = I(a \wedge (a \supset b)) = I(a \wedge b) = Ia \wedge Ib \leqslant Ib$
d'où, d'après E2) $I(a \supset b) \leqslant Ia \supset Ib$. En remplaçant a par Ia nous aurons $I(Ia \supset b) \leqslant Ia \supset Ib$, ce qui est équivalent à B3).

Les conditions sont suffisantes. Supposons que I vérifie B1)-B3) et remarquons que B2 et B3 peuvent s'écrire sous la forme

$$\text{B2)}\quad Ia \leqslant a \quad ; \quad \text{B3)}\ I(Ia \supset b) \leqslant Ia \supset Ib$$

Montrons sucessivement que:

1º) *Si* $a \leqslant b$ *alors* $Ia \leqslant Ib$. Supposons que $a \leqslant b$; en utilisant B2) nous aurons $Ia \leqslant b$, c.a.d. $Ia \supset b = 1$. En portant cette condition dans B3) et en utilisant I1) nous aurons $Ia \supset Ib = 1$, c.a.d. $Ia \leqslant Ib$

2º) $IIa = Ia$. En remplaçant b par Ia dans B3) nous aurons $Ia \leqslant IIa$ d'autre part par B2) : $IIa \leqslant Ia$, donc $IIa = Ia$

3º) $I(a \supset b) \leqslant Ia \supset Ib$ *(inégalité de Gödel).* De $Ia \leqslant a$ on tire $a \supset b \leqslant Ia \supset b$, d'où par 1º)

$$(1)\qquad I(a \supset b) \leqslant I(Ia \supset b)$$

De (1) et B3) on déduit 3º).

4º) $I(a \wedge b) = Ia \wedge Ib$.
De $a \wedge b \leqslant a$ et $a \wedge b \leqslant b$ et de 1º) on déduit

$$(1)\qquad I(a \wedge b) \leqslant Ia \wedge Ib$$

D'autre part 3º) est équivalente a

$$(2)\qquad Ia \wedge I(a \supset b) \leqslant Ib$$

En remplaçant dans (2) b par $a \wedge b$ nous aurons

$$(3)\qquad Ia \wedge I(a \supset (a \wedge b)) \leqslant I(a \wedge b)$$

Comme $a \supset (a \wedge b) = a \supset b$ nous pouvons écrire (3) sous la forme

$$(4)\qquad Ia \wedge I(a \supset b) \leqslant I(a \wedge b)$$

De $b \leqslant a \supset b$ on déduit $Ib \leqslant I(a \supset b)$, d'où:

$$(5) \quad Ia \wedge Ib \leqslant Ia \wedge I(a \supset b)$$

De (4) et (5) on tire :

$$(6) \quad Ia \wedge Ib \leqslant I(a \wedge b)$$

et 4°)est une conséquence de (1) et (6). Les conditions B1), B2), 2°) et 4°) montrent que (A,I) est une algèbre de Boole topologique. Ce résultat peut être considéré comme une version algébrique de l'axiomatisation du calcul propositionnel S4 obtenue par J.F.F. NIELAND et E.W.BETH (1961, pag. 68-69). Nous remercions le Prof. M.GUILLAUME de nous avoir signalé ce travail.

2. HOMOMORPHISMES ET SEMI-SIMPLICITE.

Une algèbre de Boole topologique est une algèbre définie par des égalités. Si A et A' sont des algèbres de cette nature, alors une application h de A dans A' est un homomorphisme si (SIKORSKI , (1954)) :

H1) $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$
H2) $h(-x) = -h(x)$
H3) $h(Ix) = Ih(x)$

On pourrait aussi dire avec R. SIKORSKI que h est un homomorphisme topologique, pour distinguer cette notion de celle d'homomorphisme booléen h définie par les conditions H1) et H2).
De H1) et H2) on déduit: $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$, $h(1) = 1$, $h(o) = = o$.
On voit de suite que $h(A)$ est une sous-algèbre de A'. Si $h(A) = A'$ on dit que A' est une image homomorphe de A.

2.1- *DEFINITION: Si* h *est un homomorphisme de* A *sur* A', *le noyau de* h *est l'ensemble* H *des éléments* $x \in A$ *tels que* $h(x) = 1 \in A'$.

Rappelons que:

2.2- *DEFINITION: Une partie* H *d'une algèbre de Boole* A *est un filtre de* A *si:*

F1) $1 \in H$

F2) Si $a,b \in H$ alors $a \wedge b \in H$

F3) Si $a \in H$ et $a \leqslant b$ alors $b \in H$

Si nous posons $a \supset b = -a \vee b$ alors on peut démontrer que:

2.3. THEOREME. *Pour qu'une partie* H *d'une algèbre de Boole* A *soit un filtre il faut et il suffit que:*

D1) $1 \in H$

D2) *(Modus ponens)* Si $a, a \supset b \in H$ alors $b \in H$.

Il est bien connu qu'on peut obtenir toutes les images homomorphes d'une algèbre de Boole A au moyen d'une construction effectué directement sur A.
Etant donné un filtre H de A, on écrit

$$a \equiv b \pmod{H}$$

si $(a \supset b) \wedge (b \supset a) \in H$.
La relation binaire $\equiv$ ainsi définie est une relation d'équivalence compatible avec les opérations booleénnes $\wedge$, $\vee$, $-$.
Nous pouvons donc définir sur l'ensemble quotient $A/\equiv$ les opérations $\wedge$, $\vee$, $-$ et nous obtenons ainsi une algèbre de Boole A' qu'on appele le quotient de A par H (en notation $A' = A/H$). Il est aussi bien connu que toutes les images homomorphes d'une algèbre de Boole peuvent être obtenues de cette manière (à un isomorphisme près).

Dans le cas des algèbres de Boole topologiques étant donné un filtre H la relation de congruence que nous venons de définir n'est pas en général compatible avec l'opérateur I.
En realité on voit de suite que:

2.4. *Si* h *est un homomorphisme de l'algèbre de Boole topologique* A *sur l'algèbre de même nature* A' *alors le noyau* H *de* h *est un filtre tel que*

F4) Si $a \in H$ alors $Ia \in H$

Un filtre qui verifie F4 *sera dit un filtre ouvert.* H *est propre si* $H \neq A$.

Alors on montre facilement (SIKORSKI (1954)) que si H est un filtre ouvert la relation $\equiv$ (mod. H) est compatible avec l'opérateur I. Nous pouvons donc définir sur l'ensemble quotient $A/\equiv$ l'opération I et nous obtenons ainsi une algèbre de Boole topologique A' qu'on appele l'algèbre quotient de A par H.
On voit d'ailleurs facilement que toutes les images homomorphes d'une algèbre de Boole topologique peuvent être obtenues, à un isomorphisme près, de la manière que nous venons d'indiquer.

Si $a \in A$ est un élément ouvert (c.a.d. si $Ia = a$) alors le filtre principal engendré par a (c.a.d. l'ensemble $F(a)$ des éléments x tels que $a \leqslant x$) est un filtre ouvert, donc l'algèbre $A/F(a) = A'$ est une image homomorphe de A.

Remarquons maintenant que

2.5. *La famille des filtres ouverts propres de* A *est inductive supérieurement.*

2.6.*DEFINITION: Un filtre ouvert* H *sera dit maximal si* H *est maximal dans la famille des filtres ouverts propres.*

donc d'après 2.5

2.7. *Tout filtre ouvert propre est contenu dans un filtre ouvert maximal.*

Ce résultat permet de determiner de suite les algèbres de Boole topologiques simples.

2.8- *DEFINITION: Une algèbre de Boole topologique* A *est simple si* A *contient plus qu'un élément et si les seules images homomorphes de* A *sont 1º) l'algèbre de Boole topologique ayant un seul élément et 2º) les algèbres isomorphes à* A.

Pour determiner les algèbres simples remarquons tout d'abord que

2.9. *Si* F *et* G *sont des filtres ouverts alors* $H = F \wedge G$(*) *est le plus petit filtre ouvert qui contient* F *et* G .

Dém. Il est bien connu, M.STONE (1936) , (1937), que H est le plus petit filtre qui contient F et G et on voit de suite que H est un filtre ouvert

(*) Si X et Y sont des parties non vides de A , nous représenterons par $X \wedge Y$ l'ensemble des éléments de la forme $x \wedge y$ où $x \in X$ et $y \in Y$.

2.10. *Si* G *est un filtre ouvert et* a *un élément de* A *alors le plus petit filtre ouvert qui contient* G *et* a *est égal à* $H = G \wedge F(Ia)$.

Dém. Tout filtre ouvert F qui contient a doit contenir Ia et aussi F(Ia); si en outre F contient G alors F doit contenir $H = G \wedge F(Ia)$ qui d'après 2.9 est un filtre ouvert et 2.10 est démontré.

2.11. THEOREME . *Pour qu'un filtre ouvert propre* M *soit maximal il faut et il suffit que si* $a \notin M$ *alors* $-Ia \in M$.

Dém. Pour qu'un filtre ouvert propre M sоit maximal il faut et il suffit que si $a \notin M$ alors le plus petit filtre ouvert H qui cpn-tient M et a soit égale a $A = F(o)$.
Mais $H = M \wedge F(Ia)$.
Donc pour que le filtre ouvert propre M soit maximal il faut et il suffit que pour tout $a \notin M$ il existe (1) $m \in M$ et (2) $n \in F(Ia)$ tels que (3) $m \wedge n = o$.
La condition (1) est équivalente à (1') $Im = m' \in M$ et (2) est équivalente à $Ia \leqslant n$ c.a.d. a (2') $Ia \leqslant In$.
Si M est un filtre ouvert maximal alors de (3) il resulte

$$o = Io = Im \wedge In$$

en utilisant (1') , (2') nous aurons

$$(4) \quad m' \wedge Ia = o$$

d'où $\qquad m' \leqslant -Ia$

et , d'après (1') nous aurons $-Ia \in M$.

La réciproque est immédiate.

2.12. THEOREME. *Si* M *est un filtre ouvert maximal de* A *alors* $A' = A/M$ *est une algèbre de Boole topologique telle que si* $a' \in A'$ *et* $a' \neq 1$ *alors* $Ia' = o$.

Dém. Soit M un filtre ouvert maximal et $A' = A/M$. Soit $a' \in A'$ c.a.d. une classe d'équivalence modulo M: $a' = |a|$ où $a \in A$.

Dire que $a' \neq 1 \in A'$ est équivalent à dire que $a \notin M$, alors $-Ia \in M$ c.a.d. $|-Ia| = 1$, donc $-I|a| = 1 \in A'$ soit $I|a| = o \in A'$ ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons que l'algèbre $A' = A/M$ a seulement deux éléments ouverts o et 1 . Montrons maintenant que :

2.13. THEOREME. *Pour qu'une algèbre de Boole topologique* A *soit simple il faut et il suffit que:*

S1) A *contient plus d'un élément*

S2) *Les seuls ouverts de* A *sont* o *et* 1.

Dém. Si A est simple alors S1) est verifiée. Si S2) n'etait verifiée alors il existirait un élément ouvert a tel que $a \neq o$, $a \neq 1$. Le filtre principal F(a) étant ouvert et propre est contenu dans un filtre ouvert maximal M, donc A/M = A' serait une image homomorphe de A et comme A' a seulement deux éléments ouverts (o et 1), A' ne peut pas être isomorphe à A , car A a au moins trois éléments ouverts o, a, 1 . Cette contradiction montre que les seuls ouverts de A sont o et 1 .

Réciproquement supposons que l'algèbre de Boole topologique A vérifie S1 et S2. Toute image homomorphe de A est isomorphe à un quotient A/H où H est un filtre ouvert de A. Les seuls filtres ouverts de A étant F(1) = {1} et F(o) = A, alors A/F(1) = A et A/A = {o} donc A est simple.

2.14. *DEFINITION: Une algèbre de Boole topologique* A *ayant plus d'un élément sera dite semi-simple si elle est isomorphe à une sous-algèbre d'un produit cartesien d'algèbres simples.*

2.15. THEOREME. *Pour qu'une algèbre de Boole topologique ayant plus d'un élément soit semi-simple il faut et il suffit que* A *soit une algèbre de Boole monadique, c.a.d. que* (1) $I(x \vee Iy) = Ix \vee Iy$.

Dém. Si A *est une algèbre simple alors l'égalité* (1) *est vérifiée.* En effet dans une algèbre simple Iy ne peut prendre que les valeurs o et 1 et dans les deux cas l'égalité (1) est évidemment vérifiée. Il en est de même dans tout produit cartésien d'algèbres simples et dans une sous-algèbre d'un tel produit et alors d'après la définition 2.15 dans toute algèbre semi-simples l'égalité (1) est vérifiée, c.a.d. toute algèbre semi-simple est une algèbre de Boole monadique. Comme P. HALMOS a démontré la réciproque la démonstration est terminée.

REMARQUE: Il est bien connu que si A est une algèbre de Boole topologique, alors la famille *O* des éléments ouverts de A est une algèbre de Heyting. Si H est un filtre ouvert de A alors F = I(H) est un filtre de *O* et l'on voit de suite que F est une base du filtre H.

On voit très facilement que l'application I est un isomorphisme entre le réticulé des filtres-ouverts de A et le réticulé des filtres de O . Nous avons démontré (A. MONTEIRO (1954, pag.157)) que: *"pour qu'une algèbre de Heyting O soit semi-simple il faut et il suffit que O soit une algèbre de Boole".*

Nous pouvons donc affirmer: *"Pour qu'une algèbre de Boole topologique* A *soit semi-simple il faut et il suffit que l'algèbre de Heyting O des éléments ouverts de* A *soit semi-simples".*

3. LES SYSTEMES DEDUCTIFS.

La théorie des systèmes déductifs a été fondé par ALFRED TARSKI (1930) et developpée par le même auteur dans ses importants travaux (1956).

D'autre part DAVID HILBERT (1923) a mis en évidence l'importance du *calcul implicatif positif,* dont l'étude au point de vue de l'algèbre a été developpé par L. HENKIN (1950) et A. DIEGO (1965). La notion de modèle implicatif au sens de Henkin (à laquelle on peut donner le nom d'algèbre de Hilbert) a une grande importance dans l'étude du calcul considéré par D. Hilbert. Il existe cependant d'autres calculs propositionnels, de nature très variée, et distincts du calcul implicatif positif où il est utile de considérer une situation plus générale, que nous allons indiquer.

Soit $(A , \rightarrow)$ un système formé par un ensemble non vide A et une opération binaire $\rightarrow$ (nomée opération *d'implication*) définie sur A.

3.1. *DEFINITION: Une partie* D *de* A *est un système déductif (de* A*, si les conditions suivantes sont vérifiées:*

D1) $x \rightarrow (y \rightarrow x) \in D$, *quels que soient les éléments* x *et* y *de* A.

D2) $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) \in D$, *quels que soient les éléments* x , y , z *de* A.

MP) *(Règle de Modus Ponens) Si* a , $a \rightarrow b \in D$ *alors* $b \in D$.

Un système déductif D *sera dit propre si* $D \neq A$.

On voit de suite que

3.2. *L'intersection d'une famille quelconque de systèmes déductifs est un système déductif.*

Remarquons que d'après D1) et D2) un système déductif D n'est pas vide et que A est un système déductif; donc

3.3. *La famille $\mathcal{D}$ de tous les systèmes déductifs de* (A, $\rightarrow$) *est un réticulé complet.*

3.4. *DEFINITION: Représentons par* T^o *l'ensemble de tous les éléments de* A *de la forme* $x \rightarrow (y \rightarrow x)$ *ou de la forme* $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z))$. *Nous dirons que* T^o *est l'ensemble des thèses élémentaires de* A. *L'intersection* T *de tous les systèmes déductifs de* A *sera appelé l'ensemble des thèses de* A. *Il est clair que* $T^o \subseteq T$. *Le système* (A, $\rightarrow$) *sera dit deductivement consistant si* $T \neq A$ *et dans le cas contraire deductivement inconsistant.*

EXEMPLE 3.1. Soit A = {o,2,1} et soit $\succ\!\!\rightarrow$ l'opération binaire définie sur A au moyen de la table ci-jointe.Le système (A , $\succ\!\!\rightarrow$) est tel que T^o = {2,1} et l'on voit de suite que T = A, donc le système considéré est deductivemente inconsistant.

$\succ\!\!\rightarrow$	o	2	1
o	1	1	1
2	2	1	1
1	o	2	1

Remarquons que l'opération $\succ\!\!\rightarrow$ définie sur A est celle qui a été utilisée par J. Lukasiewicz pour définir l'opération d'implication dans son calcul trivalent.

EXAMPLE 3.2. Si nous posons $x \rightarrow y = x \succ\!\!\rightarrow (x \succ\!\!\rightarrow y)$ nous aurons la table indiquée ci-jointe pour l'opération $\rightarrow$ (appelée *implication faible*). Dans ces conditions on voit facilement que (A, $\rightarrow$) est deductivement consistant et que T = {1} . Les seuls systèmes deductifs de (A, $\rightarrow$) sont T et A.

$\rightarrow$	o	2	1
o	1	1	1
2	1	1	1
1	o	2	1

Indiquons maintenant quelques propriétés des systèmes déductifs que nous aurons à utiliser par la suite.

3.5. *DEFINITION: Si* H *est une partie de* (A, $\rightarrow$) *nous représenterons par* D(H) *l'intersection de tous les systèmes déductifs que contiennent* H *et nous dirons que* D(H) *est le système déductifs engendré par* H.

Cette définition n'a pas un caractère constructif et par cette raison il est utile de considérer la définition suivante:

3.6. *DEFINITION: Si* $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ *est une partie finie de*

$(A, \rightarrow)$ *nous écrirons* $H \vdash t$ *ou*

$$h_1, h_2, \ldots, h_n \vdash t$$

pour indiquer que

$$h_1 \rightarrow (h_2 \rightarrow (\ldots(h_n \rightarrow t)\ldots)) \vdash T$$

Nous écrirons $\emptyset \vdash t$ *pour indiquer que* $t \in T$ *.Finallement si* H *est une partie quelconque de* A *nous écrirons* $H \vdash t$ *pour indiquer qu'il existe une partie finie* F *de* H *telle que* $F \vdash t$.

On peut démontrer facilement, comme on le fait dans le calcul implicatif positif, que :

3.7. THEOREME. (*de la compacité*) *Pour que* $t \in D(H)$ *il faut et il suffit que* $H \vdash t$.

3.8. THEOREME .(*de la déduction de Tarski*). *Si* H *est un système déductif de* A *et si* $a \in A$ *alors pour que* $t \in D(H \cup \{a\})$ *il faut et il suffit que* $a \rightarrow t \in H$.

Nous allons maintenant considérer une clase très spéciale de systèmes déductifs:

3.9. *DEFINITION*: *Un système déductif* M *sera dit maximal si: 1º)* M *est un système déductif propre; 2º) Si* D *est un système déductif tel que* $M \subseteq D$ *alors ou bien* $D = M$ *ou bien* $M = A$.

Dans l'exemple 3.1. il n'existe aucun système déductif maximal et dans l'exemple 3.2., T est le seul système déductif maximal.

La famille M de tous les systèmes déductifs maximaux de $(A, \rightarrow)$ peut être vide, même si A est consistant.

EXEMPLE 3.3. Soit A l'ensemble des nombres réels r tels que $0 < r \leq 1$. Si $a, b \in A$ posons:

$$a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a \leq b \\ b & \text{si} \quad a > b \end{cases}$$

alors on peut vérifier que le système $(A, \rightarrow)$ a les propriétés suivantes: 1º) L'ensemble des thèses de A est $T = \{1\}$ (voir McKINSEY et TARSKI (1946, pag. 128, Exemple 2); 2º) Il n'existe aucun système déductif maximal de $(A, \rightarrow)$.

Il est très important au point de vue théorique de savoir que:

3.10. THEOREME. *Pour qu'un système déductif* M *soit maximal il faut et il suffit que : 1º)* $M \neq A$ *;2º) Si* $a,b \notin M$ *alors* $a \to b \in M$.

3.11. *DEFINITION: L'intersection* R(A) *de tous les systèmes déductifs maximaux de* A *sera nomée le radical deductif de* A *et* A *sera dit deductivement semi-simple si 1º)* A *est deductivement consistant ; 2º)* $T = R(A)$.

3.12. *DEFINITION: Un élément de la forme* $p = ((a \to b) \to a) \to a$ *sera dit peircien.*

On peut démontrer les résultats suivants :

3.13. THEOREME. R(A) *est le système déductif engendré par l'ensemble* P *des éléments peirciens de* A *, c.a.d.* $R(A) = D(P)$.

Finallement

3.14. THEOREME. *(de la semi-simplicité). Pour que* $(A, \to)$ *soit deductivement semi-simple il faut et il suffit que 1º)* A *soit consistant ; 2º) La loi de Peirce est vérifiée c.a.d.*
$((a \to b) \to a) \to a \in T$ *, quels que soient* $a,b \in A$.

Ce théorème de la semi-simplicité est susceptible de nombreuses applications, qui montrent l'intéret de ce résultat.

Si A est consistant il peut arriver que la famille des systèmes déductifs propres ne soit pas inductive supérieurement, comme le montre l'exemple 3.3. Mais on voit de suite que:

3.15. THEOREME.*Si* A *est consistant et si* $c \notin T$, *alors la famille des systèmes déductifs que ne contiennent pas* c *est inductive supérieurement.*

Cette situation nous conduit à la définition suivante :

3.16. *DEFINITION. Si* A *est consistant et si* $c \notin T$ *nous dirons que le système déductif* C *est lié à* c *, si* C *est un système déductif maximal parmi ceux que ne contiennent pas* c.

D'autre part

3.17. *DEFINITION: Un système* C *sera dit complètement irreductible si 1º)* C *est un système déductif propre, 2º) Étant donnée une famille, non vide,* $\{D_i\}_{i \in I}$ *de systèmes déductifs telle que*

$$C = \bigcap_{i \in I} D_i$$ *il existe un indice* $i \in I$ *tel que* $C = D_i$.

On voit facilement que :

3.18. THEOREME. *Tout système déductif propre est l'intersection de systèmes complètement irreductibles.*

3.19. THEOREME. *Pour qu'un système déductif* C *soit complètement irreductible il faut et il suffit que* C *soit lié à un élément* c.

Remarquons, en passant , que comme une conséquence immediate du théorème de la déduction de Tarski, on peut affirmer que

3.20. THEOREME. *Pour qu'un système déductif* D *soit lié à l'élément* c *il faut et il suffit que: 1º)* $c \notin D$ *; 2º) Si* $x \notin D$ *alors* $x \to c \in D$.

3.21. *DEFINITION: Un système déductif* D *sera dit irreductible si: 1º)* $D \neq A$ *; 2º) Si* D' *et* D" *sont des systèmes déductifs tels que* $D = D' \cap D''$ *alors ou* $D = D'$ *ou* $D = D''$.

Il est clair que tout système complètement irreductible est irreductible, mais la réciproque n'est pas valable.

On voit facilement que

3.22. THEOREME. *Si* $(A, \to)$ *est consistant alors pour que les notions de système déductif irreductible, complètement irreductible et maximal soient identiques il faut et il suffit que* A *soit semi-simple.*

Les démonstrations de ces résultats seront indiquées dans un autre travail.[1].

(1) En tout cas elles coïncident avec celles qui on été présentés dans A.MONTEIRO (1960) , dans le cadre plus restreint des algèbres de Hilbert.

4. SEMI-SIMPLICITE DEDUCTIVE DES ALGEBRES DE BOOLE TOPOLOGIQUES.

Nous allons maintenant examiner le problème de la semi-simplicité deductive des algèbres de Boole topologiques, en cherchant des opérateurs binaires I définis sur une algèbre de Boole topologique A, qui vérifient les conditions suivantes:

S1) *L'ensemble* T *des thèses du système* (A, I) *est l'ensemble* T = {1} .

S2) *Les filtres ouverts* D *de l'algèbre de Boole topologique* A *sont caractérisés par les deux propriétés suivantes:*

I1) $1 \in D$

I2) (règle de modus ponens pour l'opérateur I *) c.a.d.*

Si $a \in D$ *et* $a \, I \, b \in D$ *alors* $b \in D$

S3) *Pour que le système* (A, I) *soit deductivement semi-simple il faut et il suffit que* A *soit une algèbre de Boole monadique.*

Pour cela nous allons examiner les opérations d'implication suivantes :

A) *L'implication classique* $\supset$, *définie par* $a \supset b = -a \vee b$

B) *L'implication stricte de Lewis* $\twoheadrightarrow$, *définie par*

$$a \twoheadrightarrow b = I(a \supset b)$$

C) *L'implication faible* $\rightarrow$, *définie par*

$$a \rightarrow b = Ia \supset b$$

D) *L'implication intuitioniste* $\Rightarrow$, *définie par*

$$a \Rightarrow b = I(Ia \supset Ib)$$

E) *L'implication contraposable faible* $>\!\!\rightarrow$, *définie par*

$$a >\!\!\rightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (-b \rightarrow -a)$$

A) L'IMPLICATION CLASSIQUE. Nous savons que

A1) $a \supset (b \supset a) = 1$

A2) $(a \supset (b \supset c)) \supset ((a \supset b) \supset (a \supset c)) = 1$

A3) $1 \supset a = a$

A4) $((a \supset b) \supset a) \supset a = 1$

Les conditions A1), A2), et A3) montrent que l'ensemble des thèses de (A, $\supset$) est T = {1} , donc S1) est vérifiée

Les systèmes déductifs de $(A, \supset)$ sont les filtres de l'algèbre de Boole A, donc S2 n'est pas vérifiée à moins que $Ix = x$ quel que soit x .
Le système $(A, \supset)$ étant deductivement semi-simples d'après A4) et 3.14 , la condition S3 n'est pas vérifiée à moins que $Ix = x$ quel que soit x.

B) L'IMPLICATION STRICTE DE LEWIS . Cherchons tout d'abord a caractériser les *filtres ouverts* au moyen de cette opération. Il est facile de voir que :

4.1. THEOREME. *Pour qu'une partie D d'une algèbre de Boole topologique soit un filtre ouvert il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées:*

BI1) $1 \in D$

BI2) (*Modus ponens strict*) *Si* $a \in D$ *et* $a \twoheadrightarrow b \in D$ *alors* $b \in D$.

BI3) *Si* $a \in D$ *alors* $Ia \in D$

Dém. (I) *Les conditions sont nécessaires* .Supposons que (1) D soit un filtre ouvert. Les conditions BI1) et BI3) sont verifiées. Supposons que (2) $a \in D$ et (3) $a \twoheadrightarrow b \in D$. Comme (4) $a \twoheadrightarrow b = I(a \supset b) \leq a \supset b$ alors de (1) (3) et (4) on deduit (5) $a \supset b \in D$. De (1) (2) et (5) on tire $b \in D$, donc BI2 est vérifiée.

(II) *Les conditions sont suffisantes.* Soit D une partie de A qui vérifie les conditions BI1 - BI3. Montrons que D est un filtre.
Nous avons tout d'abord:
F1) $1 \in D$.
Montrons que:

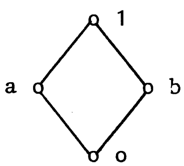
F2) *Si* $a \in D$ *et* $a \leq b$ *alors* $b \in D$
De $a \leq b$ on déduit $a \supset b = 1$, donc (1) $a \twoheadrightarrow b = 1 \in D$ et alors de (1) et (2) $a \in D$, en utilisant BI2), on déduit $b \in D$.

F3) *Si* $a,b \in D$ *alors* $a \wedge b \in D$
Pour cela remarquons que
(1) $a \twoheadrightarrow (a \wedge b) = I(a \supset (a \wedge b)) = I(a \supset b) = a \twoheadrightarrow b$
De $b \in D$ on déduit par BI3) que: (2) $Ib \in D$. De $b \leq a \supset b$ on tire
(3) $Ib \leq I(a \supset b) = a \twoheadrightarrow b$
De (2),(3) et (F2) il résulte
(4) $a \twoheadrightarrow b \in D$
De (1) et (4) on déduit (5) $a \twoheadrightarrow (a \wedge b) \in D$ et comme par hypothèse

(6) $a \in D$ de (6) et (5) il résulte par BI2) $a \wedge b \in D$.
Les conditions F1) - F3) montrent que D est un filtre qui est ouvert d'après BI3).

Montrons sur un exemple que la condition BI3) ne peut pas être supprimé.

EXEMPLE 4.1. Soit A l'algèbre de Boole avec deux atomes a et b dont le diagramme est indiqué sur la figure. Soit I l'opérateur



defini sur A de la manière suivante: $Ib = o$ et $Ix = x$ pour $x \neq b$. Alors (A, I) est une algèbre de Boole topologique. La partie $D = \{b , 1\}$ vérifie les conditions BI1) et BI2) sans vérifier BI3). D est un filtre qui n'est pas ouvert car $b \in D$ et $Ib = o \notin D$.

Remarquons que si nous posons

$$(x \equiv y) = (x \nrightarrow y) \wedge (y \nrightarrow x)$$

alors la matrice que nous obtenons en prenant $D = \{b,1\}$ comme famille d'éléments designés est une matrice normale au sens de J.C. McKINSEY (1941) car la condition $x \equiv y \in D$ est équivalente à $x = y$.

Ces remarques montrent qu'on ne peut caracteriser les filtres ouverts par les conditions BI1) et BI2).
La règle de calcul

$$\text{B1)} \quad x \nrightarrow (y \nrightarrow x) = 1$$

n'est pas valable (comme on le voit en posant $x = b$, $y = a$ dans l'exemple précédent) mais il est bien connu que

$$\text{B2)} \quad (x \nrightarrow (y \nrightarrow z)) \nrightarrow ((x \nrightarrow y) \nrightarrow (x \nrightarrow z)) = 1$$

(voir G.E. HUGHES and M.J. CRESSWELL ,(1968) , pag.295) .
Pour que la condition S1 soit vérifiée il faut et il suffit que $Ix = x$ comme on le voit facilement .

C) L'IMPLICATION FAIBLE . Examinons maintenant l'implication faible $a \rightarrow b = C\,{-a} \vee b = Ia \supset b$. (Voir J. PORTE (1962)) .
Montrons que

4.2. THEOREME. *Pour qu'une partie* D *d'une algèbre de Boole topologique soit un filtre ouvert il faut et il suffit que les conditions suivantes soient verifiées:*

CI1) $1 \in D$

CI2) (*Modus ponens faible*) *Si* $a,\ a \to b \in D$ *alors* $b \in D$

Dém. Les conditions sont nécéssaires. Soit D un filtre ouvert. La condition CI1) est vérifiée. Supposons maintenant que

$$(1)\ a \in D \quad ; \quad (2)\ a \to b \in D$$

De (1) on déduit (3) $Ia \in D$. De (2) et (3) on tire

$$\alpha = Ia \wedge (a \to b) = Ia \wedge (-Ia \vee b) = Ia \wedge b \in D$$

et comme $\alpha \leqslant b$ alors $b \in D$ et CI2) est vérifiée.

Les conditions sont suffisantes. Soit D une partie de A qui verifie CI1) et CI2).
Montrons que F2) *Si* $a \in D$ *et* $a \leqslant b$ *alors* $b \in D$
En effet soit (1) $a \in D$ et (2) $a \leqslant b$. Comme (3) $Ia \leqslant a$
de (2) et (3) on tire (4) $Ia \leqslant b$ c.a.d. (5) $a \to b = 1$. De (1), (5) et CI1) on déduit en utilisant CI2): $b \in D$.

F3) *Si* $a,b \in D$ *alors* $a \wedge b \in D$
Remarquons que (1) $a \to (a \wedge b) = a \to b \geqslant b$
De (2) $b \in D$, (1) et F2) on déduit (3) $a \to (a \wedge b) \in D$ et en tenant compte de (4) $a \in D$ on peut affirmer par (4),(3) et CI2) que $a \wedge b \in D$.

F4) *Si* $a \in D$ *alors* $Ia \in D$.
Supposons que (1) $a \in D$. Remarquons que (2) $a \to Ia = 1$. Alors de (1),(2),CI1) et CI2) on tire $Ia \in D$; CI1),F2),F3),F4) montrent que D est un filtre ouvert et la démonstration est terminée.

Montrons maintenant que

4.3. THEOREME. *Si* (A,I) *est une algèbre de Boole topologique alor l'opération d'implication faible* $a \to b = Ia \supset b$ *a les propriétés suivantes:*

C1) $a \to (b \to a) = 1$

C2) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$

C3) $1 \to a = a$ (*Modus ponens faible*)

Dém. On voit de suite que C1) et C3) sont vérifiées. Pour démontrer C2) rappellons que: dans toute algèbre de Boole, nous avons
(1) $a \supset (b \supset c) = (a \supset b) \supset (a \supset c)$
(2) Si $a \leqslant b$ alors $b \supset c \leqslant a \supset c$
Alors
$\alpha = a \to (b \to c) = Ia \supset (Ib \supset c) = (Ia \supset Ib) \supset (Ia \supset c)$

D'un autre coté

$\beta = (a \to b) \to (a \to c) = I(Ia \supset b) \supset (Ia \supset c)$

Mais d'après l'inégalite de Gödel nous avons

$I(Ia \supset b) \leqslant Ia \supset Ib$

d'où l'on déduit en utilisant (2)

(3) $\alpha = (Ia \supset Ib) \supset (Ia \supset c) \leqslant I(Ia \supset b) \supset (Ia \supset c) = \beta$

et comme (4) $I\alpha \leqslant \alpha$; de (3) et (4) on tire

$I\alpha \supset \beta = 1$ c.a.d. $\alpha \to \beta = 1$

ce qu'il fallait démontrer.

Nous allons maintenant démontrer que les proprietés C1),C2),C3) de l'implication faible caractérisent les algèbres de Boole topologiques; plus précisement:

4.4. THEOREME. *Soit* (A,I) *une système formé par une algèbre de Boole* A *et une application* I *de* A *dans* A, *alors pour que l'opération binaire*

$$a \to b = Ia \supset b$$

vérifié les égalités C1) C2) *et* C3) *il faut et il suffit que le système* (A,I) *soit une algèbre de Boole topologique.*

Dém. Dans le théorème précèdent nous avons démontré que les conditions sont suffisantes.

Supposons maintenant que $\to$ verifie les conditions C1),C2),C3). En remplaçant dans C3) a par I1 nous aurons $I1 \supset I1$ c.a.d:

B1) $1 = I1$

La condition C2) est équivalente à:

C2) $I(Ia \supset (Ib \supset c)) \supset (I(Ia \supset b) \supset (Ia \supset c)) = 1$

En remplaçant dans C2) a et b par 1 et en utilisant B1) nous aurons:

B2) $Ic \supset c = 1$

En remplaçant dans C2) c par Ib nous aurons:

B3) $I(Ia \supset b) \supset (Ia \supset Ib) = 1$

Nous avons démontré au §1 que les conditions B1),B2),B3) caractérisent les algèbres de Boole topologiques (A,I) et le théorème est démontré.

REMARQUE. Comme l'égalité C1) n'a pas été utilisée dans la démonstration précèdente nous pouvons affirmer plus généralement que B1), B2),B3) sont démontrables a partir de C2) et C3), donc les algèbres de Boole topologiques peuvent être définies par les égalités C2) et C3) .

Les théorèmes 4.2 et 4.3 montrent que le système $(A, \rightarrow)$ vérifie les conditions S1) et S2) et alors d'après le théorème 3.14 pour que $(A, \rightarrow)$ soit déductivement semi-simples il faut et il suffit que A ait plus d'un élément et que

$$((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow a = 1.$$

Pour démontrer que la condition S3) est vérifiée nous avons a démontrer le résultat suivant

4.5. THEOREME. *Si* A *est une algèbre de Boole topologique pour que l'implication faible vérifie l'égalité*

$$\text{(P)} \quad ((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow a = 1$$

il faut et il suffit que A *soit une algèbre de Boole monadique.*

Dém. La condition est suffisante. Soit A une algèbre de Boole monadique alors

$$(a \rightarrow b) \rightarrow a = I(Ia \supset b) \supset a = -I(-Ia \vee b) \vee a = C(Ia \wedge -b) \vee a =$$
$$= C(CIa \wedge -b) \vee a = (CIa \wedge C-b) \vee a = (Ia \wedge C-b) \vee a =$$
$$= (Ia \vee a) \wedge (a \vee C-b) = a \wedge (a \vee C-b) = a$$

et comme $a \rightarrow a = 1$ nous aurons : $((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow a = 1$.

La condition est nécessaire. Supposons que $\rightarrow$ vérifie la condition (P), c.a.d.:

$$\text{(P)} \quad I(I(Ia \supset b) \supset a) \supset a = 1$$

soit

$$I(-I(-Ia \vee b) \vee a) \leqslant a .$$

En remplaçant a par Ia et b par o dans cette relation nous aurons

$$I(CIa \vee Ia) \leqslant Ia$$

et comme $Ia \leqslant CIa$, nous pouvons écrire

$$\text{(I)} \quad ICIa \leqslant Ia$$

Cette condition a été considéré par PARRY (1939). Les algèbres de Boole topologiques que vérifient (I) sont des algèbres de Boole monadiques. Ce résultat a été démontré par DUMMETT et LEMMON (1959, pag.251), par SOBOCINKI (1964, pag.74) et par FEYS (1965, pag.130-131).

Démontrons ce résultat. Comme $Ia \leqslant CIa$ nous aurons aussi

$$\text{(II)} \quad Ia \leqslant ICIa$$

Par (I) et (II) nous pouvons écrire:

$$\text{(1)} \quad ICIa = Ia$$

ce qui est équivalent à

$$\text{(2)} \quad CICa = Ca$$

Il est bien connu que $Fra = Ca \wedge C-a$ est un élément fermé, donc par (2) nous aurons

$$(3)\ \mathrm{FrCa} = \mathrm{CIFrCa} = \mathrm{CI}(\mathrm{Ca} \wedge \mathrm{C\text{-}Ca}) = \mathrm{C}(\mathrm{ICa} \wedge \mathrm{IC\text{-}Ca})$$

D'un autre côté par (2)

$$\mathrm{IC\text{-}Ca} = \mathrm{-C\text{-}C\text{-}Ca} = \mathrm{-CICa} = \mathrm{-Ca}$$

et alors

$$(4)\ \mathrm{ICa} \wedge \mathrm{Ic\text{-}Ca} = \mathrm{ICa} \wedge \mathrm{-Ca} = o$$

De (3) et (4) on tire $\mathrm{FrCa} = o$, c.a.d. $\mathrm{Ca} \wedge \mathrm{C\text{-}Ca} = o$ soit

$$(5)\ \mathrm{Ca} \leqslant \mathrm{-C\text{-}Ca} = \mathrm{ICa}$$

et comme (6) $\mathrm{ICa} \leqslant \mathrm{Ca}$, alors de (5) et (6) on déduit $\mathrm{Ca} = \mathrm{ICa}$ et cela montre que tous les éléments fermés sont ouverts et A est une algèbre de Boole monadique.

M.Guillaume nous a indiqué(*) une démostration plus simple qui a d'ailleurs une portée plus générale. Supposons que f soit un élément fermé, c.a.d. $\mathrm{I}\text{-}f = -f$, alors $\mathrm{I}(f \supset \mathrm{I}f) = f \supset \mathrm{I}f$.
Posons dans (P) $a = f \supset \mathrm{I}f$ et $b = f$, alors (P) s'écrit sous la forme:

$$\mathrm{I}(\mathrm{I}((f \supset \mathrm{I}f) \supset f) \supset (f \supset \mathrm{I}f) \supset (f \supset \mathrm{I}f) = 1$$

Soit

$$\mathrm{I}(\mathrm{I}f \supset (f \supset \mathrm{I}f)) \supset (f \supset \mathrm{I}f) = \mathrm{I}1 \supset (f \supset \mathrm{I}f) = f \supset \mathrm{I}f = 1$$

donc $f \leqslant \mathrm{I}f$ et comme $\mathrm{I}f \leqslant f$ nous aurons $\mathrm{I}f = f$ et tous les éléments fermés sont ouverts.

D) L'IMPLICATION INTUITIONISTE.

Cherchons tout d'abord à caractériser les filtres ouverts au moyen de l'implication intuitioniste, en démontrant que

4.6. THEOREME. *Pour qu'une partie* D *d'une algèbre de Boole topologique* A *soit un filtre ouvert il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées:*

DI1) $1 \in D$

DI2) *Si* $a, a \Rightarrow b \in D$ *alors* $b \in D$ *(modus ponens intuitioniste).*

Dém. Les conditions sont nécessaire. Soit D un filtre ouvert, alors DI1) est vérifiée. Pour démontrer DI2) supposons que

$$(1)\ a \in D,\ (2)\ a \Rightarrow b \in D$$

De (1) on déduit (3) $\mathrm{I}a \in D$. Comme $a \Rightarrow b \leqslant \mathrm{I}a \supset \mathrm{I}b$ et D es un filtre nous pouvons afirmer que (4) $\mathrm{I}a \supset \mathrm{I}b \in D$,
De (3) et (4) on tire $\mathrm{I}b \in D$.Mais $\mathrm{I}b \leqslant b$ et par conséquent $b \in D$, ce qu'il fallait démontrer.

(*) Pendant notre séjour a C ermont Ferrand (Nov-Décembre 1969).

Les conditions sont suffisantes. Supposons que D est une partie de A vérifiant les conditions DI1) et DI2). Montrons que

F2) *Si* $a \in D$ *et* $a \leqslant b$ *alors* $b \in D$. De $a \leqslant b$ on tire $Ia \leqslant Ib$ c.a.d. $Ia \supset Ib = 1$ d'où $a \Rightarrow b = 1$ et comme $a \in D$ par DI2) nous pouvons affirmer que $b \in D$.

F3) *Si* $a,b \in D$ *alors* $a \wedge b \in D$. Remarquons que
(1) $a \Rightarrow (a \wedge b) = I(Ia \supset I(a \wedge b)) = I(Ia \supset (Ia \wedge Ib)) =$
$= I((Ia \supset Ia) \wedge (Ia \supset Ib) = I(1 \supset (Ia \supset Ib)) = I(Ia \supset Ib) = a \Rightarrow b$.
D'un autre côté $Ib \leqslant Ia \supset Ib$, donc $Ib \leqslant I(Ia \supset Ib)$, d'où $Ia \supset Ib =$
$= 1 \leqslant Ib \supset I(Ia \supset Ib)$ et alors

$$Ib \supset I(Ia \supset Ib) = 1$$

d'où
$$I(Ib \supset II(Ia \supset Ib)) = 1 \text{ , c.a.d.}$$

$$(2) \qquad b \Rightarrow (a \Rightarrow b) = 1$$

De $b \in D$ et (2) on déduit, par DI1) et DI2), que (3) $a \Rightarrow b \in D$ et en tenant compte de (1) nous aurons $a \Rightarrow (a \wedge b) \in D$ et comme $a \in D$ alors $a \wedge b \in D$.
Les conditions D1), F2) et F3) montrent que D est un filtre.

F4) *Si* $a \in D$ *alors* $Ia \in D$. C'est une conséquence de la formule $a \Rightarrow Ia = 1$; nous pouvons affirmer que D est un filtre ouvert et le théorème est démontré.

Mortrons maintenant que

4.7. THEOREME. *Si* (A, I) *est une algèbre de Boole topologique alors l'opération d'implication intuitioniste* $a \Rightarrow b$ *a les propriétes suivantes:*

D1) $a \Rightarrow (b \Rightarrow a) = 1$

D2) $(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c)) = 1$

D3) $1 \Rightarrow a = Ia$

Dém. La conditions D1) vient d'être démontrée. D3) est aussi valable. Il nous reste a démontrer D2).
Pour cela posons

$$A = a \Rightarrow (b \Rightarrow c) = I(Ia \supset I(Ib \supset Ic))$$
$$B = (a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c) = I(I(Ia \supset Ib) \supset I(Ia \supset Ic))$$

De $Ix \leqslant x$ on déduit:

(1) $I(Ia \supset Ib) \leqslant Ia \supset Ib$

(2) $A \leqslant Ia \supset I(Ib \supset Ic)$

(3) $I(Ib \supset Ic) \leqslant Ib \supset Ic$

De (3) il résulte

$$(4)\quad Ia \supset I(Ib \supset Ic) \leqslant Ia \supset (Ib \supset Ic)$$

De (2) et (4) on tire

$$(5)\quad A \leqslant Ia \supset (Ib \supset Ic)$$

En tenant compte de (1) nous aurons

$$(Ia \supset Ib) \supset I(Ia \supset Ic) \leqslant I(Ia \supset Ib) \supset I(Ia \supset Ic)$$

d'où

$$(6)\quad I((Ia \supset Ib) \supset I(Ia \supset Ic)) \leqslant B$$

De (5) on déduit

$$A = Ia \leqslant I(Ia \supset (Ib \supset Ic)) = I((Ia \supset Ib) \supset (Ia \supset Ic) \leqslant$$
$$\leqslant I(Ia \supset Ib) \supset I(Ia \supset Ic)$$

d'où

$$(7)\quad A \leqslant I(I(Ia \supset Ib) \supset I(Ia \supset Ic)).$$

De (7) et (6) on tire $A \leqslant B$ et comme $IA = A$, $IB = B$ nous aurons $A \Rightarrow B = I(IA \supset IB) = I(A \supset B) = I1 = 1$ et D2 est démontré.

Considérons maintenant le système $(A, \Rightarrow)$.
La condition S1 *est vérifiée*. D'après le théorème 4.7 l'ensemble T^0 des thèses élémentaires est identique à l'ensemble $\{1\}$. Pour montrer que $T = \{1\}$, il suffit de montrer que "*Si* $1 \Rightarrow a = 1$ *alors* $a = 1$" ce qui est une conséquence immediate de D3 (Th.4.7).
La condition S2 *est vérifiée* , d'après le théorème 4.6.

Montrons maintenant que la condition S3 est valable , c.a.d. que:

4.8. THEOREME. *Pour que le système* $(A, \Rightarrow)$ *soit deductivement semi-simples il faut et il suffit que* $(A, \Rightarrow)$ *soit une algèbre de Boole monadique.*

Dém. La semi-simplicité deductive de $(A, \Rightarrow)$ est equivalente à :

$$((a \Rightarrow b) \Rightarrow a) \Rightarrow a = 1$$

cette condition est équivalente à chacune des conditions suivantes:

$$I(I((a \Rightarrow b) \Rightarrow a) \Rightarrow Ia) = 1$$

$$I((a \Rightarrow b) \Rightarrow a) \Rightarrow Ia = 1$$

$$I(I((a \Rightarrow b) \Rightarrow a) \supset Ia) = 1$$

$$I((a \Rightarrow b) \Rightarrow a) \supset Ia = 1$$

$$I(I(a \Rightarrow b) \supset Ia) \leqslant Ia$$

$$(1)\qquad I(I(Ia \supset Ib) \supset Ia) \leqslant Ia$$

D'autre part nous avons toujours

$$(2) \quad Ia \leqslant I(Ia \supset Ib) \supset Ia$$

ce qui est d'ailleurs équivalent à

$$(3) \quad Ia \leqslant I(I(Ia \supset Ib) \supset Ia)$$

De (1) et (3) on tire

$$(P') \quad Ia = I(I(Ia \supset Ib) \supset Ia)$$

et nous pouvons affirmer que (1) est équivalente a (P').

Supposons que (A, I) soit une algèbre de Boole monadique, alors

$$I(Ia \supset Ib) = I(-Ia \vee Ib) = I\text{-}Ia \vee Ib = -Ia \vee Ib = Ia \supset Ib$$

donc

$$(4) \quad I(Ia \supset Ib) \supset Ia = (Ia \supset Ib) \supset Ia = Ia$$

et cette égalité montre que (P') est vérifiée.
Supposons que (P') est vérifiée; en posant b = o dans cette formu le nous aurons :

$$Ia = I(I\text{-}Ia \supset Ia)$$
$$Ia = I(CIa \vee Ia)$$

c.a.d.

$$Ia = ICIa$$

donc d'après le théorème 4.5 A est une algèbre de Boole monadique.

E) L'IMPLICATION CONTRAPOSABLE FAIBLE .

Examinons maintenant l'implication contraposable faible $\rightarrowtail$ définie par

$$a \rightarrowtail b = (a \to b) \wedge (-b \to -a) = (C\text{-}a \vee b) \wedge (Cb \vee -a) =$$
$$= -a \vee b \vee (C\text{-}a \wedge Cb).$$

Montrons que

4.9. THEOREME .*Pour qu'une partie* D *d'une algèbre de Boole topologique soit un filtre ouvert il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées:*

E1) $1 \in D$

E2) *Si* $a, a \rightarrowtail b \in D$ *alors* $b \in D$.(*Modus ponens contraposable faible*)

Dém. Les conditions sont nécessaires.Soit D un filtre ouvert . E1) est vérifiée. Supposons que

$$(1) \; a \in D \quad \text{et} \quad (2) \; a \rightarrowtail b \in D$$

De (2) et $a \rightarrowtail b \leqslant a \to b$ on déduit :

(3) $a \to b = -Ia \vee b \in D$

De (1) il resulte (4) $Ia \in D$ d'où par (3)

(5) $Ia \wedge (a \to b) = Ia \wedge b \in D$

D étant un filtre, de (5) on tire $b \in D$ et E2) est vérifiée.

Les conditions sont suffisantes.

Soit D une partie de A vérifiant les conditions E1) et E2). Nous allons montrer que D vérifie aussi la condition

CI2) *(Modus ponens faible)* Si $a, a \to b \in D$ alors $b \in D$.

On vérifie facilement l'égalité

(1) $a \to b = a \succ\!\to (a \succ\!\to b)$

Alors de (2) $a \in D$ et (3) $a \to b \in D$ on tire en utilisant (1) et E2).

(4) $a \succ\!\to b \in D$

et de (1) et (4) on déduit $b \in D$

Nous avons montré (Th.4.2.) qu'une partie D de A qui vérifie les conditions E1) et CI2) est une filtre ouvert et le théorème se trouve demontré.

Remarquons maintenant que $\succ\!\to$ vérifie l'égalité

E1) $x \succ\!\to (y \succ\!\to x) = 1$

Pour voir que l'égalité

$(x \succ\!\to (y \succ\!\to z)) \succ\!\to ((x \succ\!\to y) \succ\!\to (x \succ\!\to z)) = 1$

n'est pas verifiée il suffit de poser dans l'exemple 4.1 $x = y = b$ et $z = o$

En résumé nous pouvons affirmer que parmi les cinq opérations d'implications que nous avons examiné, seuls les opérations d'implications faible et intuitioniste vérifient les conditions S1),S2) et S3).

5. COMPARAISON AVEC LES ALGEBRES DE HILBERT.

Rappelons la définition suivante introduite par L.HENKIN (1950)

5.1. *DEFINITION: Soit* $(A, 1, \to)$ *un système formé par un ensemble non vide* A, *un élément* $1 \in A$ *et une opération binaire* $\to$ *définie sur* A *telle que:*

AXIOME H1) $x \to (y \to x) = 1$, *quels que soient les éléments* x *et* y *de* A.

AXIOME H2) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1$ *quels que soient* x,y,z *de* A.

AXIOME H3) $x \to 1 = 1$, *quel que soit* $x \in A$.

AXIOME H4) *Si* $x \rightarrow y = 1$ *et* $y \rightarrow x = 1$ *alors* $x = y$.

Nous dirons que A *est un modèle implicatif ou une algèbre de Hilbert.*

Mlle.Luisa Iturrioz a démontré que l'axiome H3) est une conséquence de H1) et H4) et de les axiomes H1),H2) et H4) sont indépendants.

C'est dans l'étude du calcul propositionnel implicatif positif que L.HENKIN (1950) a été conduit a introduire cette notion, au moyen d'une construction à laquelle on peut donner une portée plus générale.

5.2. *DEFINITION: Soit* $(A, \rightarrow)$ *un système formé par un ensemble non vide* A *et une opération* $\rightarrow$ *binaire définie sur* A. *Soit* D *un système deductif de* A *(d'après la Définition 3.1). Alors si nous posons, avec L.Henkin,* $a \equiv b$ (Mod.D) *pour indiquer que* $a \rightarrow b \in D$ *et* $b \rightarrow a \in D$, *la relation binaire* $\equiv$ *ainsi définie est une relation d'équivalence compatible avec l'operation* $\rightarrow$.

Dans ces conditions on peut montrer, en suivant les raisonements même de Henkin(*) que:

5.3. THEOREME DE HENKIN. *L'algèbre quotient* $A/\equiv$ *est une algèbre de Hilbert.*

Cette remarque est utile dans l'étude des algèbres de Hilbert, car elle permet d'afirmer tout de suite que le quotient d'une algèbre de Hilbert A par un système deductif D de $(A, \rightarrow)$ est aussi une algèbre de Hilbert.

Considérons une algèbre de Boole topologique A. Nous avons vu que les opérations d'implication faible $\rightarrow$ et d'implication intuitioniste $\Rightarrow$ sont utiles dans l'étude de ces algèbres, car elles permetent définir les noyaux des images homomorphes de A en utilisant de modus ponens faible et intuitioniste. Remarquons que ces deux implications vérifient les axiomes H1),H2) et

L'axiome de Modus ponens. Si $1 \rightarrow x = 1$ alors $x = 1$

(Respectivement si $1 \Rightarrow x = x$ alors $x = 1$)

Mais l'axiome H4) n'est pas vérifiée.

(*) Cette remarque a été réproduite dans A.DIEGO (1965,pag.4), (1966,pag.4).

En effet on voit de suite que

A) Pour que $a \rightarrow b = 1$ et $b \rightarrow a = 1$ il faut et il suffit que $Ia = Ib$.

B) Pour que $a \Rightarrow b = 1$ et $b \Rightarrow a = 1$ il faut et il suffit que $Ia = Ib$.

Dans une algèbre de Boole topologique on peut avoir $Ia = Ib$, avec $a \neq b$.

Etant donné un filtre ouvert D d'une algèbre de Boole topologique A pour obtenir le quotient A/D on doit définir la rélation de congruence au moyen des deux conditions

$$a \supset b \in D \quad \text{et} \quad b \supset a \in D$$

Ces remarques montrent que la considération des algèbres de Hilbert restreint inutilement les applications de la théorie des systèmes deductifs telle que nous l'avons developpée au § 3 .Cela avait deja été remarqué dans A. MONTEIRO (1962 et 1963) . Pour montrer que cette généralisation est vraiment utile, et qu'il ne sagit pas d'une simple remarque, il suffit de dire qu'il existent de nombreux calculs propositionnels distincts auquels on peut appliquer les résultats indiqués au §3 et qui ont été objet d'une exposition d'ensemble dans notre conférence au IV Congrés des Mathématiciens d'Expression Latine (Bucharest,Septembre de 1969).

Les résultats indiqués dans cette note on éte obtenus à Bucharest (Octobre de 1969) quand l'auteur jouissait d'une bourse du "Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la Argentina " et on été exposés en partie dans une conférence à l'Université de Cluj.

BIBLIOGRAPHIE

DAVIS (Chandler)

(1954) *Modal operators, equivalence relations and projective algebras*. American Journal of Mathematics.76 (1954), 217-249.

DIEGO (Antonio)

(1965) *Sobre Algebras de Hilbert*. Notas de Lógica Matématica Nº 12 (1965), 1-90. Instituto de Matématica. Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca.

(1966) *Sur les algèbres de Hilbert*. Collection de loqique mathématique. Série A, n°21. Gauthier-Villars. Paris. (1966).

DUMMETT (M.A.E.) and LEMON (E.J.)

(1959) *Modal Logic between S4 and S5*. Zeitschrift für Mathematische Logik und Grunglagen der Mathematik. 3 (1959). 250-264.

FEYS (Robert)

(1965) *Modal Logic*. Paris. Gauthier-Villars et Louvain, E. Nauwelaerts. (1965).

HALMOS (Paul R.)

(1954) *Polyadic Boolean Algebras*. Pro. of the Nat. Acad. of Siences of the U.S.A. Vol.40 (1954), 296-30.

(1955) *Algebraic Logic I (Monadic Boolean Algebras)*. Compositio Mathematica, 12 (1955), 217-249.

HENKIN (León).

(1950) *An algebraic characterization of quantifiers*. Fun. Math. 37 (1950), 63-74.

HILBERT (David)

(1923) *Die Logischen Grundlagen der Mathematik*. Mathematischen Annalen. 88 (1923), 151-165.

HUGHES (G.E.) and CRESSWELL (M.J.)

(1968) *An introduction to Modal Logic.* Neuthen and Co.Ltd. London. 1968.

KURATOWSKI (Casimir)

(1922) *Sur l'opération $\bar{A}$ de l'Analysis Situs.* Fundamenta Mathematicae. 3 (1922), 181-189.

LEWIS (C.I.) and LANGFORD (C.H.)

(1932) *Simbolic Logic.* New York (Century Co). 1932.

McKINSEY (J.C.C.)

(1941) *A solution of the decision problem for the Lewis Systems S.2 and S.4 with application to topology.* The Journal of Symbolic Logic. 6 (1941), 117-134.

McKINSEY (J.C.C.) and TARSKI (Alfred)

(1944) *The Algebra of Topology.* Annals of Mathematics, 45 (1944), 141-191.

(1946) *On closed elements in closure Algebras.* Annals of Mathematics.47 (1946), 122-162.

(1948) *Some theorems about the Sentencial Calculus of Lewis and Heyting.* The Journal of Symbolic Logic.13 (1948), 1-15.

MONTEIRO (Antonio)

(1954) *L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques.* Segundo Symposium Latino Americano de Matemática. Centro de Cooperación Científica de la Unesco para América Latina. Villavicencio-Mendoza. 21-25 Julio 1954. Centro de Cooperación Científica de la Unesco para América Latina Montevideo 1954, 129-162.

(1960) *Algèbre de la Logique II.* (Leçons du 1er. semestre 1960). Instituto de Matemática. Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca. Ces leçons n'ont pas été publiées.

(1962) *Algèbre de la Logique III.* (Leçons du 1er. semestre 1962). Instituto de Matemática. Universidad Nacional del Sur.

Bahía Blanca. Ces leçons n'ont pas été publiées.

(1963) *Algebras de Nelson semi-simples.* Comunication à la U.M.A. (Rosario- 11-13- Octobre 1963). Voir Revista de la U.M.A. 21, n° 3 (1963), 145-146.

NIELAND (J.F.F.) et BETH (E.W.)

(1961) *Construction sémantique du système S4.* Compte-Rendu des travaux effectués par l'Université d'Amsterdam dans le cadre du Contrat Euratom (Contrat n° 010-60-12) par E. Beth. Centre de Traitement de l'Information Scientifique. EURATOM-C.C.R.ISPRA. Rapport Cetis n° 26. Aout 1961. Logique. pag. 67-73.

PARRY (William Tuthill)

(1939) *Modalities in the survery system of strict implication.* The Journal of Symbolic Logic. 4 (1939), 137-154.

PORTE (Jean)

(1962) *Quelques extensions du théorème de déduction.* Comunication à la U.M.A. (Buenos Aires-La Plata, 1960). Voir Revista de la U.M.A., 20(1962), 259-266.

SIKORSKI (Roman)

(1954) *Closure homomorphisms and interior mappings.* Fundamenta Mathematicae. 41 (1954), 12-20.

(1949) *Closure algebras.* Fundamenta Mathematicae. 36 (1949), 165-206.

SOBOCINSKI (Boleslaw)

(1964) *Remarks about axiomatizations of certain modal systems.* Notre Dame Journal of Formal Logic. Vol V, n° 1 (1964) 71-80.

STONE (Marshall H.)

(1936) *The theory of representation of Boolean algebras.* Transactions of the American Mathematical Society. 40 (1936) 37-111.

(1937) *Topologicae representation of distributive lattices and Brouwerian Logics.* Časopis pro Pěstování Matematikya Fysiky (Část Matematikă), 67 (1937), 1-25.

TARSKI (Alfred)

(1930) *Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften I.* Monatshefte fur Mathematik und Physik, 37 (1930), 361-404.

(1938) *Der Aussgenkalkul un die Topologie.* Fundamenta Mathematicae, 31 (1938), 103-134.

(1956) *Logic, Semantic and metamathematics* (papers from 1923 to 1938). Translated by J.W.Woodger. Oxford 1956.

TERASAKA (Hidetaka)

(1937) *Theorie der Topologischen Verbände.* Proc. Imperial Acad. of Science. Tokyo. 13 (1937), 401-405.

(1940) *Theorie der Topologischen Verbände:* Coll. Papers. Fac. Sci. Osaka Univ. ser. A. 8. nº 1 (1940), 33 pag.(Réimpression de la partie du volume 33 de Fundamenta Mathematicae imprimé en 1939 avant la guerre. Ce travail ne figure pas dans ce volume quand il a été reimprimé en 1945.

TSAO-CHEN (Tang)

(1938) *Algebraic postulates and a geometric interpretation for the Lewis calcules of strict implication.* Bull. Amer. Math. Soc. 44 (1938), 737-744.

Instituto de Matemática
Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca. Argentina.

Recibido en diciembre de 1970