Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 26, 1972.

ALGEBRAS DE OPERADORES TRANSITIVAS QUE CONTIENEN UNA SUBALGEBRA DE MULTIPLICIDAD ESTRICTA FINITA

por Domingo A. Herrero

Dedicado a la memoria de mis viejos.

1. INTRODUCCION. El problema de la existencia de subespacios invariantes para operadores en un espacio de Banach, en su forma más general, se plantea en los siguientes términos:

"Sea X un espacio de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, sea $\mathcal{L}(X)$ el álgebra de todos los operadores de X y sea A una subálgebra *transitiva*; es decir, no existe ningún subespacio $M((0) \neq M \neq X)$ que sea invariante bajo todos los operadores de A.

¿Se puede deducir de aquí que $A = \mathcal{L}(X)$, o existen subálgebras transitivas propiamente contenidas en $\mathcal{L}(X)$?.

Si la respuesta a la anterior cuestión es negativa, ¿qué condiciones adicionales sobre A implican que $A = \mathcal{L}(X)$?.

NOTA. Aquí, y en todo lo que sigue, X es un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$ de dimensión mayor que uno; *álgebra* significa *subálgebra fuertemente cerrada* de $\mathcal{L}(X)$, que *contiene al operador identidad* I; *operador* y *subespacio* deben entenderse como *aplicación lineal y continua* (de X en X) y *variedad lineal cerrada*, respectivamente.

A la fecha sólo se conocen respuestas parciales para la segunda cuestión, pero no hay contraejemplos para la primera. La literatura sobre el tema es amplia y el lector interesado encontrará abundante material en los artículos del volumen 20, número 10 (Abril/1971) de "Indiana University Mathematics Journal", y en los artículos allí citados.

Entre otras respuestas parciales, se tiene la siguiente (ver [6, *teor.(2.4.6)*] y [1,§1]).

TEOREMA 1. *Sea A un álgebra transitiva que satisface la condición (más fuerte que "transitividad"):*

(1) *No existe ninguna variedad lineal de X que sea invariante bajo A, excepto las triviales* (0) *y* X.

Entonces $A = \mathcal{L}(X)$.

Ahora bien, si A es transitiva y $M \neq (0)$ es una variedad lineal invariante bajo A, entonces $\overline{M}$ = clausura (M) es un subespacio invariante. Dado que A es transitiva, $\overline{M} = X$ y tenemos así que la condición (1) puede ser reemplazada por

(1') *No existe ninguna variedad lineal densa invariante bajo* A *y distinta de* X.

El principal resultado de esta nota (*lema 1*, más abajo) dice que ciertas hipótesis algebraicas sobre un álgebra B implican (1'), y de este resultado se deduce una interesante generalización del *teor. 1*.

La definición de "multiplicidad de un operador" dada en [7] sugiere la siguiente: si R es un subconjunto de X y A es un álgebra, indicaremos con $A(R)$ a la variedad lineal generada por $\{Ax: A \in A,\ x \in R\}$.

DEFINICION. $\overline{\mu}(A)$ = *multiplicidad estricta de* A = = *inf.* $\{$*cardinal* $(R): A(R) = X\}$.

2. EL RESULTADO PRINCIPAL.

TEOREMA 2. *Sea* A *un álgebra transitiva, y supongamos que* $A \supset B$, *donde* B *es cualquier subálgebra de* $\mathcal{L}(X)$ *tal que* $\overline{\mu}(B) < \infty$. *Entonces* $A = \mathcal{L}(X)$.

NOTA. Este teorema generaliza en varios sentidos un resultado de Alan Lambert ([5, *teor.4.5*]), a quien estamos sumamente agradecidos por haber llamado nuestra atención sobre las "álgebras estrictamente cíclicas" ($\overline{\mu}(A) = 1$, en nuestra notación).

De acuerdo a las observaciones hechas en la primera sección, para demostrar el *teor.2* basta probar que la única variedad lineal densa e invariante bajo A es X; pero esto se deduce en forma inmediata del siguiente resultado:

LEMA 1. *Sea* $B \subset \mathcal{L}(X)$ *un álgebra tal que, para cierto subconjunto finito* $\{x_1,\ldots,x_n\}$ *de* X, *satisface*

$$(2) \qquad B(\{x_1,\ldots,x_n\}) = X,$$

y sea M *una variedad lineal densa e invariante bajo* $\mathcal{B}$.
Entonces M = X.

Demostración: Sea $\mathcal{B}^{[n]} = \{(B_1,\ldots,B_n): B_j \in \mathcal{B},\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$. $\mathcal{B}^{[n]}$ es una álgebra de Banach con unidad $E = (I,\ldots,I)$ y norma $\|(B_1,\ldots,B_n)\|_{[n]} = \text{máx.}\ \{\|B_j\|: 1 \leqslant j \leqslant n\}$ (las operaciones se definen, obviamente, "coordenada a coordenada").
Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}^{[n]} \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\
\mathcal{B}^{[n]}/\text{núc } S \arrow[ur, "\overline{S}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $S(B_1,\ldots,B_n) = B_1x_1 + \ldots + B_nx_n$ es una aplicación lineal, continua y (de acuerdo a (2)) *sobre*; π es la proyección canónica sobre el cociente ($\mathcal{B}^{[n]}$ es un módulo a izquierda sobre $\mathcal{B}$ y núc S = = núcleo de S, es un submódulo cerrado a izquierda de $\mathcal{B}^{[n]}$) y $\overline{S}$ es la aplicación cociente, que satisface $S = \overline{S} \circ \pi$. Está claro que (ver, p.ej., [3, pág.57]) si consideramos $\mathcal{B}^{[n]}/\text{núc } S$ con la "norma cociente", entonces $\overline{S}$ es un isomorfismo de espacios de Banach y π es una aplicación abierta. Así, si $y \in X$ y $\|x_1 - y\| < \|\overline{S}^{-1}\|^{-1}$, podemos encontrar operadores $A_1,\ldots,A_n$ en $\mathcal{B}$ tales que $y = A_1x_1 + \ldots + A_nx_n$, y

$$\text{máx.}\{\|I - A_1\|;\|A_j\|,\ j=2,3,\ldots,n\} < \|\overline{S}^{-1}\|/\|\overline{S}^{-1}\| = 1$$

(aquí estamos utilizando en forma explícita el hecho de que $x_1 = S(I,0,\ldots,0)$). Entonces

$$A_1^{-1} = [I - (I - A_1)]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - A_1)^k$$

pertenece a $\mathcal{B}$ e

$$y' = A_1^{-1}y = x_1 + A_1^{-1}A_2x_2 + \ldots + A_1^{-1}A_nx_n.$$

Dado que la variedad lineal M es densa e invariante bajo $\mathcal{B}$, el razonamiento anterior nos permite encontrar vectores $y_1,\ldots,y_n \in M$ tales que

$$y_j = A_{1j}x_1 + \ldots + A_{(j-1)j}x_{j-1} + x_j + A_{(j+1)j}x_{j+1} + \ldots + A_{nj}x_n\ ,$$

donde los operadores $A_{ij} \in \mathcal{B}$ satisfacen la desigualdad

$$\sum_{i,j=1;i\neq j}^{n} \|A_{ij}\| < (2n!)^{-2n!}$$

Por lo tanto, para $j = 2,3,\ldots,n$, $(I - A_{1j})^{-1} \in \mathcal{B}$ e

$$y_j' = (I - A_{1j})^{-1}(y_j - A_{1j}y_1) = 0 + (I - A_{1j})^{-1}(A_{2j} - A_{1j}A_{21})x_2 +$$

$$+\ldots+ (I - A_{1j})^{-1}(A_{(j-1)j} - A_{1j}A_{(j-1)1})x_{j-1} + x_j +$$

$$+ (I - A_{1j})^{-1}(A_{(j+1)j} - A_{1j}A_{(j+1)1})x_{j+1} +\ldots+$$

$$+ (I - A_{1j})^{-1}(A_{nj} - A_{1j}A_{n1})x_n$$

pertenece a M.

Por inducción se demuestra que $x_n \in M$ y mediante una repetición formal del mismo argumento,que $x_1,\ldots,x_n \in M$. De aquí y (2) se deduce que $M = X$.

q.e.d.

3. ALGEBRAS DE MULTIPLICIDAD ESTRICTA FINITA.

DEFINICION. *Se dice que una aplicación lineal* $T:D(T) \longrightarrow X$ *(donde* $D(T)$ = *dominio de* T *es una variedad lineal de* X*) conmuta con un subconjunto* $W \subset \mathcal{L}(X)$ *si, para todo* $L \in W$ *y para todo* $x \in D(T)$, *vale que*

$$LD(T) \subset D(T) \quad , \quad TLx = LTx.$$

PROPOSICION 2. *Sea* $\mathcal{B}$ *como en el lema 1 y sea* T *una aplicación lineal densamente definida que conmuta con* $\mathcal{B}$.
Entonces:

i) $D(T) = X$ *y* $T \in \mathcal{L}(X)$.

ii) *Si el rango de* T *es denso, entonces* ran T = X.

iii) *Si* T *no es invertible, ni cero, entonces al menos uno de los subespacios*

(3) $\qquad M = \text{núc } T \quad , \quad N = \text{claus.}(\text{ran } T)$

es no trivial.

Demostración: Observemos que D(T), núc T y ran T, así como sus respectivas clausuras, son variedades lineales invariantes bajo $\mathcal{B}$. Por lo tanto, ii) y la primera parte de i) son corolarios inmediatos del *lema 1*; en particular, tenemos que $x_1,\dots,x_n \in D(T)$.

Sean R_{ij}, $i,j = 1,\dots,n$, operadores de $\mathcal{B}$ tales que

$$Tx_j = R_{1j}x_1 + \dots + R_{nj}x_n \ , \ j = 1,\dots,n.$$

Si $y = A_1x_1 + \dots + A_nx_n$ ($A_1,\dots,A_n \in \mathcal{B}$) es un elemento cualquiera de $D(T) = X$, entonces

$$(4) \quad Ty = T(A_1x_1 + \dots + A_nx_n) = A_1Tx_1 + \dots + A_nTx_n =$$

$$= \{\sum_{k=1}^{n} A_kR_{1k}\}\ x_1 + \dots + \{\sum_{k=1}^{n} A_kR_{nk}\}\ x_n \ .$$

Sea $z \in X$ un elemento tal que $\|y - z\| < \varepsilon$. Utilizando los mismos argumentos que en la *demostración* del *lema 1*, podemos encontrar operadores $B_1,\dots,B_n \in \mathcal{B}$ tales que

$$z = B_1x_1 + \dots + B_nx_n,$$

y

$$\|A_j - B_j\| < \varepsilon\ \|\overline{S}^{\,-1}\| \ , \ j = 1,\dots,n.$$

De aquí, y (4), se sigue que

$$\|Ty - Tz\| \leqslant \varepsilon\ \|\overline{S}^{\,-1}\|\{\sum_{i,j=1}^{n} \|R_{ij}\|\}\{\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|\} \ ,$$

de donde, finalmente, obtenemos que T es continua, es decir, $T \in \mathcal{L}(X)$.

iii) Observemos que $T \neq 0$ implica que $N \neq (0)$ y $M \neq X$. Ahora bien, si $N = X$, entonces (por *lema 1*) ran $T = X$ y T es sobre; si, además, $M = (0)$, entonces T es también 1-1 y por lo tanto invertible, lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, o bien $M \neq (0)$, o bien $N \neq X$.

q.e.d.

En [2] y [8] se ha introducido la siguiente

DEFINICION. *Un subespacio* $M \subset X$ *se dice ultrainvariante para* $T \in \mathcal{L}(X)$ *si* $LM \subset M$, *para todo* $L \in \mathcal{L}(X)$ *que conmuta con* T.

Observemos que, para todo $z \in \mathbb{C}$, T y $(T - zI)$ tienen los mismos subespacios ultrainvariantes y, para todo $T \in \mathcal{L}(X)$, los subespacios M y N de (3) son ultrainvariantes para T (ver [2;4, § 5]). Entonces, de la *prop.*2,iii) obtenemos

COROLARIO 3. *Si* $T \in \mathcal{L}(X)$ *no es un múltiplo de* I *y conmuta con algún álgebra* $\mathcal{B}$ *tal que* $\bar{\mu}(\mathcal{B}) < \infty$, *entonces* T *tiene un subespacio ultrainvariante no trivial.*

Demostración: Sea $z \in \mathbb{C}$ cualquier elemento del espectro de T. Entonces $(T - zI)$ es no invertible, distinto de cero y conmuta con $\mathcal{B}$. El resultado se sigue de la *prop.*2,iii) y de las observaciones anteriores.

q.e.d.

4. ALGEBRAS DE CODIMENSION FINITA.

Otro corolario elemental del *teorema 1* es el siguiente

TEOREMA 3. *Si el espacio de Banach* X *tiene dimensión infinita, entonces toda subálgebra propia* $\mathcal{L}(X)$ *de* $\mathcal{L}(X)$ *tiene codimensión infinita en* $\mathcal{L}(X)$.

Demostración: Sea $\mathcal{A}$ una subálgebra de $\mathcal{L}(X)$ tal que

$$(4) \qquad \dim \mathcal{L}(X)/\mathcal{A} = n < \infty .$$

y sea $M \neq \{0\}$ un subespacio invariante de $\mathcal{A}$.

Es evidente, por (4), que la codimensión de cualquier variedad lineal invariante bajo $\mathcal{A}$ debe ser menor o igual que n. Por lo tanto $\bar{\mu}(\mathcal{A}) \leq n + 1$ y $\dim X/M \leq n$. Por consiguiente, M admite un subespacio complementario R ($\dim R \leq n$) y todo operador T en $X = M \oplus R$ puede escribirse como la matriz

$$T = \begin{Vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{Vmatrix} ,$$

donde $T_{11}:M \to M$, $T_{12}:R \to M$, $T_{21}:M \to R$ y $T_{22}:R \to R$ son aplicaciones lineales y continuas.

Ahora bien, la invariancia de M implica que $T_{21} = 0$, para todo $T \in \mathcal{A}$. Por otra parte, si R contiene un vector $x_0 \neq 0$, a cada funcional lineal y continua f sobre M le podemos hacer correspon-der la aplicación lineal y continua $T(f):M \longrightarrow R$ definida por $T(f)x = f(x)x_0$; así, si M^* es el dual topológico de M, se tiene que

$$\mathcal{L}(X) \supset A \oplus \left\{ \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ T(f) & 0 \end{Vmatrix} \; ; \; f \in M^* \right\} ,$$

y por lo tanto

$$\dim \mathcal{L}(X)/A \geqslant \dim M^* = \infty ,$$

contradiciendo nuestra hipótesis. En consecuencia, A debe ser un álgebra transitiva; dado que, además, A tiene multiplicidad es-tricta finita, se deduce del *teorema 1* que $A = \mathcal{L}(X)$.

q.e.d.

NOTA. Después de haber completado este trabajo, el autor recibió el artículo mimeografiado "Strictly cyclic operator algebras", de Mary R. Embry. En dicho artículo, la autora demuestra los mismos resultados aquí incluídos (excepto el *lema 1* y el *teorema 3*) partiendo de la hipótesis ligeramente más restrictiva $\overline{\mu}(\mathcal{B}) = 1$, en lugar de $\overline{\mu}(\mathcal{B}) < \infty$, y una línea de razonamiento similar a la utilizada en [5], razón por la cual sus demostraciones son esencialmente distintas a las dadas en el presente trabajo.

REFERENCIAS

[1] ARVESON, W.B., *A density theorem for transitive algebras*, Duke J. Math. 34 (1967), 635-647.

[2] DOUGLAS, R.G. y PEARCY, C., *On a topology for invariant subspaces*, J. of Func. Analysis 2(1968), 323-341.

[3] DUNFORD, N. y SCHWARTZ, J., *"Linear operators"*, Part I, 3ª ed., Interscience Publ. Inc., New York, 1966.

[4] HERRERO, D.A. y SALINAS, N., *Analytically invariant and bi-invariant subspaces*, (a publicarse).

[5] LAMBERT, A., *Strictly cyclic operator algebras*, Pac. J. Math. (a publicarse).

[6] RICKART, C.E., *"General theory of Banach algebras"*, D. Van Nostrand Co., Princeton, New Jersey, 1960.

[7] Sz.-NAGY, B. y FOIAS, C., *Modèle de Jordan pour une classe d'opérateurs de l'espace de Hilbert*, Acta Sci. Math. (Szeged) 31 (1970), 91-115.

[8] ------------------------, *"Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert"*, Masson et Cie., Akademiai Kiadó, Budapest, 1967.

State University of New York at Albany.

Recibido en agosto de 1971.
Versión final noviembre de 1971.

* Research supported by National Science Foundation Grant GU3171.